K.T. Tang

Metode Matematik untuk Teknik dan Sains 1

Analisis Kompleks, Determinan dan Matriks

diterjemahkan oleh:
Imamal Muttaqien
Jurusan Fisika
UIN SUNAN GUNUNG DJATI
BANDUNG

Pengantar

Daftar Isi

Bagian I

Analisis Kompleks

1

Bilangan Kompleks

Persamaan paling kompak dalam matematika adalah

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{1.1}$$

Dalam persamaan ini, lima buah konstanta mendasar yang berasal dari empat buah cabang matematika klasik − aritmatika (0, 1), aljabar (i), geometri (π), dan analisis (e), − dihubungkan dengan tiga buah operasi matematika yang paling penting yaitu: − tambah, kali, dan eksponen − menjadi dua buah suku tak nol di ruas kiri.

Pers (1.1) merupakan rumus Euler (ditemukan sekitar tahun 1740 oleh Leonhard Euler)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{1.2}$$

Ketika $\theta = \pi$, $\cos\pi = -1$ dan $\sin\pi = 0$, sehingga $e^{i\pi} = -1$.

Sebagian besar perhitungan yang melibatkan bilangan kompleks berdasarkan rumus Euler. Untuk memberikan landasan yang tepat dalam membicarakan rumus ini, pertama kita akan mempresentasikan gambaran sistem bilangan kita dan latar belakang historis. Hal ini juga akan memberikan kita kerangka untuk mengulang beberapa operasi matematika dasar.

1.1 Sistem Bilangan

Setiap orang yang menemukan untuk pertama kalinya persamaan ini tidak dapat memahami tapi tertarik dengan sifat aneh dari angka-angka seperti e dan i. Tetapi aneh adalah relatif, ketika kita sudah cukup mengenalnya, obyek yang sebelumnya aneh menjadi sesuatu yang umum hari ini. Sebagai contoh, saat ini angka negatif kehadirannya tidak mengganggu siapapun, tetapi untuk waktu yang lama angka negatif yang dianggap sebagai "aneh" atau "tidak masuk akal." Selama 2000 tahun, matematika berkembang pesat tanpa angka negatif. Orang Yunani tidak mengenal angka negatif dan tidak membutuhkannya. Ketertarikan utama mereka adalah geometri, yang cukup hanya dengan angka positif. Meski setelah matematikawan Hindu Brahmagupta "menemukan" angka nol sekitar tahun 628, dan bilangan negatif dianggap sebagai kerugian daripada keuntungan dalam persoalan finansial, Eropa pertengahan sebagian besar mengabaikannya.

Memang, begitu lama orang menganggap pengurangan sebagai tindakan "dibawa pergi," dan angka negatif tidak masuk akal. Seseorang tidak dapat mengambil, katakanlah, tiga apel dari dua apel.

Hanya setelah pengembangan aljabar aksiomatik, penerimaan penuh dari angka negatif ke dalam sistem nomor kami ini dimungkinkan. Hal ini juga dalam kerangka aljabar aksiomatik, bilangan irasional dan bilangan kompleks terlihat menjadi bagian alami dari sistem bilangan kita.

Dengan metode aksiomatik, kita berfikir bahwa langkah demi langkah pengembangan sebuah subjek dari satu himpunan kecil definisi dan rantai konsekuensi logis berasal dari mereka. Metode ini sudah lama diikuti dalam geometri, sejak Yunani kuno mempelajarinya sebagai disiplin matematika ketat.

1.1.1 Penjumlahan dan Perkalian Bilangan Bulat

Kita mulai dengan asumsi bahwa kita tahu apa itu bilangan bulat, apa itu nol, dan bagaimana menghitung. Meskipun matematikawan bisa kembali lebih jauh dan menggambarkan teori himpunan untuk memperoleh sifat-sifat bilangan bulat, kita tidak akan ke arah itu.

Kita letakkan bilangan bulat dengan urutan yang semakin besar seperti diagram berikut

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \; \cdots \\ & & \downarrow & & & \uparrow & & \\ & & 2 & - & - & - & & \end{array}$$

Jika kita mulai dengan bilangan bulat a tertentu, dan kita menghitung berturut-turut b kali satu satuan ke kanan kita sampai pada sebuah bilangan yang kita sebut $a+b$, dan hal ini mendefinisikan penambahan bilangan bulat. Sebagai contoh, mulai dari 2, dan 3 satuan naik, kita sampai pada 5. Jadi 5 sama dengan $2+3$.

Setelah kita telah mendefinisikan penjumlahan, maka kita dapat mempertimbangkan hal ini: jika kita mulai dengan nol dan menambahkan a padanya, berturut-turut sebanyak b kali, kita sebut hasilnya sebagai perkalian bilangan bulat, kita menyebutnya $b \times a$.

Sekarang sebagai konsekuensi dari definisi ini dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa operasi ini memenuhi aturan sederhana tertentu tentang urutan agar perhitungan dapat dilakukan. Aturan tersebut adalah hukum komutatif, asosiatif, dan distributif yang sudah kita kenal

$$\begin{aligned}
a+b &= b+a && \text{Hukum komutatif penjumlahan} \\
a+(b+c) &= (a+b)+c && \text{Hukum asosiatif penjumlahan} \\
ab &= ba && \text{Hukum komutatif perkalian} \quad . \\
(ab)c &= a(bc) && \text{Hukum asosiatif perkalian} \\
a(b+c) &= ab+ac && \text{Hukum distributif}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Aturan ini mengkarakterisasi *aljabar elementer*. Kita mengatakan aljabar elementer karena terdapat cabang matematika yang dinamakan aljabar modern yang terdapat aturan sehingga $ab = ba$ dilarang, tetapi kita tidak akan membicarakannya.

Di antara bilangan bulat, 0 dan 1 memiliki sifat istimewa

$$\begin{aligned}
a+0 &= a, \\
a \cdot 1 &= a.
\end{aligned}$$

Sehingga 0 disebut sebagai identitas penjumlahan dan 1 sebagai identitas perkalian. Lebih lanjut

$$0 \cdot a = 0$$

dan jika $ab = 0$, maka a atau/dan b sama dengan nol.

Sekarang kita juga bisa memiliki perkalian berulang: jika kita mulai dengan 1 dan kalikan dengan a, berulang sebanyak b kali, kita menamakannya pemangkatan: a^b. Dari definisi ini

$$\begin{aligned}
(ab)^c &= a^c b^c, \\
a^b b^c &= a^{(b+c)}, \\
(a^b)^c &= a^{(bc)}.
\end{aligned}$$

Hasil ini sudah diketahui dan kita tidak perlu mengulangnya.

1.1.2 Operasi Invers

Sebagai tambahan untuk operasi langsung penjumlahan, perkalian dan pemangkatan, kita juga mempunyai operasi invers, yang didefinisikan sebagai berikut. Marilah kita asumsikan a dan c diberikan, dan kita akan mencari nilai b yang memenuhi persamaan $a + b = c,\ ab = c,\ b^a = c.$

Jika $a+b=c$, b didefinisikan sebagai $c-a$, yang dinamakan pengurangan. Operasinya dinamakan pembagian: jika $ab=c$, maka $b=c/a$ adalah pembagian $-$ sebuah solusi persamaan $ab=c$ "ke belakang."

Sekarang jika kita memiliki $b^a=c$, jika kita bertanya pada diri sendiri, "Berapakah b?" b adalah akar ke$-a$ dari c : $b=\sqrt[a]{c}$. Sebagai contoh, jika kita bertanya pada diri sendiri pertanyaan berikut: "Berapakah bilangan bulat yang dipangkatkan tiga hasilnya 8?" maka jawabannya adalah akar tiga dari 8 sama dengan 2. Operasi langsung dan inversnya diringkas sebagai berikut:

Operasi		Operasi invers	
(a) penjumlahan:	$a+b=c$	(a') pengurangan:	$b=c-a$,
(b) perkalian:	$ab=c$	(b') pembagian:	$b=c/a$,
(c) pangkat:	$a^b=c$	(c') akar:	$b=\sqrt[a]{c}$.

Persoalan Tak Terselesaikan

Ketika kita mencoba menyelesaikan persamaan aljabar sederhana menggunakan definisi ini, kita akan menemui persoalan tak terselesaikan, seperti berikut ini. Anggap kita mencoba menyelesaikan persamaan $b=3-5$. Hal ini berarti menurut definisi pengurangan, kita harus mencari sebuah bilangan, yang ketika dijumlahkan dengan 5 memberikan 3. Dan jelaslah tidak terdapat bilangan tersebut; hal ini adalah persoalan tak terselesaikan.

1.1.3 Bilangan Negatif

Dalam aljabar, cara untuk menyelesaikan kesulitan seperti ini adalah dengan memperluas sistem bilangan kita dengan abstraksi dan generalisasi. Kita abstraksi definisi mula-mula penjumlahan dan perkalian dari penggaris dan bilangan bulat. Kita mengasumsikan penggaris tersebut berlaku untuk kelas bilangan yang lebih luas, meski awalnya digunakan untuk kelas yang lebih sempit. Sehingga, dibandingkan dengan menggunakan bilangan bulat untuk mendefinisikan penggaris secara simbolik, kita menggunakan penggaris sebagai definisi simbol, yang merepresentasikan jenis bilangan lebih umum. Sebagai sebuah contoh, dengan bekerja pada penggaris saja, kita bisa membuktikan bahwa $3-5=0-2$. Faktanya kita bisa menunjukkan bahwa kita bisa melakukan semua pengurangan, dengan definisi himpunan bilangan baru: $0-1,\ 0-2,\ 0-3,\ 0-4$ dan seterusnya (disingkat sebagai $-1,\ -2,\ -3, -4, \cdots$), yang disebut bilangan negatif.

Sehingga kita telah menaikkan selang objek sehingga penggaris tersebut bekerja, tetapi arti simbolnya berbeda. Kita tidak bisa mengatakan, contohnya, -2 dikalikan 5 berarti menjumlahkan 5 berturut-turut -2 kali. Hal ini tidak ada artinya. Tetapi kita mensyaratkan bilangan negatif memenuhi semua penggaris.

Sebagai contoh, kita bisa menggunakan penggaris untuk menunjukkan -3 kali -5 sama dengan 15. Misalkan $x = -3(-5)$, hal ini ekivalen dengan $x + 3(-5) = 0$, atau $x + 3(0 - 5) = 0$. Dengan menggunakan penggaris, kita bisa menuliskan persamaan ini sebagai

$$x + 0 - 15 = (x + 0) - 15 = x - 15 = 0$$

Sehingga, $x = 15$. Maka negatif a dikalikan negatif b sama dengan positif ab.

$$(-a)(-b) = ab.$$

Sebuah persoalan menarik muncul ketika kita berbicara tentang pangkat. Anggap kita ingin mencari arti a^{3-5}. Kita tahu bahwa $3-5$ adalah solusi persoalan $(3-5)+5 = 3$. Jadi

$$a^{(3-5)+5} = a^3.$$

Karena

$$a^{(3\text{-}5)+5} = a^{(3-5)}a^5 = a^3$$

diperoleh:

$$a^{3-5} = a^3/a^5.$$

Jadi secara umum,

$$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}.$$

Jika $n = m$, kita mempunyai

$$a^0 = 1.$$

Sebagai tambahan, kita tahu arti dengan memangkatkan dengan bilangan negatif. Karena

$$3 - 5 = -2, \quad a^3/a^5 = \frac{1}{a^2}.$$

Maka

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$$

Jika sistem bilangan kita hanya terdiri dari bilangan bulat postif dan negatif, maka $1/a^2$ simbol tidak ada artinya, karena jika a bilangan bulat postif atau negatif, kuadratnya akan lebih besar dari 1, dan kita tidak tahu apa yang dimaksud dengan 1 dibagi dengan bilangan lebih besar dari 1. Jadi ini adalah persoalan lain yang tak terselesaikan.

1.1.4 Bilangan Pecahan

Rencana besar adalah melanjutkan proses generalisasi; ketika kita menemukan persoalan lain yang tidak bisa kita pecahkan kita memperluas sistem bilangan yang kita miliki. Perhatikan pembagian: kita tidak bisa menemukan sebuah bilangan yang bulat, meskipun itu sebuah bilangan bulat negatif, yang sama dengan membagi 3 dengan 5. Sehingga secara sederhana kita mengatakan bahwa 3/5 adalah bilangan lain, yang dinamakan bilangan pecahan. Dengan pecahan yang didefinisikan sebagai a/b dengan a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$, kita bisa membicarakan tentang perkalian dan penjumlahan pecahan. Sebagai contoh , jika $A = a/b$ dan $B = c/b$, maka dengan definisi $bA = a$, $bB = c$, sehingga $b(A + B) = a + c$. Maka $A + B = (a + c)/b$. Jadi

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+b}{b}.$$

Dengan cara yang sama, kita bisa membuktikan

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}.$$

bisa dengan mudah juga dibuktikan bahwa pecahan memenuhi aturan pada (1.3). Sebagai contoh, untuk membuktikan hukum komutatif perkalian, kita bisa mulai dengan

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} = \frac{ca}{db}.$$

Karena $a,\ b,\ c,\ d$ bilangan bulat. sehingga $ac = ca$ dan $bd = db$. Jadi $\frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db}$. Dari sini:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}.$$

Ambil contoh lain dari pangkat. Berapakah $a^{3/5}$? Kita hanya tahu bahwa $(3/5)5 = 3$, karena itu adalah definisi dari 3/5. Jadi kita juga tahu bahwa

$$(a^{(3/5)})^5 = a^{(3/5)(5)} = a^3.$$

Kemudian kita juga tahu dari definisi akar bahwa

$$a^{(3/5)} = \sqrt[5]{a^3}.$$

Dengan cara ini kita bisa mendefinisikan apa yang kita maksud dengan pecahan dalam simbol yang berbeda. Fakta yang perlu diperhatikan dari sini adalah penggaris tetap bisa berlaku untuk bilangan bulat positif dan negatif dan juga untuk pecahan.

Secara historis, bilangan bulat positif dan perbandingannya (pecahan) dinamakan oleh orang kuno sebagai bilangan alami. Bilangan alami ini bersama dengan negatifnya dikenal sebagai bilangan rasional dalam bahasa sehari-hari kita sekarang.

Orang Yunani, di bawah pengaruh Pythagoras, mengangkat pecahan ke dalam pilar pusat sistem matematik dan filosofi mereka. Mereka percaya bahwa pecahan adalah sebab utama untuk semua hal di dunia, dari hukum harmoni nada ke gerak planet. Sehingga menjadi sesuatu yang mengejutkan ketika mereka menemukan terdapat bilangan yang tidak bisa dinyatakan sebagai pecahan.

1.1.5 Bilangan Irasional

Bukti pertama adanya bilangan irrasional (sebuah bilangan yang bukan rasional) berasal dari pencarian panjang diagonal satuan kuadrat. Jika panjang diagonal adalah x, maka dengan teorema Pythagorean $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Jadi $x = \sqrt{2}$. Ketika orang mengasumsikan bilangan ini sama dengan pecahan tertentu, katakanlah m/n dengan m dan n tidak memiliki faktor umum, mereka menemukan asumsi ini sebagai sebuah kontradiksi.

Argumennya adalah sebagai berikut. Jika $\sqrt{2} = m/n$, maka $2 = m^2/n^2$, atau $2n^2 = m^2$. Hal ini berarti m^2 adalah sebuah bilangan bulat. Selanjutnya, m sendiri haruslah merupakan sebuah bilangan bulat, karena kuadrat bilangan ganjil adalah bilangan ganjil. Sehingga $m = 2k$ untuk bilangan bulat k. Mengikuti hal ini $2n^2 = (2k)^2$, atau $n^2 = 2k^2$. Tetapi hal ini berarti n juga merupakan bilangan bulat genap. Sehingga m dan n memiliki sebuah faktor umum 2, berlawanan dengan asumsi bahwa keduanya tidak memiliki faktor umum. Sehingga $\sqrt{2}$ tidak bisa berupa pecahan.

Hal ini tentu mengejutkan, bukan hanya karena argumen filosofis, tetapi juga karena secara matematik, pecahan membentuk bilangan yang padat. Dengan hal ini kita bermaksud antara dua buah pecahan, tidak peduli bagaimana dekatnya, kita selalu bisa menjadikannya yang lain. Sebagai contoh

$$\frac{1}{100} = \frac{2}{200} > \frac{2}{201} > \frac{2}{202} = \frac{1}{101}.$$

Sehingga kita menemukan $\frac{2}{201}$ antara $\frac{1}{100}$ dan $\frac{1}{101}$. Sekarang antara $\frac{1}{100}$ and $\frac{2}{201}$, kita bisa menjadikannya $\frac{4}{401}$, karena

$$\frac{1}{100} = \frac{4}{400} > \frac{4}{401} > \frac{4}{402} = \frac{2}{201}.$$

Proses ini bisa berlanjut ke tak hingga. Sehingga terlihat alami untuk berkesimpulan − seperti yang dilakukan orang Yunani − bahwa bilangan pecahan terdistribusi pada garis bilangan. Tetapi, penemuan bilangan irasional menunjukkan bahwa pecahan, selain kerapatannya, meninggalkan "lubang" sepanjang garis bilangan.

Untuk membawa bilangan irasional ke dalam sistem bilangan kita adalah langkah paling sulit dalam proses generalisasi. Teori bilangan irrasional yang memuaskan baru ditemukan pada tahun 1872 oleh Richard Dedekind (1831 − 1916), yang membuat analisis secara hati-hati dari kontinuitas dan urutan. Untuk membuat himpunan bilangan riil sebuah kontinum, kita memerlukan bilangan irasional untuk mengisi "lubang" pada garis bilangan. Sebuah bilangan riil adalah bilangan sebarang yang bisa dituliskan sebagai sebuah desimal. terdapat tiga jenis desimal: berhenti, tidak berhenti tetapi berulang, dan tidak berhenti dan tidak berulang. Dua jenis pertama adalah bilangan rasional, seperti $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{2}{3} = 0.66666\cdots$. Jenis ketiga adalah bilangan irrasional seperti $\sqrt{2} = 1.4142135\cdots$.

Dari sisi praktisnya, kita selalu bisa mendekati sebuah bilangan irasional dengan memotong desimal yang tak berujung. Jika akurasi yang lebih tinggi diperlukan, kita ambil bilangan desimal lebih banyak. Karena desimal sebarang ketika dipotong di suatu tempat menjadi bilangan rasional, hal ini berarti sebuah bilangan irasional bisa dinyatakan dengan deret bilangan rasional dengan akurasi yang bertambah progresif. Hal ini cukup baik bagi kita untuk melakukan operasi matematik dengan bilangan irasional.

1.1.6 Bilangan Imajiner

Kita lanjutkan proses generalisasi. Apakah terdapat persamaan tak terselesaikan? Ya, ada. Sebagai contoh, tidak mungkin untuk menyelesaikan persamaan: $x^2 = -1$. Kuadrat bilangan tidak rasional, tidak irrasional, dan juga bukan sesuatu yang sudah kita temukan selama ini, sama dengan -1. Sehingga kita harus memperluas kelas bilangan yang kita miliki.

Sekarang kita perluas sistem bilangan kita untuk memasukkan solusi persamaan ini, dan memperkenalkan simbol i untuk $\sqrt{-1}$ (insinyur menggunakan simbol j agar tidak ada kebingungan dengan arus). Tentu kita bisa menyebutnya $-\mathrm{i}$ karena tetap merupakan solusi yang baik. Satu-satunya sifat i adalah $\mathrm{i}^2 = -1$. Jelaslah, $x = -\mathrm{i}$ juga memenuhi persamaan $x^2+1 = 0$. Jadi haruslah benar bahwa persamaan sebarang yang bisa kita tuliskan tetap berlaku jika tanda i dirubah. Hal ini dinamakan dengan mengambil konjugat kompleks.

Kita bisa membuat bilangan dengan menjumlahkan i secara berulang, dan mengalikan i dengan bilangan, dan menjumlahkan bilangan lain dan seterusnya, menurut semua aturan yang kita miliki. Dengan cara ini, kita temukan bahwa semua bilangan bisa dituliskan sebagai $a+\mathrm{i}b$, dengan a dan b adalah bilangan riil, yaitu bilangan yang sudah kita definisikan sekarang. Bilangan i dinamakan bilangan imajiner. Bilangan paling umum jelaslah yang berbentuk $a+\mathrm{i}b$ dan disebut bilangan kompleks. Semua hal akan baik-baik saja jika kita tambahkan dan kalikan dua bilangan tersebut. Sebagai contoh

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}. \tag{1.4}$$

Menurut hukum distributif, perkalian dua buah bilangan kompleks didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned}(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) &= ac + a(d\mathrm{i}) + (b\mathrm{i})c + (b\mathrm{i})(d\mathrm{i}) \\ &= ac + (ad)\mathrm{i} + (bc)\mathrm{i} + (bd)\mathrm{ii} = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i},\end{aligned} \tag{1.5}$$

karena $\mathrm{ii} = \mathrm{i}^2 = -1$. Sehingga semua bilangan memiliki bentuk matematik ini.

Kita sering menggunakan satu buah huruf z, untuk menyatakan bilangan kompleks $z = a + b\mathrm{i}$. Suku riil dinyatakan sebagai $\mathrm{Re}(z)$ sedangkan suku imajinernya $\mathrm{Im}(z)$. Dengan notasi ini, $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$. Persamaan $z_1 = z_2$ berlaku jika dan hanya jika

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \quad \text{dan} \quad \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2).$$

Sehingga persamaan sebarang yang melibatkan bilangan kompleks bisa diinterpretasikan sebagai pasangan persamaan riil.

Kompleks konjugat bilangan $z = a + b\mathrm{i}$ biasanya dinotasikan sebagai z^* atau $\bar{z}$ dan diberikan oleh $z^* = a - b\mathrm{i}$. Sebuah hubungan penting adalah perkalian antara bilangan kompleks dengan kompleks konjugatnya adalah bilangan riil

$$zz^* = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2.$$

Dengan hubungan ini, pembagian dua buah bilangan kompleks bisa dituliskan sebagai penjumlahan bagian riil dan bagian imajinernya

$$\frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} \frac{c - d\mathrm{i}}{c - d\mathrm{i}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i}.$$

Contoh 1.1.1. Nyatakan bilangan berikut dalam bentuk $a + b\mathrm{i}$

$$\text{(a) } (6 + 2\mathrm{i}) - (1 + 3\mathrm{i}), \quad \text{(b) } (2 - 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i}), \quad \text{(a) } \left(\frac{1}{2 - 3\mathrm{i}}\right)\left(\frac{1}{1 + \mathrm{i}}\right).$$

Solusi 1.1.1.

$$\text{(a) } (6 + 2\mathrm{i}) - (1 + 2\mathrm{i}) = (6 - 1) + \mathrm{i}(2 - 3) = 5 - \mathrm{i}.$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } (2 - 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) &= 2(1 + \mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) = 2 + 2\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 \\ &= (2 + 3) + \mathrm{i}(2 - 3) = 5 - \mathrm{i}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } \left(\frac{1}{2 - 3\mathrm{i}}\right)\left(\frac{1}{1 + \mathrm{i}}\right) &= \frac{1}{(2 - 3\mathrm{i})(1 + \mathrm{i})} = \frac{1}{5 - \mathrm{i}} \\ &= \frac{5 + \mathrm{i}}{(5 - \mathrm{i})(5 + \mathrm{i})} = \frac{5 + \mathrm{i}}{5^2 - \mathrm{i}^2} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Sejarah mencatat, matematikawan Italia Girolamo Cardano adalah orang pertama yang memikirkan akar kuadrat dari bilangan negatif pada 1545 ketika memecahkan persamaan kuadratik. Tetapi setelah memperkenalkan bilangan imajiner, dia langsung mengatakannya "tidak berguna." Dia memiliki alasan bagus untuk berpikir seperti itu.

Pada waktu Cardano hidup, matematika masih bersinonim dengan geometri. Sehingga persamaan kuadratik $x^2 = mx + c$ dianggap sebagai kendaraan/alat untuk mencari titik potong parabola $y = x^2$ dan garis $y = mx + c$. Untuk sebuah persamaan seperti $x^2 = -1$, garis horizontal $y = -1$ jelas tidak akan memotong parabola $y = x^2$ yang nilainya selalu positif. Ketiadaan titik potong dianggap sebagai alasan kemunculan bilangan imajiner.

Persamaan kubik (pangkat tiga) yang memaksa bilangan kompleks dianggap serius. Untuk kurva kubik $y = x^3$, y bernilai dari $-\infty$ ke ∞. Sebuah garis akan selalu memotong kurva minimal sekali. Pada tahun 1572, Rafael Bombeli memikirkan persamaan

$$x^3 = 15x + 4,$$

yang jelas memiliki solusi $x = 4$. tetapi pada saat itu, persamaan ini bisa diselesaikan dengan prosedur formal ini. Misalkan $x = a + b$, maka

$$x^3 = (a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3,$$

yang bisa dituliskan sebagai

$$x^3 = 3abx + (a^3 + b^3).$$

Persoalan ini akan diselesaikan, jika kita bisa mencari nilai a dan b memenuhi syarat

$$3ab = 15 \quad \text{dan} \quad a^3 + b^3 = 4.$$

Karena $a^3b^3 = 5^3$ dan $b^3 = 4 - a^3$, kita mempunyai

$$a^3(4 - a^3) = 5^3,$$

yang merupakan persamaan kudratik dalam a^3

$$(a^3)^2 - 4a^3 + 125 = 0.$$

Solusi persamaan ini telah diketahui sejak lama

$$a^3 = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{16 - 500}\right) = 2 \pm 11\mathrm{i}.$$

Maka:

$$b^3 = 4 - a^3 = 2 \mp 11\mathrm{i}.$$

Jadi

$$x = a + b = (2 + 11\mathrm{i})^{(1/3)} + (2 - 11\mathrm{i})^{1/3}.$$

Jelaslah interpretasi kemunculan bilangan imajiner tidak memberikan signifikansi persoalan geometri tidak valid. Agar sousinya sama dengan 4, Bombeli mengasumsikan

$$(2 + 11\mathrm{i})^{1/3} = 2 + b\mathrm{i}; \quad (2 - 11\mathrm{i})^{1/3} = 2 - b\mathrm{i}.$$

Untuk menjustifikasi asumsi ini, dia harus menggunakan aturan penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks. Dengan aturan pada (1.4) dan (1.5), bisa dengan mudah ditunjukkan

$$\begin{aligned}(2+b\mathrm{i})^3 &= 8+3(4)(b\mathrm{i})+3(2)(b\mathrm{i})^2+(b\mathrm{i})^3 \\ &= (8-6b^2)+(12b-b^3)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Dengan $b=\pm 1$, dia memperoleh

$$(2\pm 3)^3 = 2\pm 11\mathrm{i},$$

dan

$$x=(2+11\mathrm{i})^{1/3}+(2-11\mathrm{i})^{1/2}=2+\mathrm{i}+2-\mathrm{i}=4.$$

Sehingga dia menemukan persoalan dengan koefisien riil membutuhkan aritmatika kompleks untuk solusinya.

Pekerjaan Bombeli dan lainnya mengenai bilangan kompleks diragukan dan bahkan boleh dibilang memunculkan kebencian hampir selama 250 tahun. Sampai awal abad 19, bilangan kompleks tidak dianggap sebagai bagian sistem bilangan kita. Penerimaan bilangan kompleks oleh ilmuan dimulai ketika Gauss mulai mempublikasikan penelitiannya.

Karl Friedrich Gauss (1777−1855) dari Jerman diberi gelar "pangeran matematika" oleh rekan sejawatnya sebagai penghargaan untuk prestasi yang besar di hampir setiap cabang matematika. Pada usia 22, Gauss dalam buku disertasi doktornya memberikan bukti ketat pertama dari apa yang sekarang kita sebut Teorema Aljabar Fundamental. Ia mengatakan bahwa polinomial derajat n selalu memiliki tepat n akar kompleks. Hal ini menunjukkan bahwa bilangan kompleks tidak hanya diperlukan untuk memecahkan persamaan aljabar umum, tetapi juga cukup. Dengan kata lain, dengan penemuan i, setiap persamaan aljabar bisa dipecahkan. Ini adalah fakta fantastis. Hal ini tentu tidak bisa dibuktikan sendiri. Bahkan, proses pengembangan sistem bilangan kita akan membuat kita berpikir bahwa kita akan harus terus menciptakan bilangan baru untuk memecahkan persamaan belum terpecahkan. Ini adalah sebuah keajaiban bahwa ini tidak terjadi. Dengan penemuan terakhir i, sistem bilangan kita lengkap. Oleh karena itu bilangan sebarang, tidak peduli seberapa rumit itu terlihat, selalu bisa direduksi dengan bentuk $a+b\mathrm{i}$, dengan a dan b adalah bilangan riil.

1.2 Logaritma

1.2.1 Ide Napier

Jarang ide baru diambil begitu cepat oleh seluruh komunitas ilmiah dengan antusiasme seperti penemuan logaritma. Meskipun itu hanya perangkat untuk menyederhanakan perhitungan, dampaknya terhadap perkembangan ilmiah tidak bisa dinyatakan.

Sebelum abad 17 ilmuwan telah menghabiskan banyak waktu untuk melakukan perhitungan numerik. Seorang baron Skotlandia, John Napier (1550 – 1617) berpikir untuk meringankan beban ini ketika ia menulis: "Melihat tidak ada yang merepotkan untuk berlatih matematika dari perkalian, pembagian, kuadrat dan ekstraksi pangkat tiga bilangan yang besar,... Oleh karena itu saya mulai dalam pikiran saya, saya mungkin menghapus hambatan itu." Idenya seperti ini: jika kita bisa menulis bilangan sebarang sebagai pangkat dari bilangan yang diberikan tetap b, (kemudian akan disebut basis), maka perkalian bilangan akan setara penambahan pangkatnya. Dia menyebutnya logaritma pangkat.

Dalam notasi modern, hal ini adalah sebagai berikut

$$b^{x_1} = N_1; \quad b^{x_2} = N_2$$

kemudian dengan definisi

$$x_1 = \log_b N_1; \quad x_2 = \log_b N_2.$$

Jelaslah

$$x_1 + x_2 = \log_b N_1 + \log_b N_2.$$

Karena

$$b^{x_1+x_2} = b^{x_1} b^{x_2} = N_1 N_2$$

dengan definisi lagi

$$x_1 + x_2 = \log_b N_1 N_2.$$

Jelaslah

$$\log_b N_1 N_2 = \log_b N_1 + \log_b N_2.$$

Misalkan kita memiliki sebuah tabel, dengan N dan $\log_b N$ (pangkat x) yang tercantum sisi berdampingan. Untuk mengalikan dua bilangan N_1 dan N_2, kita pertama kali melihat $\log_b N_1$ dan $\log_b N_2$ dalam tabel. Kita kemudian menambahkan dua angka. Berikutnya, menemukan bilangan dalam tabel yang sesuai jumlah, dan membaca mundur untuk memperoleh perkalian $N_1 N_2$.

Dengan cara yang sama, kita bisa menunjukkan

$$\log_b \frac{N_1}{N_2} = \log_b N_1 - \log_b N_2,$$

$$\log_b N^n = n \log_b N, \quad \log_b N^{1/n} = \frac{\log_b N}{n}.$$

Dengan demikian, pembagian bilangan akan setara dengan pengurangan eksponen mereka, menaikkan bilangan untuk pangkat n akan setara dengan mengalikan eksponen dengan n, dan menemukan akar n dari bilangan akan setara dengan membagi eksponen dengan n. Dengan cara ini perhitungan membosankan sangat berkurang.

Sekarang pertanyaannya adalah, dengan basis b apa kita harus menghitung. Sebenarnya tidak ada perbedaan basis yang digunakan, asalkan tidak persis sama dengan 1. Kita bisa menggunakan prinsip yang sama sepanjang waktu. Selain itu, jika kita menggunakan logaritma untuk setiap basis tertentu, kita bisa menemukan logaritma ke basis lainnya hanya dengan mengalikan faktor, setara dengan perubahan skala. Sebagai contoh, jika kita tahu logaritma dari semua bilangan dengan basis b, kita bisa menemukan logaritma dari N dengan basis a. Pertama jika $a = b^x$, kemudian dengan definisi, $x = \log_b a$, karena itu

$$a = b^{\log_b a}. \tag{1.6}$$

Untuk mencari $\log_a N$, pertama misalkan $y = \log_a N$. Dengan definisi $a^y = N$. Dengan a diberikan oleh (1.6), kita mempunyai

$$\left(b^{\log_b a}\right)^y = b^{y \log_b a} = N.$$

Dengan definisi lagi (atau ambil logaritma kedua ruas persamaan)

$$y \log_b a = \log_b N.$$

Jadi

$$y = \frac{1}{\log_b a} \log_b N.$$

Karena $y = \log_a N$, maka:

$$\log_a N = \frac{1}{\log_b a} \log_b N.$$

Ini dikenal sebagai perubahan basis. Memiliki tabel logaritma dengan basis b akan memungkinkan kita untuk menghitung logaritma ke basis lainnya.

Dalam kasus apapun, kuncinya adalah, tentu saja, untuk memiliki sebuah tabel. Napier memilih bilangan sedikit kurang dari satu sebagai basis dan menghabiskan 20 tahun untuk menghitung tabel. Dia menerbitkan tabelnya di 1614. Penemuan ini cepat diadopsi oleh para ilmuwan di seluruh Eropa dan bahkan jauh di Cina. Di antara mereka adalah astronomer Johannes Kepler, yang menggunakan tabel dengan sukses besar dalam perhitungan orbit planet. Perhitungan ini menjadi dasar hukum dinamika klasik Newton dan hukum gravitasinya.

1.2.2 Logaritma Briggs

Henry Briggs (1561-1631), seorang profesor geometri di London, sangat terkesan oleh tabel Napier, ia pergi ke Skotlandia untuk memenuhi penemu besar secara langsung. Briggs menyarankan bahwa tabel dengan basis 10 akan lebih nyaman. Napier langsung setuju. Briggs melakukan tugas perhitungan tambahan. Dia mempublikasikan

Tabel 1.1: Akar kuadrat dari 10

$x\,(\log N)$	$10^x(N)$	$(10^x-1)/x$
1	10.0	9.00
$\frac{1}{2}=0.5$	3.16228	4.32
$(\frac{1}{2})^2=0.25$	1.77828	3.113
$(\frac{1}{2})^3=0.125$	1.33352	2.668
$(\frac{1}{2})^4=0.0625$	1.15478	2.476
$(\frac{1}{2})^5=0.03125$	1.074607	2.3874
$(\frac{1}{2})^6=0.0125625$	1.036633	2.3445
$(\frac{1}{2})^7=0.0078125$	1.018152	2.3234
$(\frac{1}{2})^8=0.000390625$	1.0090350	2.3130
$(\frac{1}{2})^9=0.001953125$	1.0045073	2.3077
$(\frac{1}{2})^{10}=0.00097656$	1.0022511	2.3051
$(\frac{1}{2})^{11}=0.00048828$	1.0011249	2.3038
$(\frac{1}{2})^{12}=0.00024414$	1.0005623	2.3032
$(\frac{1}{2})^{13}=0.00012207$	1.000281117	2.3029
$(\frac{1}{2})^{15}=0.0000305175$	1.000070272	2.3027
$(\frac{1}{2})^{16}=0.0000152587$	1.000035135	2.3026
$(\frac{1}{2})^{17}=0.0000076294$	1.0000175675	2.3036

tabelnya di 1624. Untuk 350 tahun, tabel logaritma dan aturan penggeseran[1] (dibangun dengan prinsip logaritma) adalah alat yang sangat diperlukan setiap ilmuwan dan insinyur.

Logaritma dalam tabel Briggs sekarang dikenal sebagai logaritma biasa. Dalam notasi modern, jika kita menulis $x = \log N$ tanpa menentukan basis, maka basis logaritma itu adalah 10, dan $10^x = N$.

Sekatrang tabel logaritma digantikan oleh kalkulator yang ada di tangan, tetapi fungsi logaritmik tetap menjadi pusat keilmuan matematika.

Hal ini menarik untuk melihat bagaimana logaritma pertama kali dihitung. Selain untuk kepentingan historis, ini akan membantu kita untuk menambah wawasan dalam sistem bilangan kita.

Karena proses menghitung akar kuadrat diketahui, Briggs menghitung akar 10 berulang. Contoh hasilnya diberikan pada Tabel 1.1. Pangkat (x) dari 10 diberikan pada kolom pertama dan hasilnya, 10^x, diberikan pada kolom kedua. Sebagai contoh baris kedua adalah akar dari 10, yaitu $10^{1/2} = \sqrt{10} = 3.16228$. Baris ketiga adalah akar dari akar 10 yaitu $(10^{1/2})^{1/2} = 10^{1/4} = 1.77828$. Dan begitu seterusnya, kita memperoleh deret akar kuadrat dari 10. Dengan kalkulator, kita bisa dengan mudah memverifikasi hasilnya.

[1] diterjemahkan dari *slide rule*.

Di dalam tabel kita perhatikan bahwa ketika 10 dipangkatkan dengan bilangan yang sangat kecil, kita memperoleh 1 ditambah sebuah bilangan kecil. Selanjutnya, bilangan kecil yang ditambahkan ke 1 tampak seperti kita membagi dengan 2 setiap kali kita mengambil akar kuadrat. Dengan kata lain, terlihat ketika x sangat kecil, $10^x - 1$ sebanding dengan x. Untuk mencari konstanta kesebandingan, kita menuliskan $(10^x - 1)/x$ pada kolom 3. Pada bagian atas tabel, perbandingan ini tidaklah sama, tetapi semakin ke bawah, nilainya semakin dekat dan dekat sebuah nilai konstan. Untuk akurasi 5 buah digit signifikan, konstanta kesebandingan sama dengan 2.3026. Sehingga kita menemukannya ketika s sangat kecil

$$10^s = 1 + 2.3026s. \tag{1.7}$$

Briggs menghitung 27 berturut-turut akar kuadrat dari 10, dan menggunakan (1.7) untuk memperoleh 27 akar kuadrat yang lain.

Karena $10^x = N$ berarti $x = \log N$, kolom pertama pada Tabel 1.1 juga merupakan logaritma dari bilangan pada kolom kedua. Sebagai contoh, baris kedua adalah akar kuadrat dari 10, yaitu $10^{1/2} = 3.16228$. Kemudian dari definisi, kita tahu

$$\log(3.16228) = 0.5.$$

Jika kita ingin tahu logaritma bilangan N tertentu, dan N tidak tepat sama dengan salah satu yang ada pada kolom kedua, kita harus memisahkan N sebagai hasil perkalian bilangan yang berupa isi tabel. Sebagai contoh, kita ingin mengetahui logaritma 1.2. Hal yang kita lakukan adalah sebagai berikut. Misalkan $N = 1.2$, dan kita akan mencari sebuah deret n_i dari kolom 2 sedemikian rupa sehingga

$$N = n_1 n_2 n_3 \cdots .$$

Karena semua n_i lebih besar dari 1, sehingga $n_i < N$. Bilangan pada kolom 2 yang paling dekat dengan 1.2 memenuhi syarat ini adalah 1.15478, sehingga kita memilih $n_1 = 1.15478$, dan kita mempunyai

$$\frac{N}{n_1} = \frac{1.2}{1.15478} = 1.039159 = n_2 n_3 \cdots .$$

Bilangan yang lebih kecil dan paling dekat dengan 1.039159 adalah 1.036633. Sehingga kita memilih $n_2 = 1.036633$, jadi

$$\frac{N}{n_1 n_2} = \frac{1.039159}{1.036633} = 1.0024367.$$

Dengan $n_3 = 1.0022511$, kita mempunyai

$$\frac{N}{n_1 n_2 n_3} = \frac{1.0024367}{1.0022511} = 1.0001852.$$

Rencana yang dilakukan adalah melanjutkan cara ini sampai ruas kanan sama dengan satu. Tetapi, cepat atau lambat, ruas kanan akan jauh di bawah tabel dan tidak sama dengan satu. Dalam kasus tertentu, kita bisa turun ke bawah beberapa langkah. Tetapi untuk ilustrasi, marilah kita berhenti di sini. Sehingga

$$N = n_1 n_2 n_3 (1 + \Delta n),$$

dengan $\Delta n = 0.0001852$. Sekarang

$$\log N = \log n_1 + \log n_2 + \log n_3 + \log(1 + \Delta n).$$

Suku pada ruas kanan, kecuali yang terakhir, bisa dibaca dari tabel. Untuk suku terakhir, kita akan menggunakan (1.7). Dengan definisi, jika s sangat kecil, (1.7) bisa dituliskan

$$s = \log(1 + 2.3026s).$$

Misalkan $\Delta n = 2.3026s$, sehingga $s = \frac{\Delta n}{2.3026} = \frac{0.0001852}{2.3026} = 8.04 \times 10^{-5}$. Diperoleh:

$$\log(1 + \Delta n) = \log\left[1 + 2.3026(8.04 \times 10^{-5})\right] = 8.04 \times 10^{-5}.$$

Dengan $\log n_1 = 0.0625,\ \log n_2 = 0.015625,\ \log n_3 = 0.0009765$ dari tabel, kita sampai pada

$$\log(1.2) = 0.0625 + 0.015625 + 0.0009765 + 0.0000804 = 0.0791819.$$

Nilai dari log(1.2) haruslah 0.0791812. Jelaslah jika kita memiliki tabel yang lebih besar kita bisa memiliki digit yang akurat sesuai keinginan kita. Dengan cara ini Briggs menghitung logaritma sampai 16 desimal kemudian untuk publikasi hanya mencantumkan 14, sehingga tidak ada kesalahan. Dengan sedikit perbaikan, tabel Briggs menjadi dasar semua tabel logaritmik lain selama 300 tahun.

1.3 Bilangan e

1.3.1 Sifat Unik e

Persamaan (1.7) memberikan satu sifat sangat menarik dalam sistem bilangan kita. Jika kita misalkan $t = 2.3026s$, maka untuk t yang sangat kecil, (1.7) menjadi

$$10^{\frac{t}{2.3026}} = 1 + t. \tag{1.8}$$

Untuk menyederhanakan penulisan, marilah kita notasikan

$$10^{\frac{1}{2.3026}} = \mathrm{e}. \tag{1.9}$$

Sehingga (1.8) mengatakan jika e dipangkatkan dengan sebuah bilangan kecil, maka nilainya sama dengan satu ditambah pangkat kecil tersebut

$$\mathrm{e}^t = 1 + t \quad \text{untuk} \quad t \to 0. \tag{1.10}$$

Karena hal ini, turunan e^x adalah dirinya sendiri.

Ingat definisi turunan sebuah fungsi

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta\ x}.$$

Jadi

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x} - \mathrm{e}^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Sekarang Δx mendekati nol sebagai sebuah limit, yang sangat kecil, sehingga kita bisa menuliskan (1.10) sebagai:

$$\mathrm{e}^{\Delta x} = 1 + \Delta x.$$

Jadi

$$\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{e}^x(1 + \Delta x - 1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^x.$$

Sehingga

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x. \tag{1.11}$$

Fungsi e^x (yang dituliskan sebagai $\exp(x)$) disebut sebagai fungsi eksponen alami (natural), atau sederhananya fungsi eksponen. Bukan hanya fungsi eksponen sama dengan turunannya, ini adalah satu-satunya fungsi (terpisah dari konstanta perkalian) yang memiliki sifat ini. Karena hal ini, fungsi eksponen memainkan peranan pusat dalam matematika dan ilmu alam.

1.3.2 Logaritma Natural

Jika $\mathrm{e}^y = x$ maka dengan definisi

$$y = \log_{\mathrm{e}} x.$$

Logaritma dengan basis e dikenal sebagai logaritma natural. Fungsi ini sangat sering dijumpai dalam matematika dan aplikasinya. Sehingga kita berikan simbol khusus. Kita menuliskannya sebagai $\ln x$. Yaitu

$$y = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x.$$

Jadi

$$\mathrm{e}^{\ln x} = x.$$

Lebih dari itu

$$\ln \mathrm{e}^x = x \ln \mathrm{e} = x.$$

Dengan cara ini, fungsi eksponen dan logaritma natural adalah invers masing-masing.

Contoh. 1.3.1. Carilah nilai $\ln 10$.
Solusi. 1.3.1. Karena

$$10^{\frac{1}{2.3026}} = \mathrm{e}, \quad \Rightarrow \quad 10 = \mathrm{e}^{2.3026}$$

diperoleh

$$\ln 10 = \ln \mathrm{e}^{2.3026} = 2.3026.$$

Turunan $\ln x$ memiliki sifat khusus

$$\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$
$$\ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Sekarang (1.10) bisa dituliskan sebagai

$$t = \ln(1 + t)$$

untuk nilai t yang sangat kecil. Karena Δx mendekati nol sebagai sebuah limit, untuk x tetap, $\frac{\Delta x}{x}$ bisa kita buat sekecil mungkin sesuai keinginan kita. Sehingga kita bisa memilih $\frac{\Delta x}{x} = t$ dan menyimpulkan

$$\frac{\Delta x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Jadi

$$\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{x}.$$

Hal ini berarti

$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

atau

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + c, \tag{1.12}$$

dengan c adalah konstanta integrasi. Hal ini dikenal karena

$$\frac{\mathrm{d}x^{n+1}}{\mathrm{d}x} = (n + 1)x^n,$$

kita mempunyai

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{(n + 1)} + c.$$

Rumus ini berlaku untuk semua nilai n kecuali untuk $n = -1$, karena penyebutnya $n + 1$ adalah nol. Hal ini dulu menjadi persoalan yang sulit, tetapi sekarang kita melihat (1.12) adalah solusi dari persoalan ini.

Dalam banyak fenomena, dari pertumbuhan populasi sampai peluruhan radioaktif, dengan laju perubahan kuantitas sebanding dengan kuantitasnya sendiri. Fenomena ini diberikan oleh persamaan diferensial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky,$$

dan integralkan kedua ruas untuk memperoleh

$$\ln y = kt + c, \quad \text{atau} \quad y = \mathrm{e}^{kt+c} = \mathrm{e}^{kt}\mathrm{e}^{c}.$$

Jika y_0 adalah nilai y ketika $t = 0$, maka $y_0 = \mathrm{e}^c$ dan

$$y = y_0\mathrm{e}^k t.$$

Persamaan ini dikenal sebagai hukum perubahan eksponensial.

1.3.3 Aproksimasi Nilai e

Bilangan e sangatlah penting, tetapi berapa nilai numeriknya, yang kita miliki selama ini didefinisikan sebagai $10^{1/2.3025}$? Kita bisa menggunakan tabel akar kuadrat 10 berturut-turut untuk mencari nilai ini. Pangkat dari 10 diberikan pada kolom pertama Tabel 1.1. Jika kita menemukan deret bilangan $n_1,\ n_2,\ n_3 \cdots$ pada kolom ini, sedemikian rupa sehingga

$$\frac{1}{2.3026} = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots ,$$

maka

$$10^{\frac{1}{2.3026}} = 10^{n_1+n_2+n_3+\cdots} = 10^{n_1}10^{n_2}10^{n_3}\cdots .$$

Kita bisa membaca dari kolom kedua tabel 10^{n_1} dan 10^{n_2} dan 10^{n_3} dan seterusnya, dan kalikan bersama-sama. Mari kita lakukan

$$\begin{aligned}\frac{1}{2.3026} = 0.43429 = &\ 0.25 + 0.125 + 0.031125 + 0.015625 \\ &+ 0.0078125 + 0.00390625 + 0.00048828 + 0.00012207 \\ &+ 0.000061035 + 0.000026535.\end{aligned}$$

Dari tabel kita peroleh $10^{0.25} = 1.77828$, $10^{0.125} = 1.33352, \cdot$ dan lainnya, kecuali untuk suku terakhir kita gunakan (1.7). Jadi

$$\begin{aligned}\mathrm{e} = 10^{\frac{1}{2.3026}} = &\ 1.77828 \times 1.33352 \times 1.074602 \times 1.0366633 \times 1.018152 \\ &\times 1.009035 \times 1.0011249 \times 1.000281117 \times 1.000140548 \\ &\times (1 + 2.3026 \times 0.000026535) = 2.71826.\end{aligned}$$

Karena $\frac{1}{2.3026}$ hanya akurat untuk 5 digit signifikan, kita tidak bisa berharap hasil kita lebih akurat dari itu. (Hasil akuratnya adalah $2.71828\cdots$). Sehingga yang kita bisakan adalah aproksimasi. Apakah terdapat definisi yang lebih tepat dari e? Jawabannya adalah ya, yang akan kita bicarakan berikut.

1.4 Fungsi Eksponen sebagai Deret Tak Hingga

1.4.1 Bunga Majemuk

Asal muasal bilangan e tidak begitu jelas. Keberadaan bilangan khusus ini bisa diperoleh dari tabel logaritmik seperti yang telah kita lakukan. Faktanya terdapat petunjuk tak langsung pada e dalam tabel Napier edisi kedua. Tetapi paling mungkin adalah sifat khusus bilangan e diperhatikan lebih awal dalam hubungannya dengan bunga majemuk.

Jumlah uang yang diinvestasikan pada x persen bunga tahunan (x dinyatakan dalam desimal, sebagai contoh $x = 0.06$ untuk 6%) berarti pada akhir tahun jumlahnya bertambah sebesar $(1 + x)$. Beberapa bank menghitung bunga yang harus dibayar tidak sekali dalam setahun tetapi beberapa kali. Sebagai contoh, jika suku bunga majemuk tahunan x persen setengah tahunan, bank akan menggunakan satu-setengah suku bunga tahunan tiap periode. Jadi, jika P adalah jumlah mula-mula, pada akhir setengah tahun, jumlahnya menjadi $P\left(1 + \frac{x}{2}\right)$, dan pada akhir tahun menjadi

$$\left[P\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right]\left(1 + \frac{x}{2}\right) = P\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2.$$

Dalam industri perbankkan kita bisa menemukan semua jenis skema permajemukan, tahunan, setengah tahunan, seperempat tahunan, bulanan, mingguan, bahkan harian. Anggap permajemukan dilakukan n kali dalam setahun, uang pokok P akan berjumlah

$$S = P\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Menarik untuk membaningkan jumlah uang yang dibisakan dari uang pokok setelah satu tahun untuk periode konversi yang berbeda. Tabel 1.2 menunjukkan bahwa jumlah uang yang dibisakan oleh seseorang untuk investasi \$100 yang diinvestasikan dalam satu tahun pada bunga tahunan 6% untuk periode konversi yang berbeda. Hasilnya cukup mengejutkan. Seperti yang kita lihat, uang pokok \$100 dimajemukkan harian atau mingguan akan memberikan hasil yang relatif sama. Tetapi apakah pola ini berlanjut? Apakah mungkin tidak mempedulikan besarnya n, nilai $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n$ akan memberikan nilai yang sama? Untuk menjawab pertanyaan ini, kita harus menggunakan sebuah metode dibandingkan dengan menghitung nilai masing-masing. Untungnya

Tabel 1.2: Keuntungan \$100 yang diinvestasikan selama satu tahun dengan bunga 6% pada periode konversi yang berbeda.

	n	x/n	$100(1+x/n)^n$
Tahunan	1	0.06	106.00
Setengah Tahunan	2	0.03	106.09
Seperempat Tahunan	4	0.015	106.136
Bulanan	12	0.005	106.168
Mingguan	52	0.0011538	106.108
Harian	365	0.0001644	106.183

metode ini ada. Dengan rumus binomial

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n,\end{aligned}$$

kita mempunyai

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= 1 + \left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{n}\right)^2 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{x}{n}\right)^n \\ &= 1 + x + \frac{(1-1/n)}{2!}x^2 + \frac{(1-1/n)(1-2/n)}{3!}x^3 + \cdots \left(\frac{x}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

Sekarang ketika $n \to \infty$, $\frac{k}{n} \to 0$. Jadi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{1.13}$$

menjadi sebuah deret tak hingga. Uji standar untuk konvergensi menunjukkan bahwa ini adalah deret konvergen untuk semua nilai riil x. Dengan kata lain, nilai dari $\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ bernilai pada limit tertentu ketika n naik tanpa batas.

1.4.2 Proses Limit Menyatakan e

Pada awal abad ke 18, Euler menggunakan huruf e untuk merepresentasikan deret (1.13) untuk kasus $x = 1$,

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots. \tag{1.14}$$

Simbol ini, sama seperti simbolnya yang lain seperti i, π, $f(x)$ menjadi diterima secara universal.

Penting untuk memperhatikan ketika kita mengatakan limit $\frac{1}{n}$ ketika $n \to \infty$ adalah nol tidak berarti bahwa n sendiri akan sama dengan 0, faktanya, memang demikian. Sehingga jika kita misalkan $t = \frac{1}{n}$, maka ketika $n \to \infty$, $t \to 0$. Sehingga (1.14) bisa dituliskan sebagai

$$\mathrm{e} = \lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t}.$$

Dengan kata-kata, jika t sangat kecil, maka

$$\mathrm{e}^t = \left[(1+t)^{1/t}\right]^t = 1 + t, \quad t \to 0.$$

Ini adalah persamaan yang sama dengan (1.10). Sehingga e tidak lain adalah bilangan yang dituliskan dengan $10^{1/2.3026}$. Sekarang definisi formal diberikan oleh proses limit

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

yang bisa dituliskan sebagai deret tak hingga seperti pada (1.14). Deret ini konvergen lebih cepat. Dengan tujuh buah suku, ini memberikan 2.71825. Pendekatan ini bisa ditingkatkan dengan menambahkan lebih banyak suku sampai tingkat akurasi yang diinginkan. Karena konvergen monoton, tiap suku tambahan membawanya lebih dekat dengan limit: $2.71828\cdots$.

1.4.3 Fungsi Eksponen e^x

Jika kita pangkatkan e dengan x, kita memiliki

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}.$$

Misalkan $nx = m$ maka $\frac{x}{m} = \frac{1}{n}$. Ketika n menuju ∞, m juga. Sehingga persamaan di atas menjadi

$$\mathrm{e}^x = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Sekarang m bisa berupa bilangan tak bulat, tetapi rumus binomial tetap berlaku untuk pangkat tak bulat (salah satu penemuan awal Isaac Newton). Jadi dengan alasan yang sama dengan (1.13), kita bisa menyatakan fungsi eksponensial sebagai deret tak hingga

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots. \tag{1.15}$$

Dari deret ini nilai numerik e^x diperoleh, beberapa suku pertama cukup untuk memperoleh akurasi yang diinginkan.

Kita telah menunjukkan dalam (1.11) bahwa turunan e^x sama dengan dirinya. Hal ini adalah kasus yang kita tinjau ketika kita mengambil turunan (1.15) suku per suku

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = 0 + 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \mathrm{e}^x.$$

1.5 Penyatuan Aljabar dan Geometri

1.5.1 Rumus Euler

Leonhard Euler (1707 – 1783) dilahirkan di Basel, sebuah kota yang berada di perbatasan antara Swiss, Perancis dan Jerman. Dia adalah salah seorang matematikawan paling besar dan tentu ilmuan dengan karya paling banyak. Hasil karyanya yang banyak sekali mengisi paling tidak 70 volum (edisi). Pada 1771, setelah dia menjadi buta, dia mempublikasikan tiga buah volum tentang optik. Sekitar 40 tahun setelah kematiannya, Akademi St. Petersburg masih terus mempublikasikan manuskripnya. Euler bermain dengan rumus layaknya seorang anak kecil bermain dengan mainannya, membuat semua jenis substitusi sampai dia memperoleh sesuatu yang menarik. Dan sering, hasilnya sensasional.

Dia mengambil deret tak hingga dari e^x, dan kemudian dia menggantikan variabel riil x pada (1.15) dengan $\mathrm{i}\theta$ sehingga memperoleh

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 + \mathrm{i}\theta + \frac{(\mathrm{i}\theta^2)}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)}{3!} + \frac{(\mathrm{i}\theta)^4}{4!} + \cdots .$$

Karena $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -i$, $\mathrm{i}^4 = 1$ dan seterusnya, persamaan ini menjadi

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 + \mathrm{i}\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots .$$

Dia kemudian mengganti urutan suku-sukunya, mengumpulkan semua suku riil terpisah dari semua suku imajiner dan hasil deretnya adalah

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \left(+\mathrm{i}\theta - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \right) + \mathrm{i}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots \right).$$

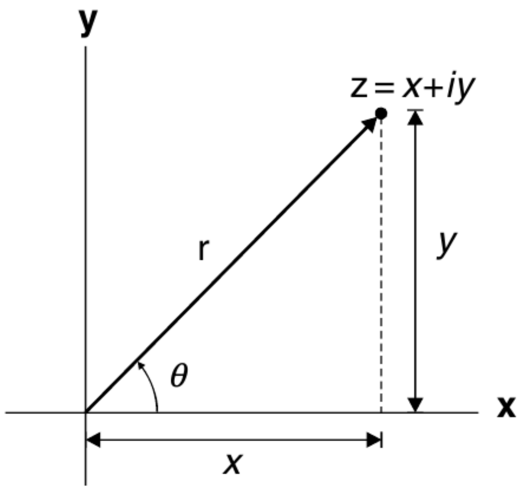
Pada saat itu, dua buah deret yang ada di dalam kurung sudah diketahui sebagai deret pangkat fungsi trigonometri dari $\cos\theta$ dan $\sin\theta$. Sehingga Euler memperoleh rumus (1.2)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,$$

yang menghubungkan fungsi eksponensial dengan trigonometri biasa.

Euler bermain deret tak hingga tanpa aturan yang ketat. Mengumpulkan semua suku riil terpisah dengan suku imajiner, dia mengubah urutan suku-suku. Melakukan hal ini dengan deret tak hingga bisa berbahaya. Ini bisa berakibat jumlahnya, atau sebuah deret konvergen menjadi deret divergen. Tetapi hasil ini sudah melalui semua uji konvergensi.

Euler menurunkan ratusan rumus, tetapi ini adalah salah satu yang paling terkenal. Feynmann menyebutnya perhiasan yang menakjubkan.



Gambar 1.1: Bidang kompleks yang dikenal sebagai diagram Argand. Suku riil sepanjang sumbu x, sedangkan suku imajiner sepanjang sumbu y.

1.5.2 Bidang Kompleks

Penerimaan bilangan kompleks sebagai anggota yang bisa dipercaya dari sistem bilangan kita terbantu sekali oleh realisasi bahwa bilangan kompleks bisa diberikan oleh interpretasi geometrik yang sederhana. Dalam sistem koordinat dua dimensi Cartesian, sebuah titik dinyatakan dengan komponen x dan y. Jika kita menginterpretasikan sumbu x dan y sebagai sumbu riil dan imajiner, maka bilangan kompleks $z = x + \mathrm{i}y$ direpresentasikan oleh titik (x, y). Posisi horizontal titik tersebut adalah x, posisi vertikalnya adalah y, seperti pada Gambar 1.1. Kita bisa menjumlahkan dan mengurangi bilangan kompleks secara terpisah yaitu menjumlahkan atau mengurangi komponen riil dan imajinernya. Ketika kita berpikir dengan cara ini, bidangnya dinamakan bidang kompleks atau bidang Argand.

Representasi grafik ini diusulkan secara terpisah sekitar tahun 1880 oleh Wessel dari Norwegia, Argand dari Perancis dan Gauss. Publikasi oleh Wessel dan Argand tidak terperhatikan, tetapi reputasi Gauss meyakinkan diseminasi secara luas dan penerimaan bilangan kompleks sebagai titik pada bidang kompleks.

Pada saat interpretasi ini diusulkan, rumus Euler (1.2) sudah dikenal selama 50 tahun. Ini mungkin memainkan peranan sebagai petunjuk utama usul ini. Interpretasi geometrik bilangan kompleks jelas konsisten dengan rumus Euler. Kita bisa menurunkan rumus Euler dengan menyatakan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sebagai titik pada bidang kompleks.

Karena bilangan kompleks paling umum memiliki bentuk suku riil ditambah suku imajiner, marilah kita nyatakan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sebagai

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = a(\theta) + \mathrm{i}b(\theta). \tag{1.16}$$

Perhatikan bahwa suku riil a dan suku imajiner b haruslah berupa fungsi dari θ. Di sini θ adalah bilangan riil. Mengubah i dengan $-$i, pada dua ruas persamaan ini, kita memperoleh konjugasi kompleks

$$\mathrm{e}^{\text{-1}\theta} = a(\theta) - \mathrm{i}b(\theta).$$

Karena

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^0 = 1$$

diperoleh

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 + b^2 = 1.$$

Selanjutnya

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{i}(a+\mathrm{i}b) = \mathrm{i}a - b$$

tetapi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}a + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}b = a' + \mathrm{i}b',$$

dengan menyamakan suku riil dengan suku riil dan suku imajiner dengan suku imajiner pada dua buah persamaan terakhir, kita mempunyai

$$a' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}a = -b, \quad b' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}b = a.$$

Sehingga

$$a'b = -b^2, \quad b'a = a^2$$

dan

$$b'a - a'b = a^2 + b^2 = 1.$$

Sekarang misalkan $a(\theta)$ merepresentasikan absis (koordinat$-x$) dan $b(\theta)$ merepresentasikan ordinat (koordinat$-y$) sebuah titik pada bidang kompleks seperti pada Gambar 1.2. Misalkan α adalah sudut antara sumbu$-x$ dan vektor dari titik asal sampai titik yang ditinjau. Karena panjang vektor ini diberikan oleh teorema Pythagorean

$$r^2 = a^2 + b^2 = 1,$$

jelaslah

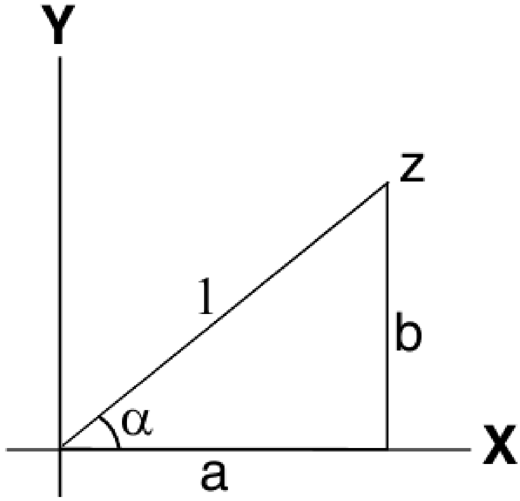
$$\cos\alpha \frac{a(\theta)}{1} = a(\theta), \quad \sin\alpha = \frac{b(\theta)}{1} = b(\theta), \quad \tan\alpha = \frac{b(\theta)}{a(\theta)}. \tag{1.17}$$

Sekarang

$$\frac{\mathrm{d}\tan\alpha}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\tan\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{a\theta} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta},$$

tetapi

$$\frac{\mathrm{d}\tan\alpha}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b'a - a'b}{a^2} = \frac{1}{a^2}.$$



Gambar 1.2: Diagram Argand sebuah bilangan kompleks $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = a + ib$. Jarak antara titik asal dengan titik (a, b) haruslah 1.

Jelaslah dari dua persamaan

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta} = 1.$$

Dengan kata lain

$$\alpha = \theta + c.$$

Untuk menentukan konstanta c, marilah kita lihat kasus $\theta = 0$. Karena $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1 = a + ib$ berarti $a = 1$ dan $b = 0$, dalam kasus ini jelaslah dari diagram bahwa $\alpha = 0$. Sehingga c haruslah sama dengan nol, jadi

$$\alpha = \theta.$$

Dari (1.17) diperoleh:

$$\alpha(\theta) = \cos\alpha = \cos\theta, \quad b(\theta) = \sin\alpha = \sin\theta.$$

Jika kita masukkan lagi pada (1.16), kita peroleh kembali

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Perhatikan bahwa kita telah menurunkan rumus Euler tanpa ekspansi deret. Sebelumnya kita telah menurunkan rumus ini dengan perilaku aljabar murni. Sekarang kita melihat bahwa $\cos\theta$ dan $\sin\theta$ adalah fungsi sinus dan cosinus yang secara alami didefinisikan dalam geometri. Hai ini adalah penyatuan antara aljabar dan geometri.

Diperlukan 250 tahun untuk matematikawan agar nyaman dengan bilangan kompleks. Ketika sudah diterima penuh, teori yang lebih tinggi tentang variabel kompleks lebih cepat dibuat. Dalam waktu relatif pendek 40 tahun, Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) dari Perancis dan Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) membangun teori yang indah tentang fungsi kompleks, yang akan kita pelajari dalam Bab 2.

Dalam bab pendahuluan ini, kita telah menyajikan beberapa hal bahwa struktur logika dalam matematika sebagai sesuatu yang menarik sama dengan pemikiran manusia yang lain. Sekarang kita harus meninggalkan sejarah karena ruang kita terbatas.

1.6 Bentuk Polar Bilangan Kompleks

Dalam koordinat polar (lingkaran) (r, θ), variabel x dan y adalah

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Variabel kompleks z bisa dituliskan sebagai

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.18}$$

Kuantitas r, dikenal sebagai modulus, adalah nilai mutlak z dan diberikan oleh

$$r = |z| = (zz^*)^{1/2} = (x^2 + y^2)^{1/2}.$$

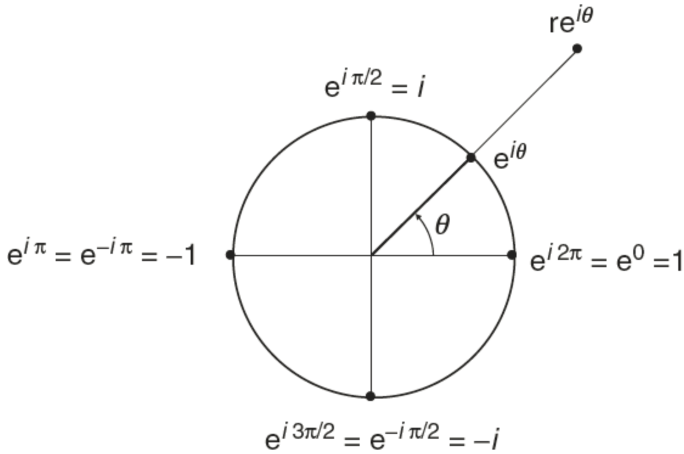
Sudut θ disebut sebagai argumen, atau fase, dari z. Diukur dalam radian, diberikan oleh

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

Jika z berada pada kuadran kedua atau ketiga, kita harus menggunakan persamaan ini dengan hati-hati. Dalam kuadran kedua, $\tan\theta$ nilainya negatif, tetapi dalam kalkulator atau kode komputer, sebuah arctangen negatif diinterpretasikan sebagai sudut pada kuadran keempat. Dalam kuadran ketiga, $\tan\theta$ nilainya positif, tetapi kalkulator akan menginterpretasikan sebuah arctangen positif sebagai sebuah sudut dalam kuadran pertama. Karena sebuah sudut ditentukan oleh nilai sinus dan cosinusnya, θ ditentukan oleh pasangan persamaan

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Tetapi dalam prakteknya kita biasa menghitung $\tan^{-1}(y/x)$ dan mencocokkan persoalan kuadran dengan menambah atau mengurangi dengan π. Karena identifikasinya sebagai sebuah sudut, θ hanya terdefinisi dengan sebuah bilangan bulat dikalikan 2π. Kita harus menggunakan pilihan biasa untuk batasan θ pada selang $0 \le \theta < 2\pi$ sebagai nilai utama. Tetapi dalam kode komputer nilai utama biasanya dipilih dalam selang $-\pi \le \theta < \pi$.



Gambar 1.3: Bentuk polar bilangan kompleks. Lingkaran satuan dalam bidang kompleks dinyatakan dengan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Secara umum bilangan kompleks diberikan oleh $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Persamaan (1.18) dikenal sebagai bentuk polar z. Jelas terlihat bahwa, kompleks konjugat z dalam bentuk polar adalah

$$z^*(r,\theta) = z(r,-\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Dalam bidang kompleks, z^* adalah pencerminan z sepanjang sumbu$-x$. Akan sangat bermanfaat untuk mengingat bidang kompleks. Ketika θ membesar, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ mendeskripsikan sebuah lingkaran satuan dalam bidang kompleks seperti pada Gambar 1.3. Untuk sampai pada bilangan kompleks secara umum z, kita harus mengambil vektor satuan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ yang mengarah pada z dan menariknya sepanjang $|z| = r$.

Kita biasa mengalikan atau membagi bilangan kompleks dalam bentuk polar. Misalkan

$$z_1 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad z_2 = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$$

maka

$$z_1 z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\right],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\right].$$

1.6.1 Akar dan Pangkat Bilangan Kompleks

Untuk memperoleh pangkat ke-n sebuah bilangan kompleks, kita memangkatkan modulus dengan n dan mengalikan sudut fase dengan n

$$z^n = (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta).$$

Rumus ini berlaku untuk bilangan bulat positif maupun negatif. Tetapi jika n adalah bilangan pecahan, kita harus berhati-hati menggunakan rumus ini. Sebagai contoh, kita bisa mengartikan $z^{1/4}$ sebagai akar keempat dari z. Dengan kata lain, kita ingin mencari sebuah bilangan yang dipangkatkan 4 sama dengan z. Marilah kita gunakan $z = 1$. Jelaslah

$$\begin{aligned}
1^4 &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}0})^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1, \\
\mathrm{i}^4 &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right)^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1, \\
(-1)^4 &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi} = 1, \\
(-\mathrm{i})^4 &= \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2}\right)^4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}6\pi} = 1.
\end{aligned}$$

Sehingga terdapat empat buah jawaban

$$1^{1/4} = \begin{cases} 1, \\ \mathrm{i}, \\ -1, \\ -\mathrm{i}. \end{cases}$$

Perkalian akar berkaitan dengan cara berbeda untuk menyatakan 1 dalam bentuk polar: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi}$, dsb. Sehingga untuk menghitung seluruh akar ke$-n$ dari z, kita harus menyatakan z sebagai

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta + \mathrm{i}k2\pi}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

dan

$$z^{\frac{1}{n}} =^n \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n + \mathrm{i}k2\pi/n} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

Alasan bahwa k berhenti pada $n-1$ adalah karena ketika k mencapai n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi/n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 1$ dan akarnya merepresentasikan dirinya sendiri. Sehingga terdapat n akar yang berbeda.

Secara umum, jika n dan m adalah bilangan bulat positif yang tidak memiliki faktor bersama, maka

$$z^{m/n} = \sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)} = \sqrt[n]{|z|^m}\left[\cos\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)\right],$$

dengan $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ dan $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

Contoh 1.6.1. Nyatakan $(1+\mathrm{i})^8$ dalam bentuk $a + b\mathrm{i}$.
Solusi 1.6.1. Misalkan $z = (1+\mathrm{i}) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, dengan

$$r = (zz^*)^{1/2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

Diperoleh:

$$(1+\mathrm{i})^8 = z^8 = r^8\mathrm{e}^{\mathrm{i}8\theta} = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = 16.$$

Contoh 1.6.2. Nyatakan rumus berikut dalam bentuk $a + b\mathrm{i}$:

$$\frac{(\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\mathrm{i})^6}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^3}.$$

Solusi 1.6.2. Marilah kita nyatakan

$$z_1 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right) = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$$

$$z_2 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$$

dengan

$$r_1 = (z_1 z_1^*)^{1/2} = 3, \quad \theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6},$$

$$r_2 = (z_2 z_2^*)^{1/2} = \sqrt{5}, \quad \theta_2 = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Maka

$$\frac{(\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\mathrm{i})^6}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^3} = \frac{z_1^6}{z_2^*} = \frac{\left(3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}\right)^6}{\left(\sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right)^3} = \frac{3^6 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{\left(\sqrt{5}\right)^3 \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}}$$

$$= \frac{729}{5\sqrt{5}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - 3\pi/4)} = \frac{729}{5\sqrt{5}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$$

$$= \frac{729}{5\sqrt{5}} \left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{729}{5\sqrt{10}}(1 + \mathrm{i}).$$

Contoh 1.6.3. Carilah semua akar tiga dari 8.

Solusi 1.6.3. Nyatakan 8 sebagai bilangan kompleks z dalam bidang kompleks

$$z = 8\mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

Jadi

$$z^{1/3} = (8)^{1/3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi/3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$z^{1/3} = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 2, & k = 0, \\ 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k2\pi/3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, & k = 1, \\ 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k4\pi/3} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, & k = 2. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa tiga buah akar berada pada sebuah lingkaran dengan jari-jari 2 berpusat pada titik asal. Tiga akar tersebut terpisah 120°.

Contoh 1.6.4. Carilah semua akar tiga dari $\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$.
Solusi 1.6.4. Bentuk polar dari $\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$ adalah

$$\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4+\mathrm{i}k2\pi}.$$

Akar tiga dari $\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$ diberikan oleh

$$z^{1/3} = \begin{cases} (2)^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12} = (2)^{1/3}(\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}), & k=0, \\ (2)^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/12+2\pi/3)}(2)^{1/3}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}), & k=1. \\ (2)^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/12+4\pi/3)}(2)^{1/3}(\cos\frac{17\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12}), & k=2. \end{cases}$$

Lagi tiga buah akar berada pada lingkaran yang sama terpisah 120°.

Contoh 1.6.5. Carilah semua nilai z yang memenuhi persamaan $z^4 = -64$.
Solusi 1.6.5. Nyatakan 64 sebagai sebuah titik pada bidang kompleks

$$-64 = 64\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}k2\pi}, \quad k = 0,1,2,\cdots.$$

Diperoleh:

$$z = (-64)^{1/4} = (64)^{1/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}, \quad k=0,1,2,3,$$

$$z = \begin{cases} 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) = 2+2\mathrm{i}, & k=0, \\ 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}) = 2+2\mathrm{i}, & k=1, \\ 2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}) = -2-2\mathrm{i}, & k=2, \\ 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}) = -2-2\mathrm{i}, & k=3. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa empat buah akar berada pada satu lingkaran berjari-jari $\sqrt{8}$ berpusat di titik asal yang terpisah 90°.

Contoh 1.6.6. Carilah semua nilai dari $(1-\mathrm{i})^{3/2}$.
Solusi 1.6.6.

$$(1-\mathrm{i}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \theta = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$
$$(1-\mathrm{i})^3 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta+\mathrm{i}k2\pi}, \quad k=0,1,2,\cdots$$
$$(1-\mathrm{i})^{3/2} = \sqrt[4]{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3\theta+\mathrm{i}k\pi)}, \quad k=0,1.$$

$$(1-\mathrm{i})^{3/2} = \begin{cases} \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right], & k=0, \\ \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right], & k=1. \end{cases}$$

1.6.2 Trigonometri dan Bilangan Kompleks

Sebagian besar identitas trigonometrik paling elegan dibuktikan dengan bilangan kompleks. Sebagai contoh, dengan mengambil konjugat kompleks dari rumus Euler

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^* = (\cos + \mathrm{i}\sin\theta)^*,$$

kita mempunyai

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta.$$

Jika kita menuliskan persamaannya sebagai

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)} = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta).$$

Dengan membandingkan dua buah persamaan terakhir, kita mempunyai

$$\begin{aligned}\cos(-\theta) &= \cos(\theta),\\ \sin(-\theta) &= -\sin(\theta),\end{aligned}$$

yang konsisten dengan apa yang kita ketahui tentang fungsi sinus dan cosinus dalam trigonometri.

Jika kita jumlahkan dan kurangi $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ dan $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, kita peroleh

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) + (\cos - \mathrm{i}\sin\theta) = 2\cos\theta,\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) - (\cos - \mathrm{i}\sin\theta) = 2\mathrm{i}\cos\theta,\end{aligned}$$

Dengan menggunakannya kita bisa dengan mudah menyatakan pangkat dari sinus maupun cosinus dalam $\cos n\theta$ dan $\sin n\theta$. Sebagai contoh dengan $n = 2$, kita mempunyai

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\text{-}1\theta})\right]^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta})\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\right] = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \left[\frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\text{-}1\theta})\right]^2 = -\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta})\\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\right] = \frac{1}{2}(-\cos 2\theta + 1).\end{aligned}$$

Untuk mencari sebuah identitas $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ dan $\sin(\theta_1 + \theta_2)$, kita bisa melihatnya sebagai komponen dari $\exp[\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)]$. Karena

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2),$$

dan

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= [\cos\theta_1 + i\sin\theta_1][\cos\theta_2 + i\sin\theta_2] \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \end{aligned}$$

dengan menyamakan suku riil dan suku imajiner, kita peroleh

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2,$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2.$$

Dari dua buah persamaan ini

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2}.$$

Jika kita bagi pembilang dan penyebutnya dengan $\cos\theta_1\cos\theta_2$ diperoleh

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\theta_2}.$$

Rumus ini bisa diturunkan langsung dengan bilangan kompleks. Misalkan z_1 dan z_2 adalah dua buah titik dalam bidang kompleks dengan komponen x sama dengan 1

$$z_1 = 1 + iy_1 = r_1e^{i\theta_1}, \quad \tan\theta_1 = \frac{y_1}{1} = y_1,$$
$$z_2 = 1 + iy_2 = r_2e^{i\theta_2} \quad \tan\theta_2 = \frac{y_2}{1} = y_2.$$

Hasil perkalian keduanya

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \quad \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\mathrm{Im}(z_1z_2)}{\mathrm{Re}(z_1z_2)}.$$

Tetapi

$$z_1z_2 = (1 + iy_1)(1 + iy_2) = (1 - y_1y_2) + i(y_+y_2),$$

jadi

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\mathrm{Im}(z_1z_2)}{\mathrm{Re}(z_1z_2)} = \frac{y_1 + y_2}{1 - y_1y_2} = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\tan_2}.$$

Identitas-identitas ini tentu bisa dibuktikan secara geometrik, tetapi secara aljabar, akan lebih mudah dibuktikan dengan bilangan kompleks.

Contoh 1.6.7. Buktikan rumus De Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Solusi 1.6.7. Karena $(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}$, diperoleh

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\sin\theta)^n &= (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \\ &= \cos n\theta + i\sin n\theta. \end{aligned}$$

Teorema ini dipublikasikan pada 1707 oleh Abraham De Moivre, matematikawan Perancis yang hidup di London.

Contoh 1.6.8. Gunakan teorema De Moivre dan rumus binomial untuk menyatakan $\cos 4\theta$ dan $\sin 4\theta$ dalam suku pangkat dari $\cos\theta$ dan $\sin\theta$.
Solusi 1.6.8.

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + \mathrm{i}\sin 4\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\theta} &= (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^4 = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^4 \\ &= \cos^4\theta + 4\cos^3\theta(\mathrm{i}\sin\theta) + 6\cos^2\theta(\mathrm{i}\sin\theta)^2 \\ &\quad + 4\cos\theta(\mathrm{i}\sin\theta)^3 + (\mathrm{i}\sin\theta)^4 \\ &= (\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) \\ &\quad + \mathrm{i}(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta).\end{aligned}$$

Dengan menyamakan suku riil dan imajinernya diperoleh

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta, \\ \sin 4\theta &= 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta,\end{aligned}$$

Contoh 1.6.9. Nyatakan $\cos^4\theta$ dan $\sin^4\theta$ sebagai perkalian dari θ.
Solusi 1.6.9.

$$\begin{aligned}\cos^4\theta &= \left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\right]^4 \\ &= \frac{1}{16}\left[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\theta}) + 4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}) + 6\right] \\ &= \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^4\theta &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\right]^4 \\ &= \frac{1}{16}\left[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\theta}) - 4(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}) + 6\right] \\ &= \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Contoh 1.6.10. Tunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) &= \cos\theta_1\cos_2\cos_3 - \sin\theta_1\sin_2\cos_3 \\ &\quad - \sin\theta_1\sin\theta_3\cos_2 - \sin\theta_2\sin\theta_3\cos_1, \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) &= \sin\theta_1\cos_2\cos_3 + \sin\theta_2\cos_1\cos_3 \\ &\quad + \sin\theta_3\cos\theta_1\cos_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\sin_3\,.\end{aligned}$$

Solusi 1.6.10.

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3}&=(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\theta_2)(\cos\theta_3+\mathrm{i}\theta_3)\\&=\cos\theta_1(1+\mathrm{i}\tan\theta_1)\cos\theta_2(1+\mathrm{i}\tan\theta_2)\cos_3(1+\mathrm{i}\tan\theta_3).\end{aligned}$$

Karena

$$(1+a)(1+b)(1+c)=1+(a+b+b)+(ab+bc+ca)+abc,$$

$$\begin{aligned}&(1+\mathrm{i}\tan\theta_1)(1+\mathrm{i}\tan\theta_2)(1+\mathrm{i}\tan\theta_3)=1+\mathrm{i}(\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3)\\&+\mathrm{i}^2(\tan\theta_1\tan\theta_2+\tan\theta_2\tan\theta_3+\tan\theta_3\tan\theta_1)+\mathrm{i}^3\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3\\&\qquad=[1-(\tan\theta_1\tan\theta_2+\tan\theta_2\tan\theta_3+\tan\theta_3\tan\theta_1)]\\&\qquad+\mathrm{i}\left[(\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3)-\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3\right].\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_3}&=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\\&\times\left\{\begin{array}{c}[1-(\tan\theta_1\theta_2+\tan\theta_2\tan\theta_3+\tan\theta_3\tan\theta_1)]\\+\mathrm{i}\left[(\tan\theta_1+\tan\theta_2\tan\theta_3)-\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3\right]\end{array}.\right\}\end{aligned}$$

Dengan menyamakan suku riil dan imajinernya

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)&=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\\&\quad\times[1-(\tan\theta_1\tan\theta_2+\tan\theta_2\tan\theta_3+\tan\theta_3\tan\theta_1)]\\&=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3-\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_1\\&\quad-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_1-\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)&=\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\\&\quad\times[(\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3)-\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3]\\&=\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3+\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_3\\&\quad+\sin\theta_3\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3.\end{aligned}$$

Contoh 1.6.11. Jika $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ merupakan sudut dalam sebuah segitiga tunjukkan bahwa

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3=\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3.$$

Solusi 1.6.11. Karena

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=\frac{\sin(\theta_1+\theta_2\theta_3)}{\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

dan dengan menggunakan hasil pada soal sebelumnya, kemudian kita bagi pembilang dan penyebutnya dengan $\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$, kita peroleh

$$\tan(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3-\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2-\tan\theta_2\tan\theta_3-\tan\theta_3\tan\theta_1}.$$

Sekarang $theta_1,\theta_2,\theta_3$ adalah sudut dalam sebuah segitiga dan $theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$ dan $\tan(theta_1+\theta_2+\theta_3)=\tan\pi=0$. Jadi

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3=\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3.$$

Contoh 1.6.12. Tunjukkan bahwa

$$\begin{aligned}\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cdots+\cos(2n-1)\theta&=\frac{\sin n\theta\cos n\theta}{\sin\theta},\\ \sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\cdots+\sin(2n-1)\theta&=\frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}.\end{aligned}$$

Solusi 1.6.12. Misalkan

$$\begin{aligned}C&=\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cdots+\cos(2n-1)\theta,\\ S&=\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta+\cdots+\sin(2n-1)\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z=C+\mathrm{i}S&=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+(\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta)\\ &\quad+(\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta)+\cdots+(\cos(n-1)\theta+\mathrm{i}\sin(2n-1)\theta)\\ &=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\theta}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-1)\theta}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}Z&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\theta}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-1)\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-1)\theta}\\ Z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}Z&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)\theta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}=\frac{\mathrm{e}^{in\theta}(\mathrm{e}^{in\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}\\ &=\frac{\mathrm{e}^{in\theta}\sin n\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos n\theta\sin n\theta}{\sin\theta}+\mathrm{i}\frac{\sin n\theta\sin n\theta}{\sin\theta}.\end{aligned}$$

Jadi

$$C=\frac{\cos n\theta\sin n\theta}{\sin\theta},\quad S=\frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}.$$

Contoh 1.6.13. Untuk $r < 1$, tunjukkan bahwa

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\theta\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\theta\right)^2 = \frac{1}{1 - 2r^2 \cos\theta + r^4}.$$

Solusi 1.6.13. Misalkan

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\theta + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (\cos n\theta + \mathrm{i} \sin n\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \\ &= 1 + r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + r^4 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + r^6 \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} + \cdots . \end{aligned}$$

Karena $r < 1$ deret ini konvergen

$$\begin{aligned} r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} Z = r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + r^4 \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + r^6 \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\theta} + \cdots , \\ Z - r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} Z = 1, \\ Z = \frac{1}{1 - r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |Z|^2 = ZZ^* &= \frac{1}{1 - r^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \times \frac{1}{1 - r^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} \\ &= \frac{1}{1 - r^2 (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) + r^4} = \frac{1}{1 - 2r^2 \cos\theta + r^4}. \end{aligned}$$

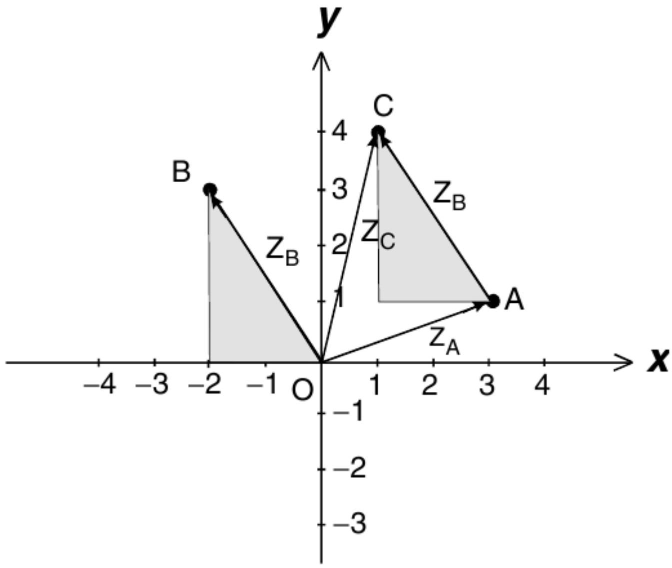
Tetapi

$$\begin{aligned} |Z|^2 &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\theta + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\theta\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\theta - \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\theta\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos n\theta\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\theta\right)^2 . \end{aligned}$$

Jadi

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \cos\theta\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \sin n\theta\right)^2 = \frac{1}{1 - 2r^2 \cos\theta + r^4}.$$

Ini merupakan intensitas cahaya yang ditransmisikan melalui sebuah film setelah pemantulan berulang pada permukaan film dan r adalah fraksi cahaya yang dipantulkan setiap saat.



Gambar 1.4: Penjumlahan dan pengurangan bilangan kompleks dalam bidang kompleks. Sebuah bilangan kompleks bisa dinyatakan dengan sebuah titik pada bidang kompleks, atau dengan sebuah vektor dari titik asal ke titik tersebut. Vektor bisa dipindahkan secara paralel dengan dirinya sendiri.

1.6.3 Geometri dan Bilangan Kompleks

Terdapat tiga buah representasi geometrik bilangan kompleks $z = x + \mathrm{i}y$:

1. sebagai sebuah titik $P(x, y)$ pada bidang xy.
2. sebagai sebuah vektor OP dari titik asal ke titik P,
3. sebagai sebuah vektor sebarang dengan panjang dan yang sama seperti OP.

Sebagai contoh $z_A = 3 + \mathrm{i}$ bisa dinyatakan dengan sebuah titik A pada Gambar 1.4. Titik ini bisa juga dinyatakan dengan vektor z_A. Dengan cara yang sama $z_B = -2+3\mathrm{i}$ bisa dinyatakan dengan titik B dan vektor z_B. Sekarang kita misalkan z_C sebagai $z_A + z_B$

$$z_C = z_A + z_B = (3 + \mathrm{i}) + (-2 + 3\mathrm{i}) = 1 + 4\mathrm{i}.$$

Sehingga z_C direpresentasikan dengan titik C dan vektor z_C. Jelaslah dua buah segitiga yang diarsir pada Gambar 1.4 identik. Vektor AC (dari A ke C) tidak hanya paralel dengan z_B, panjangnya juga sama dengan z_B. Jadi z_A, z_B dan z_A+z_B adalah tiga buah sisi segitiga OAC. Karena jumlah dua buah sisi segitiga haruslah lebih besar atau sama dengan sisi ketiga, diperoleh

$$|z_A|+|z_B| \geq |z_A + z_B|.$$

Karena $z_B = z_C - z_A$ dan z_B sama dengan AC, kita bisa menginterpretasikan $z_C - z_A$ sebagai vektor dari puncak z_A ke puncak dari z_C. Jarak antara C dan A adalah $|z_C - z_A|$.

Jika z adalah sebuah variabel dan z_A tetap, maka sebuah lingkaran dengan jari-jari r berpusat pada z_A dinyatakan dengan persamaan

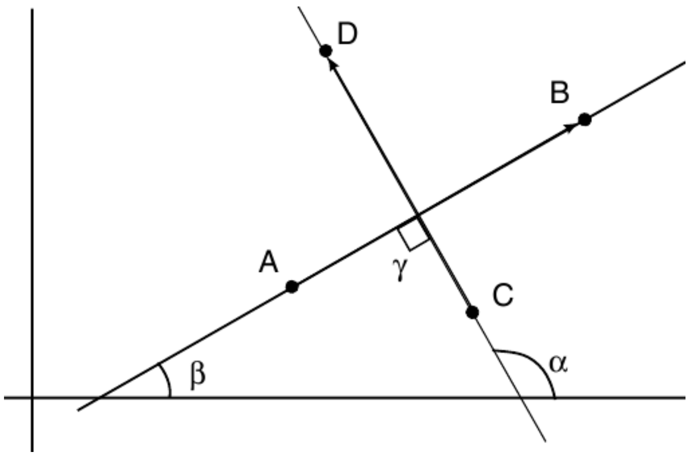
$$|z - z_A|.$$

Jika dua buah segmen AB dan CD paralel maka

$$z_B - z_A = k(z_D - z_C),$$

dengan k adalah bilangan riil. Jika $k = 1$ maka A, B, C, D adalah puncak-puncak paralellogram (jajaran genjang).

Jika dua buah segmen AB dan CD saling tegak lurus, maka rasio $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ haruslah sebuah bilangan imajiner. Hal ini bisa dilihat sebagai berikut. Segmen AB pada



Gambar 1.5: Segmen tegak lurus. Jika AB dan CD segmen yang saling tegak lurus, maka perbandingan $z_D - z_C$ dan $z_B - z_A$ haruslah merupakan bilangan imajiner.

Gambar 1.5 bisa dinyatakan sebagai

$$z_B - z_A = |z_B - z_A|e^{i\beta}$$

dan segmen CD sebagai

$$z_D - z_C = ||z_D - z_C|e^{i\alpha}$$

Jadi

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{|z_D - z_C|e^{i\alpha}}{|z_B - z_A|e^{i\beta}} = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|}e^{i(\alpha-\beta)}$$

Kita tahu bahwa sudut eksterior sama dengan jumlah dua buah sudut dalam (interior), yaitu, pada Gambar 1.5 $\alpha = \beta + \gamma$ atau $\gamma = \alpha - \beta$. Jika AB tegak lurus dengan CD maka $\gamma = \frac{\pi}{2}$ dan

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$$

Jadi

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|}\mathrm{i}.$$

Karena $\frac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|}$ maka $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ haruslah imajiner.

Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana menggunakan prinsip ini untuk menyelesaikan persoalan dalam geometri.

Contoh 1.6.14. Tentukan kurva pada bidang kompleks yang dinyatakan oleh

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 2.$$

Solusi 1.6.14. $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 2$ bisa dituliskan sebagai $|z+1| = 2|z-1|$. Dengan $z = x + \mathrm{i}y$, persamaan ini menjadi

$$|(x+1) + \mathrm{i}y| = 2|(x-1) + \mathrm{i}y|,$$
$$\{[(x+1) + \mathrm{i}y]\,[(x+1) - \mathrm{i}y]\}^{1/2} = 2\{[(x-1) + \mathrm{i}y]\,[(x-1) - \mathrm{i}y]\}^{1/2}.$$

Kuadratkan kedua ruas

$$(x+1)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 + 4y^2.$$

Diperoleh

$$3x^2 - 10x + 3y^2 + 3 = 0$$

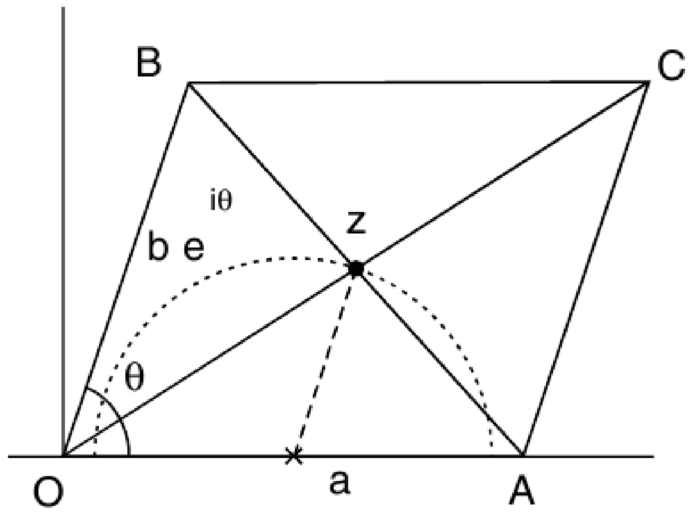
yang bisa dituliskan sebagai

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{5}{3}\right) + 1 = 0$$

atau

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Ini adalah sebuah lingkaran berjari-jari 4/3 yang berpusat pada $(\frac{5}{3}, 0)$.



Gambar 1.6: Kurva yang dinyatakan oleh pusat jajaran genjang. Jika sisi dasarnya tetap, maka lokusnya berupa lingkaran.

Contoh 1.6.15. Dalam jajaran genjang pada Gambar 1.6, sisi dasarnya sepanjang sumbu x sepanjang a. Panjang sisi lainnya adalah b. Ketika sudut θ antara dua buah sisi berubah, tentukan lokus pusat jajaran genjang tersebut.

Solusi 1.6.15. Misalkan titik asal koordinat berada pada sebelah kiri bawah jajaran genjang. Maka

$$z_A = a, \quad z_B = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Misalkan pusat jajaran genjang z terletak pada tengah-tengah diagonal OC. Jadi

$$z = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

atau

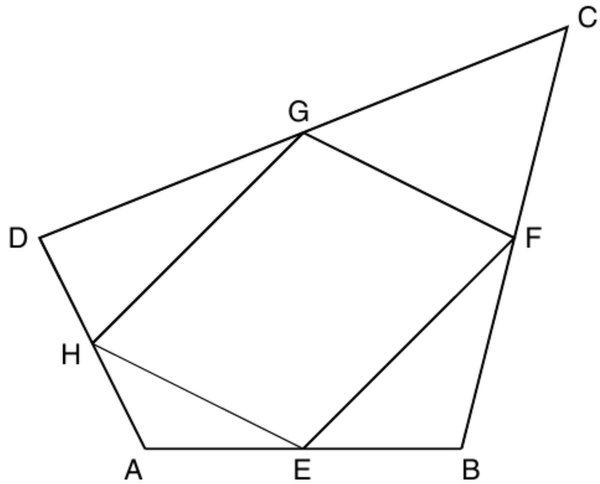
$$z - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Diperoleh

$$\left|z - \frac{1}{2}a\right| = \left|\frac{1}{2}b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = \frac{1}{2}b.$$

Sehingga lokus pusatnya adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari $\frac{1}{2}b$ berpusat pada $\frac{1}{2}a$. Setengah lingkarannya bisa dilihat pada Gambar 1.6.

Contoh 1.6.16. Jika E, F, G, H adalah titik tengah layang-layang $ABCD$ Buktikan bahwa $EFGH$ adalah jajaran genjang.



Gambar 1.7: Jajaran genjang yang dibentuk oleh titik tengah layang-layang.

Solusi 1.6.16. Misalkan vektor dari titik asal ke titik sebarang P adalah z_P, dari Gambar 1.7 diperoleh

$$z_E = z_A + \frac{1}{2}(z_B - z_A)$$
$$z_F = z_B + \frac{1}{2}(z_C - z_B),$$

$$z_F - z_E = z_B + \frac{1}{2}(z_C - z_B) - z_A - \frac{1}{2}(z_B - z_A) = \frac{1}{2}(z_C - z_A).$$

$$z_G = z_D + \frac{1}{2}(z_C - z_D),$$
$$z_H = z_A + \frac{1}{2}(z_C - z_D) - z_A - \frac{1}{2}(z_D - z_A) = \frac{1}{2}(z_C - z_A).$$

Jadi

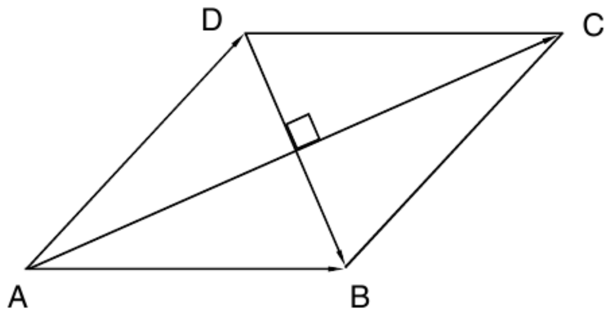
$$z_F - z_E = z_G - z_H$$

maka $EFGH$ adalah jajaran genjang.

Contoh 1.6.17. Gunakan bilangan kompleks untuk membuktikan diagonal sebuah belah ketupat saling tegak lurus, seperti pada Gambar 1.8.

Solusi 1.6.17. Diagonal AC diberikan oleh $z_C - z_A$, dan diagonal DB diberikan oleh $z_B - z_D$. Misalkan panjang tiap sisi belah ketupat adalah a, dan titik asal koordinat berhimpit dengan A. Selanjutnya misalkan sumbu x sepanjang garis AB. Jadi

$$z_A = 0, \quad z_B = a, \quad z_D = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$



Gambar 1.8: Diagonal sebuah belah ketupat saling tegak lurus.

Selanjutnya

$$z_C = z_B + z_D = a + a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Maka

$$\begin{aligned} z_C - z_A &= a + a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = a(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}), \\ z_B - z_D &= a - a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}). \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \frac{z_C - z_A}{z_B - z_D} &= \frac{a(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{a(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} = \frac{(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\frac{(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2 - (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})} = \mathrm{i}\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}. \end{aligned}$$

Karena $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ riil, maka $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_D}$ imajiner. Sehingga AC tegak lurus BD.

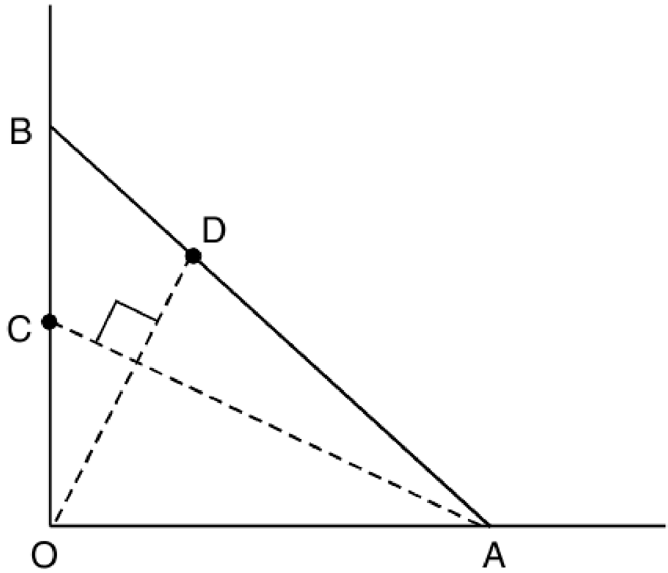
Contoh 1.6.18. Dalam segitiga AOB, seperti pada Gambar 1.9, sudut antara AO dan OB adalah 90°dan panjang AO sama dengan panjang OB. Titik D membagi AB sedemikian rupa sehingga $AD = 2DB$, dan C adalah titik tengah OB. Tunjukkan bahwa AC tegak lurus OD.

Solusi 1.6.18. Misalkan sumbu riil sepanjang OA dan sumbu imajiner sepanjang OB. Misalkan panjang OA dan OB adalah a. Jadi

$$z_o = 0, \quad z_A = a, \quad z_B = a\mathrm{i}, \quad z_C = \frac{1}{2}a\mathrm{i}$$

$$z_D = z_A + \frac{2}{3}(z_B - z_A) = a + \frac{2}{3}(a\mathrm{i} - a) = \frac{1}{3}a(1 + 2\mathrm{i}),$$

$$z_D - z_O = \frac{1}{3}a(1 + 2\mathrm{i}) - 0 = \frac{1}{3}a(1 + 2\mathrm{i}).$$



Gambar 1.9: Persoalan dalam geometri. Jika OA tegak lurus OB dan $OA = OB$, maka garis CA tegak lurus dengan garis OD dengan C adalah titik tengah OB dan $DA = 2BD$.

Vektor AC diberikan oleh $z_C - z_A$

$$z_C - z_A = \frac{1}{2}a\mathrm{i} - a = \mathrm{i}\frac{1}{2}a(1 + 2\mathrm{i}).$$

Jadi

$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_o} = \mathrm{i}\frac{3}{2}.$$

Karena ini imajiner, maka AC tegak lurus OD.

1.7 Fungsi Dasar Bilangan Kompleks

1.7.1 Fungsi Eksponen dan Trigonometri dari z

Fungsi eksponensial e^z sangatlah penting, bukan hanya karena dirinya sendiri, tetapi juga sebagai dasar untuk mendefinisikan fungsi dasar lainnya. Fungsi eksponensial variabel riil sudah kita ketahui. Sekarang kita akan mencari tahu arti e^z ketika $z = x + \mathrm{i}y$. Dengan semangat Euler, kita bisa bekerja dengan cara kita secara manipulatif. Dengan asumsi e^z memenuhi semua aturan yang sudah kita kenal dari fungsi eksponen bilangan riil, kita mempunyai

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \tag{1.19}$$

Sehingga kita bisa mendefinisikan e^z sebagai $\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$. Nilainya direduksi menjadi e^x ketika suku imajiner z hilang. Mudah untuk dibuktikan bahwa

$$\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}.$$

Dalam bab selanjutnya kita akan mengetahui arti dari turunan terhadap z. Saat ini kita cukup tahu bahwa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z$$

Sehingga definisi (1.19) menjaga semua sifat-sifat fungsi eksponensial.

Kita sudah melihat bahwa

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}), \quad \sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}).$$

Dalam persamaan ini, kita bisa memperluas definisi cosinus dan sinus ke dalam domain kompleks. Sehingga kita mendefinisikan

$$\cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \quad \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}).$$

Fungsi trigonometri z lainnya didefinisikan dengan cara biasa. Sebagai contoh

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}. \end{aligned}$$

Dengan definisi ini kita bisa membuktikan semua rumus trigonometri tetap berlaku ketika variabel riil x digantikan variabel kompleks z:

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z,$$
$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z = -\sin z, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z = -\cos z,$$

Untuk membuktikannya, kita mulai dengan definisinya. Sebagai contoh

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)\right]^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) - \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} - 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z}\right). \end{aligned}$$

Contoh 1.7.1. Nyatakan $\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}}$ dalam bentuk $a+b\mathrm{i}$, dalam tiga buah desimal.
Solusi 1.7.1.

$$\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}} = \mathrm{e}(\cos 1 - \mathrm{i}\sin 1).$$

Dengan menggunakan kalkulator

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{1-\mathrm{i}} &\simeq 2.718(0.5403 - 0.8414\mathrm{i}) \\ &= 1.469 - 2.287\mathrm{i}\end{aligned}$$

Contoh 1.7.2. Tunjukkan bahwa

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z.$$

Solusi 1.7.2.

$$\begin{aligned}2\sin z\cos z &= 2\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z}) = \sin 2z.\end{aligned}$$

Contoh 1.7.3. Hitung $\sin(1-\mathrm{i})$.
Solusi 1.7.3. Dengan definisi

$$\begin{aligned}\sin(1-\mathrm{i}) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{1-\mathrm{i}}\right) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\{\mathrm{e}\left[\cos(1) + \mathrm{i}\sin(1)\right]\} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\{\mathrm{e}^{-1}\left[\cos(1) - \mathrm{i}\sin(1)\right]\} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right)\cos(1) + \frac{1}{2}(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1})\sin(1)\end{aligned}$$

Kita bisa memperoleh hasil yang sama dengan menggunakan rumus penjumlahan trigonometrik.

1.7.2 Fungsi Hiperbolik z

Kombinasi berikut ini sering kita jumpai

$$\cosh z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}).$$

Kombinasi ini disebut sebagai cosinus hiperbolik (disingkat cosh) dan sinus hiperbolik (disingkat sinh). Jelaslah

$$\cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z.$$

Fungsi hiperbolik lain didefinisikan dengan cara yang sama sejajar dengan fungsi trigonometrik:

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z},$$
$$\mathrm{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \mathrm{csch} z = \frac{1}{\sinh z}.$$

Dengan definisi ini, semua identitas yang melibatkan fungsi hiperbolik variabel riil dijaga ketika variabelnya kompleks. Sebagai contoh

$$\begin{aligned}\cosh^2 z - \sinh^z &= \frac{1}{4}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^- z)^2 - \frac{1}{4}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^- z)^2 = 1 \\ \sinh 2z &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2z} - \mathrm{e}^{-2z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z})\frac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}) \\ &= 2\sinh z \cosh z.\end{aligned}$$

Terdapat hubungan yang dekat antara fungsi trigonometrik dengan hiperbolik ketika variabelnya kompleks. Sebagai contoh

$$\begin{aligned}\sin \mathrm{i}z &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{(\mathrm{i}z)} - \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}z)}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-z} - \mathrm{e}^{z}\right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{-z} - \mathrm{e}^{z}\right) = \mathrm{i}\sinh z.\end{aligned}$$

Serupa dengan hal ini, kita bisa membuktikan

$$\cos \mathrm{i}z = \cosh z,$$
$$\sinh \mathrm{i}z = \mathrm{i}\sin z, \quad \cosh \mathrm{i}z = \cos z.$$

Lebih dari ini

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cos \mathrm{i}y + \cos x \sin \mathrm{i}y \\ &= \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sinh y, \\ \cos z &= \cos x \cosh y - \mathrm{i}\sin x \sinh y.\end{aligned}$$

Contoh 1.7.4. Buktikan bahwa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cosh z = \sinh z, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sinh z = \cosh z.$$

Solusi 1.7.4.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cosh z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-z}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-z}) = \sinh z,$$

Contoh 1.7.5. Hitunglah $\cos(1+2\mathrm{i})$.
Solusi 1.7.5.

$$\begin{aligned}\cos(1+2\mathrm{i}) &= \cos 1\cosh 2 - \mathrm{i}\sin 1\sinh 2\\ &= (0.5403)(3.7622) - \mathrm{i}(0.8415)(3.6269) = 2.033 - 3.052\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Contoh 1.7.6. Hitunglah $\cos(\pi-\mathrm{i})$.
Solusi 1.7.6. Dengan definisi

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\mathrm{i}) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\mathrm{i})} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi-\mathrm{i})}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}(-\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}) = -\cosh(1) = -1.543.\end{aligned}$$

Kita memperoleh hasil yang sama dengan ekspansi

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\mathrm{i}) &= \cos\pi\cosh(1) + \mathrm{i}\sin\pi\sinh(1)\\ &= -\cosh(1) = -1.543.\end{aligned}$$

1.7.3 Logaritma dan Pangkat dari z

Logaritma natural dari $z = x+\mathrm{i}y$ dinotasikan dengan $\ln z$ dan didefinisikan dengan cara yang sama seperti variabel riil, yaitu sebagai invers dari fungsi eksponensial. Tetapi, terdapat sebuah perbedaan penting. Sebuah nilai ekponensial riil $y = \mathrm{e}^x$ adalah fungsi satu satu, karena dua buah x yang berbeda selalu memberikan dua buah nilai y yang berbeda. Hanya fungsi satu-satu yang memiliki invers karena tiap nilai y memiliki hanya sebuah nilai x. Tetapi e^z adalah fungsi dari beberapa nilai, karena

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Ketika y membesar sebagai sebuah perkalian dari 2π, nilai eksponensial kembali ke nilai awalnya. Sehingga untuk mendefinisikan logaritma kompleks kita harus membuang batasan fungsi satu-satu. Jadi,

$$w = \ln z$$

didefinisikan untuk $z \neq 0$ dengan hubungan

$$\mathrm{e}^w = z.$$

Jika kita memilih

$$w = u + \mathrm{i}v, \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

ini menjadi

$$\mathrm{e}^{w} = \mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Karena

$$|\mathrm{e}^{w}| = [(e)^{w})(e)^{w})^{*}]^{1/2} = (\mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v}\mathrm{e}^{u-\mathrm{i}v})^{1/2} = \mathrm{u},$$
$$|\mathrm{e}^{w}| = \left[(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{*}\right]^{1/2} = \left[(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right]^{1/2} = r.$$

Jadi

$$\mathrm{e}^{u} = r$$

Dengan definisi

$$u = \ln r.$$

Karena $\mathrm{e}^{w} = z$

$$\mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

diperoleh

$$v = \theta.$$

Sehingga

$$w = u + \mathrm{i}v = \ln r + \mathrm{i}\theta.$$

Sehingga aturan logaritma tetap berlaku

$$\ln z = \ln r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \ln r + \mathrm{i}\theta. \tag{1.20}$$

Karena θ adalah sudut polar (lingkaran), setelah z bertambah 2π dalam bidang kompleks, nilainya akan kembali pada nilai asalnya dan z akan memiliki nilai yang sama. Tetapi logaritma z tidak akan kembali pada nilai asalnya. Suku imajinernya akan bertambah sebesar $2\pi\mathrm{i}$, sehingga (1.20) bisa dituliskan sebagai

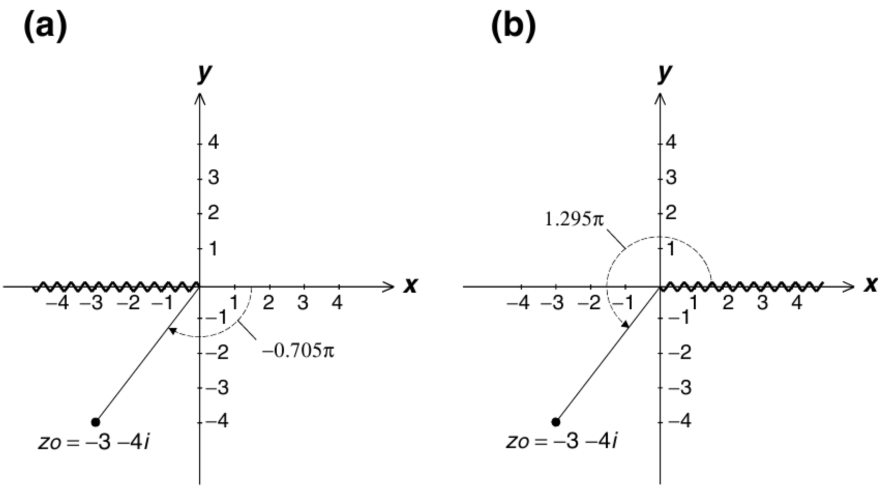
$$\ln z = \ln r + \mathrm{i}(\theta_0 + 2\pi n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

Dengan menspesifikasi interval seperti itu, kita mengatakan bahwa kita telah memilih cabang tertentu dari θ sebagai cabang utama. Nilai yang bersesuaian dengan $n = 0$ dikenal sebagai nilai utama dan dinyatakan sebagai Lnz, yaitu

$$Lnz = \ln r + \mathrm{i}\theta_0.$$

Pemilihan cabang utama adalah sebarang.

Gambar 1.10 mengilustrasikan dua buah pilihan cabang yang mungkin. Gambar 1.10.**(a)** menggambarkan cabang yang memilih nilai argumen z dari selang $-\pi < \theta \leq \pi$. Nilai dalam selang ini paling sering digunakan dalam kode komputer aljabar



Gambar 1.10: Dua buah pilihan cabang yang mungkin. **(a)** Cabang memotong sumbu x negatif. Titik $-3-4\mathrm{i}$ memiliki argumen 0.705π. **(b)** Cabang memotong sumbu x positif. Titik $-3-4\mathrm{i}$ memiliki argumen 1.295π.

kompleks. Argumen θ sifatnya diskontinu, melompat sebesar 2π ketika z memotong sumbu x negatif. Garis diskontinuitas ini dikenal sebagai potongan cabang. Perpotongan berakhir pada titik asal, yang dikenal sebagai titik cabang.

Dengan potongan cabang sepanjang sumbu riil negatif, nilai utama dari logaritma $z_0 = -3-4\mathrm{i}$ diberikan oleh $\ln(|z_0|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ dengan $\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}-\pi$, sehingga nilai utamanya adalah

$$\ln(-3-4\mathrm{i}) = \ln 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \ln 5 + \mathrm{i}(\tan^{1}\frac{4}{3}+\pi) = 1.609 - 0.705\pi\mathrm{i}.$$

Tetapi, jika kita memilih selang $0 \le \theta < 2\pi$ sebagai cabang utama, maka potongan cabang sepanjang sumbu x positif, seperti pada Gambar 1.10.**(b)**. Dalam kasus ini nilai utama logaritma z_0 adalah

$$\ln(-3-4\mathrm{i}) = \ln 5 + \mathrm{i}(\tan^{1}\frac{4}{3}+\pi) = 1.609 + 1.295\pi\mathrm{i}.$$

Kita akan menggunakan selang $0 \le \theta < 2\pi$ sebagai cabang utama kecuali diberitahukan yang lain.

Kita bisa dengan mudah mengecek hukum logaritma yang berlaku untuk variabel riil berlaku juga untuk variabel kompleks. Sebagai contoh

$$\begin{aligned}\ln z_1 z_2 &= \ln r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \ln r_1 r_2 + \mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)\\ &= \ln r_1 + \ln r_2 + \mathrm{i}\theta_1 + \mathrm{i}\theta_2\\ &= (\ln r_1 + \mathrm{i}\theta_1) + (\ln r_2 + \mathrm{i}\theta_2) = \ln z_1 + \ln z_2.\end{aligned}$$

Hubungan ini selalu berlaku sepanjang nilai logaritma diambil. Tetapi, jika hanya nilai utama yang diambil, maka jumlah dua buah nilai utama $\ln z_1 + \ln z_2$ bisa berada di luar cabang utama dari $\ln(z_1 z_2)$.

Contoh 1.7.7. Carilah semua nilai dari $\ln 2$.
Solusi 1.7.7. Bilangan riil 2 juga merupakan bilangan kompleks $2 + 0\mathrm{i}$, dan

$$2 + \mathrm{i}0 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}n2\pi}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots .$$

Jadi

$$\begin{aligned}\ln 2 &= Ln2 + n2\pi\mathrm{i} \\ &= 0.693 + n2\pi\mathrm{i}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots .\end{aligned}$$

Bahkan bilangan riil sekarang juga memiliki banyak logaritma. Hanya satu yang riil, yaitu ketika $n = 0$ nilai utama.

Contoh 1.7.8. Carilah semua nilai dari $\ln(1)$.
Solusi 1.7.8.

$$\ln(-1) = \ln \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi \pm 2\pi n)} = \mathrm{i}(\pi + 2\pi n), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots .$$

Nilai utamanya adalah $\mathrm{i}\pi$ untuk $n = 0$.

Karena $\ln a = x$ berarti $\mathrm{e}^x = a$, sehingga sepanjang x berupa variabel riil, a selalu positif. Jadi, dalam domain bilangan riil, logaritma bilangan negatif tidak ada. Sehingga jawabannya harus berasal dari domain kompleks. Situasinya masih membingungkan pada abad 18 ketika matematikawan besar D'Alembert $(1717-1783)$ berpikir bahwa $\ln(-x) = \ln(x)$, sehingga $\ln(-1) = \ln(1) = 0$. Alasannya adalah sebagai berikut. Karena $(-x)(-x) = x^2$, jadi $\ln[(-x)(-x)] = \ln x^2 = 2\ln x$. Tetapi $\ln[(-x)(-x)] = \ln(-x) + \ln(-x) = 2\ln(-x)$, sehingga kita memperoleh $\ln(-x) = \ln x$. Hasil ini tidak benar, karena kita menggunakan aturan aljabar biasa dalam domain bilangan kompleks. Eulerlah yang akhirnya menemukan bahwa $\ln(-1)$ harus sama dengan bilangan kompleks $\mathrm{i}\pi$, yang sesuai dengan persamaannya $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

Contoh 1.7.9. Carilah nilai utama dari $\ln(1 + \mathrm{i})$.
Solusi 1.7.9. Karena

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4},$$

$$\ln(1 + \mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\mathrm{i} = 0.3466 + 0.7854\mathrm{i}.$$

Sekarang kita berada pada posisi untuk berpikir mengenai pangkat umum bilangan kompleks. Pertama marilah kita cari i^{i}. Karena

$$\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2\pi n)},$$

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}\right]^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

Kita peroleh nilai yang tak hingga banyaknya dan semuanya riil. Euler membuktikan bahwa pangkat imajiner dari bilangan imajiner bisa berupa bilangan riil.

Secara umum, karena $a = e^{\ln a}$, maka

$$a^b = (\mathrm{e}^{\ln a})^b = \mathrm{e}^{b \ln a}.$$

Dalam rumus ini, a dan b bisa berupa bilangan kompleks. Sebagai contoh, untuk mencari $(1+i)^{1-i}$, pertama kita tuliskan

$$(1+i)^{1-i} = \left[\mathrm{e}^{\ln(1+i)}\right]^{1-i} = \mathrm{e}^{(1-i)\ln(1+i)}.$$

Karena

$$\ln(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2}\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi n)} = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}(\frac{\pi}{4} + 2\pi n), \quad n = 0, \pm 1, \pm, 2, \cdots ,$$

sekarang

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^{(\ln\sqrt{2}+\mathrm{i}(\frac{\pi}{4}+2\pi n)-\mathrm{i}\ln\sqrt{2}+(\frac{\pi}{4}+2\pi n))} \\ &= \mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2\pi n-\ln\sqrt{2})}.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n} = 1, \quad \mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

kita memiliki

$$1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}} = \sqrt{2}^{\frac{\pi}{4}+2\pi n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)\right],$$

dengan menggunakan kalkulator

$$(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{2\pi n}(2.808 + 1.318\mathrm{i}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

Contoh 1.7.10. Carilah semua nilai dari $\mathrm{i}^{1/2}$.

Solusi 1.7.10.

$$\mathrm{i}^{1/2} = \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}\right]^{1/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots .$$

Karena $\mathrm{e}^{in\pi} = 1$ untuk n genap dan $\mathrm{e}^{in\pi} = -1$ untuk n ganjil, maka

$$\mathrm{i}^{1/2} = \pm\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \pm\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}).$$

Perhatikan bahwa n bisa berupa bilangan bulat sebarang, kita menemukan hanya dua buah nilai $\mathrm{i}^{1/2}$ seperti seharusnya, yaitu akar kuadrat dari i.

Contoh 1.7.11. Carilah nilai utama dari 2^{i}.
Solusi 1.7.11.

$$\begin{aligned} 2^{\mathrm{i}} &= \left[\mathrm{e}^{\ln 2}\right] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln 2} = \cos(\ln 2) + \mathrm{i}\sin(\ln 2) \\ &= 0.769 + 0.639\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Contoh 1.7.12. Carilah nilai utama dari $(1+\mathrm{i})^{2-\mathrm{i}}$.
Solusi 1.7.12.

$$(1+\mathrm{i})^{2-\mathrm{i}} = \exp\left[(2-\mathrm{i})\ln(1+\mathrm{i})\right]$$

Nilai utama dari $\ln(1+\mathrm{i})$ adalah

$$\ln(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}$$

Jadi

$$\begin{aligned} (1+\mathrm{i})^{2-\mathrm{i}} &= \exp\left[(2-\mathrm{i})\left(\ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \exp\left(2\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}\right)\exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{2}\right)\right] \\ &= 2\mathrm{e}^{\pi/2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \ln\sqrt{2}\right)\right] \\ &= 4.3866(\sin 0.3466 + \mathrm{i}\cos 0.3466) = 1.490 + 4.126\mathrm{i} \end{aligned}$$

1.7.4 Invers Fungsi Trigonometrik dan Hiperbolik

Kita mulai dengan definisi, kita bisa mencari invers fungsi trigonometrik dan hiperbolik. Sebagai contoh, untuk mencari

$$w = \sin^{-1} z,$$

kita bisa menuliskannya sebagai

$$z = \sin w = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}).$$

Mengalikannya dengan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$, kita mempunyai

$$z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2w} - 1).$$

Dengan menata ulang, kita memperoleh persamaan kuadrat dari $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w})^2 - 2\mathrm{i}z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - 1 = 0.$$

Solusinya adalah

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = \frac{1}{2}\left(2\mathrm{i}z \pm \sqrt{-4z^2+4}\right) = \mathrm{i}z \pm (1-z^2)^{1/2}.$$

Dengan mengambil logaritma kedua ruas

$$\mathrm{i}w = \ln\left[\mathrm{i}z \pm (1-z^2)^{1/2}\right].$$

Jadi

$$w = \sin^{-1} z = -\mathrm{i}\ln\left[\mathrm{i}z \pm (1-z^2)^{1/2}\right].$$

Karena logaritma, rumus ini bernilai banyak. Meski dalam cabang utama $\sin^{-1} z$ memiliki dua nilai untuk $z = 1$ karena akarnya.

Dengan cara yang sama, kita bisa membuktikan

$$\begin{aligned}
\cos^{-1} z &= -\mathrm{i}\ln\left[\mathrm{i}z \pm (1-z^2)^{1/2}\right],\\
\tan^{-1} z &= \frac{i}{2}\ln\frac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh^{-1} z &= \ln\left[\mathrm{i}z \pm (1-z^2)^{1/2}\right],\\
\cosh^{-1} z &= \ln\left[\mathrm{i}z \pm (1-z^2)^{1/2}\right],\\
\tanh^{-1} z &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}.
\end{aligned}$$

Contoh 1.7.13. Hitunglah $\cos^{-1} 2$.

Solusi 1.7.13. Misalkan $w = \cos^{-1} 2$, jadi $\cos w = 2$. Diperoleh:

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + -\mathrm{i}w\right) = 2.$$

Kalikan dengan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$, kita peroleh bentuk kuadratik dari $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$.

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w})^2 + 1 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}.$$

Selesaikan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = \frac{1}{2}(4 \pm \sqrt{16-4}) = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Jadi

$$\mathrm{i}w = \ln\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

Sehingga

$$\cos^{-1} 2 = w = -\mathrm{i} \ln \left(2 \pm \sqrt{3}\right).$$

Sekarang

$$\ln(2+\sqrt{3}) = 1.317, \quad \ln(2-\sqrt{3}) = -1.317.$$

Perhatikan hanya dalam kasus khusus ini, $\ln(2+\sqrt{3}) = \ln(2-\sqrt{3})$, karena

$$-\ln(2+\sqrt{3}) = \ln(2+\sqrt{3}) = \ln \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \ln \frac{2+\sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \ln(2\sqrt{3}).$$

Sehingga nilai utama dari $\ln(2 \pm \sqrt{3}) = \pm 1.317$. Jadi

$$\cos^{-1} 2 = \mp 1.317\mathrm{i} + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Dalam domain variabel riil, nilai maksimal dari cosinus adalah satu. Sehingga kita berharap $\cos^{-1} 2$ adalah bilangan kompleks. Perhatikan juga bahwa solusi $\pm$ juga sudah kita duga karena $\cos(-z) = \cos(z)$.

Contoh 1.7.14. Buktikan bahwa

$$\tan^{-1} z = \frac{\mathrm{i}}{2} \left[\ln(\mathrm{i}+z) - \ln(\mathrm{i}-z)\right].$$

Solusi 1.7.14. Misalkan $w = \tan^{-1} z$, jadi

$$z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w})},$$
$$\mathrm{i}z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w},$$
$$(\mathrm{i}z - 1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + (\mathrm{i}z + 1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w} = 0.$$

Kalikan dengan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$ dan susun ulang, kita mempunyai

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2w} = \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}.$$

Ambil logaritma kedua ruas

$$\mathrm{i}2w = \ln \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} = \ln \frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z}.$$

Maka

$$w = \frac{1}{2\mathrm{i}} \ln \frac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z} = -\frac{\mathrm{i}}{2} \ln \frac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z},$$
$$\tan^{-1} z = w = \frac{\mathrm{i}}{2} \left[\ln(\mathrm{i}+z) - \ln(\mathrm{i}-z)\right].$$

1.8 Latihan

1. Dekati $\sqrt{2}$ sebagai 1.414 dan gunakan tabel akar 10 untuk menghitung $10^{\sqrt{2}}$.
   Jawab: 25.94.

2. Gunakan tabel akar 10 untuk menghitung $\log 2$.
   Jawab: 0.3010.

3. Berapa lama agar jumlah uang menjadi dua kali lipat jika diinvestasikan pada bunga majemuk 20% per tahun? (Pertanyaan ini ada pada lembaran tanah liat pada tahun 1700 SM sekarang disimpan di Louvre.)
   Petunjuk: Hitung $(1.2)^x = 2$.
   Jawab: 3.8 tahun, atau 3 tahun 8 bulan dan 18 hari.

4. Anggap bunga tahunan tetap 5%. Bank berkompetisi dengan menawarkan bunga majemuk dengan jumlah yang meningkat, bulanan, harian, jam, dan seterusnya. Dengan modal \$100, berapakah jumlah maksimal uang yang bisa diperoleh setelah 1 tahun?
   Jawab: $100\mathrm{e}^{0.05} = 105.13$.

5. Sederhanakan (nyatakan dalam $a + \mathrm{i}b$)
   $$\frac{\cos 2\alpha + \mathrm{i}\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha}.$$
   Jawab: $\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$.

6. Sederhanakan (nyatakan dalam $a + \mathrm{i}b$)
   $$\frac{(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)^2}{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3}.$$
   Jawab: $\cos 5\theta - \mathrm{i}\sin 5\theta$.

7. Carilah akar dari
   $$x^4 + 1 = 0.$$
   Jawab: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

8. Carilah semua akar empat berbeda dari $8 - \mathrm{i}8\sqrt{3}$.
   Jawab: $2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right),\ 2\left(\cos\frac{11\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{12}\right),\ 2\left(\cos\frac{17\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12}\right),$
   $2\left(\cos\frac{23\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{23\pi}{12}\right).$

9. Carilah semua nilai berikut dalam bentuk $a + \mathrm{i}b$.
   $$\text{(a) } \mathrm{i}^{2/3}, \quad \text{(b) } (-1)^{1/3}, \quad \text{(c) } (3+4\mathrm{i})^4.$$
   Jawab: (a) -1, $(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})/2$, (b) -1, $(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})/2$, (c) $-527 - 336\mathrm{i}$.

10. Gunakan bilangan kompleks untuk menunjukkan

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\sin^3\theta - 4\sin^3\theta.$$

11. Gunakan bilangan kompleks untuk menunjukkan

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1),$$
$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta).$$

12. Buktikan bahwa

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})\theta\right]}{2\sin\frac{1}{2}\theta},$$
$$\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta - \frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})\theta\right]}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

13. Carilah lokasi pusat dan jari-jari lingkaran berikut

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 3.$$

Jawab: $(-\frac{5}{4}, 0)$ dan $r = \frac{3}{4}$.

14. Gunakan bilangan kompleks untuk membuktikan bahwa diagonal jajaran genjang saling membagi dua.

15. Gunakan bilangan kompleks untuk membuktikan bahwa segmen garis yang menghubungkan dua buah titik tengah dua buah sisi segitiga sebarang sejajar dengan sisi ketiga dan setengah panjangnya.

16. Gunakan bilangan kompleks untuk membuktikan bahwa perpotongan titik tengah segitiga adalah dua pertiga dari puncak sebarang ke sisi yang berlawanan.

17. Misalkan ABC adalah segitiga sama kaki sehingga $AB = AC$. Gunakan bilangan kompleks untuk membuktikan bahwa garis dari A ke titik tengah BC tegak lurus dengan BC.

18. Nyatakan nilai utama bentuk berikut dalam $a + \mathrm{i}b$

$$\text{(a)}\ \exp\left[\frac{\mathrm{i}\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}\right], \quad \text{(b)}\ \cos(\pi - 2\mathrm{i}\ln 3), \quad \text{(c)}\ \ln(-\mathrm{i}).$$

Jawab: (a) $1 + \mathrm{i}$, (b) $-\frac{41}{9}$, (c) $-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}$ atau $\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}$.

19. Nyatakan nilai utama bentuk berikut dalam $a + \mathrm{i}b$:

$$\text{(a) } \mathrm{i}^{3+\mathrm{i}}, \quad \text{(b) } (2\mathrm{i})^{1+\mathrm{i}}, \quad \text{(c) } \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^{\mathrm{i}}.$$

Jawab: (a) $-0.20788\mathrm{i}$, (b) $-0.2657 + 0.3189\mathrm{i}$, (c) 0.35092.

20. Carilah semua nilai dari pernyataan berikut:

$$\text{(a) } \sin\left(\mathrm{i}\ln\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right), \quad \text{(b) } \tan^{-1}(2\mathrm{i}), \quad \text{(c) } \cosh^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Jawab: (a) 1, (b) $\frac{1+2n}{2}\pi + \mathrm{i}\frac{1}{2}\ln 3$, (c) $\mathrm{i}(\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi)$.

21. Dengan $z = x + \mathrm{i}y$, buktikan rumus berikut

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \sinh y, \\
\cos z &= \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y, \\
\sinh z &= \sinh x \cos y + \mathrm{i} \cosh x \sin y, \\
\cosh z &= \cosh x \cos y + \mathrm{i} \sinh x \sin y.
\end{aligned}$$

22. Buktikan bahwa

$$\begin{aligned}
\sin 2z &= 2 \sin z \cos z, \\
\cos 2z &= \cos^2 z - \sin^2 z, \\
\cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1.
\end{aligned}$$

23. Buktikan bahwa

$$\begin{aligned}
\cos^{-1} z &= -\mathrm{i} \ln\left[z + (z^2 - 1)^{1/2}\right], \\
\sinh^{-1} z &= \ln\left[z + (1 + z^2)^{1/2}\right].
\end{aligned}$$

2

Fungsi Kompleks

Bilangan kompleks awalnya digunakan untuk menyederhanakan penghitungan. Seiring berjalannya waktu, jelaslah fungsi kompleks merupakan alat yang sangat efektif dalam teknik dan sains. Sering kita jumpai solusi paling elegan dari persoalan penting dalam konduksi panas, elstisitas, listik statik, dan hidrodinamika diberikan oleh metode fungsi kompleks. Dalam fisika modern, variabel kompleks menjadi bagian tak terpisahkan dari teori fisis. Sebagai contoh, postulat mendasar dalam mekanika kuantum yaitu fungsi gelombang berada dalam sebuah ruang vektor kompleks.

Dalam teknik dan sains uji terakhir adalah di dalam laboratorium. Ketika kita melakukan pengukuran, hasil yang kita peroleh, jelaslah, bilangan riil. Tetapi formualsi teoretik persoalan yang ditinjau sering membawa kita ke ranah bilangan kompleks. Hampir merupakan sebuah keajaiban, jika teorinya benar, analisis matematika lebih lanjut dengan fungsi kompleks akan selalu membawa kita bahwa jawabannya riil. Jadi teori fungsi kompleks merupakan alat yang esensial dalam sains modern.

Fungsi kompleks pada mana konsep dan struktur kalkulus bisa diaplikasikan dinamakan fungsi analitik. Fungsi analitik ini yang mendominasi analisis kompleks. Beberapa sifat penting dan aplikasi fungsi kompleks dipelajari dalam bab ini.

2.1 Fungsi Analitik

Teori fungsi analitik merupakan perluasan kalkulus diferensial dan integral menjadi ranah variabel kompleks. Tetapi, ide turunan fungsi kompleks jauh lebih halus dibandingkan dengan fungsi riil. Hal ini dikarenakan sifat intrinsik alami dua dimensi bilangan kompleks. Keberhasilan dalam menganalisis pertanyaan ini oleh Cauchy dan Riemann meninggalkan jejak mendalam dalam bidang matematika. Bukan hanya dalam matematika saja tetapi kita juga banyak menjumpai konsekuensinya dalam beberapa bidang fisika matematik.

2.1.1 Fungsi Kompleks sebagai Operasi Pemetaan

Dari variabel kompleks $z = x + \mathrm{i}y$, kita bisa membangun fungsi kompleks $f(z)$. Secara formal kita bisa mendefinisikan fungsi variabel kompleks dengan cara yang sama seperti fungsi variabel riil didefinisikan, kecuali mengijinkan konstanta dan variabel untuk memiliki nilai kompleks.

Misalkan $w = f(z)$ merupakan fungsional yang menghubungkan antara w dan z. Fungsi-fungsi ini bisa dipisahkan dalam bagian riil dan imajinernya

$$w = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y),$$

dengan $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ merupakan fungsi riil. Sebagai contoh, jika

$$w = f(z) = z^2$$

maka

$$w = (x + \mathrm{i}y)^2 = (x^2 - y^2) + \mathrm{i}2xy.$$

Jadi bagian riil dan imajiner dari $w(u, v)$, adalah

$$u(x, y) = (x^2 - y^2), \tag{2.1}$$

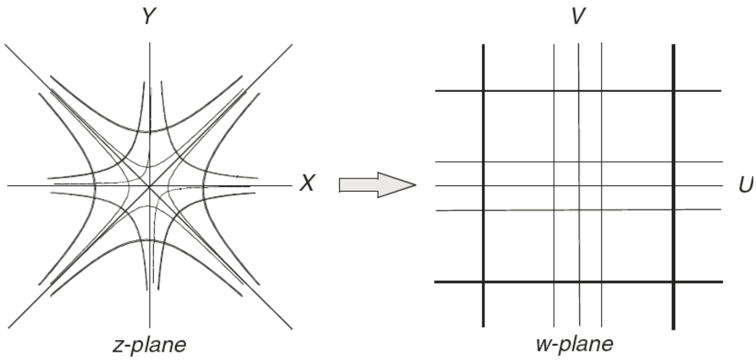
$$v(x, y) = 2xy. \tag{2.2}$$

Karena dua dimensi dibutuhkan untuk menentukan variabel bebas $z(x, y)$ dan dua dimensi lain untuk menentukan variabel bergantung $w(u, v)$, sebuah fungsi kompleks tidak bisa dinyatakan dengan sebuah plot dua atau tiga dimensi. Hubungan fungsional $w = f(z)$ mungkin paling baik digambarkan sebagai sebuah pemetaan, atau sebuah transformasi, operasi. Himpunan titik (x, y), dalam bidang$-z$ ($z = x + \mathrm{i}y$) dipetakan menjadi himpunan titik lain (u, v) dalam bidang$-w$ ($w = u + \mathrm{i}v$). Jika kita mengijinkan variabel x dan y untuk melewati beberapa kurva dalam bidang$-z$, hal ini akan memaksa variabel u dan v melawati sebuah citra dalam bidang$-w$.

Dalam contoh di atas, jika titik (x, y) dalam bidang$-z$ bergerak sepanjang hiperbola $x^2 - y^2 = c$ (dengan c sebuah konstanta), titik citranya diberikan oleh (2.1) akan bergerak sepanjang kurva $u = c$, yaitu sebuah garis vertikal dalam bidang$-w$. Dengan cara yang sama, jika titik bergerak sepanjang hiperbola $2xy = k$, titik citranya diberikan oleh (2.2) akan melalui garis horizontal $v = k$ dalam bidang$-w$. Hiperbola $x^2 - y^2 = c$ dan $2xy = k$ membentuk dua buah kurva dalam bidang$-z$, tiap kurva bersesuaian dengan nilai konstanta tertentu c atau k. Kurva citranya membentuk kisi garis horisontal dan vertikal dalam bidang$-w$, seperti tampak pada Gambar 2.1.

2.1.2 Turunan sebuah Fungsi Kompleks

Untuk membahas turunan fungsi kompleks $f(z)$ pada titik tertentu z_0, fungsinya harus terdefinisi pada beberapa titik di sekitar z_0. Titik sekitar yang kita maksudkan adalah

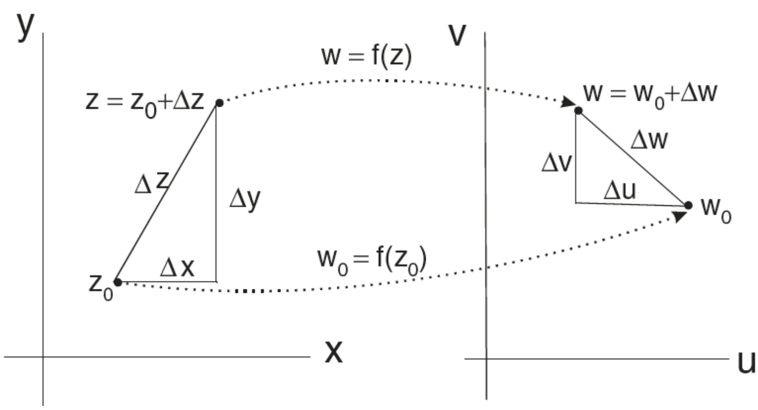


Gambar 2.1: Fungsi $w = z^2$ memetakan hiperbola dalam bidang$-z$ ke dalam garis horizontal dan vertikal dalam bidang$-w$.

himpunan semua titik dalam sebuah daerah lingkaran yang cukup kecil dengan pusat z_0. Jika $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ dan $z = z_0 + \Delta z$ merupakan dua buah titik berdekatan dalam bidang$-z$ dengan $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y$, titik citranya yang bersesuaian dalam bidang$-w$ adalah $w_0 = u_0 + \mathrm{i}v_0$ dan $w = w_0 + \Delta w$ dengan $w_0 = f(z_0)$ dan $w = f(z) = f(z_0 + \Delta z)$. Perubahan Δw disebabkan perubahan Δz dalam z_0 adalah

$$\Delta = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

Hubungan fungsional ini ditunjukkan Gambar 2.2.



Gambar 2.2: Tetangga z_0 dalam bidang z dipetakan ke dalam tetangga w_0 dalam bidang w melalui fungsi $w = f(z)$.

Sekarang jika kita definisikan turunan $f'(z) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$ dengan rumus biasa

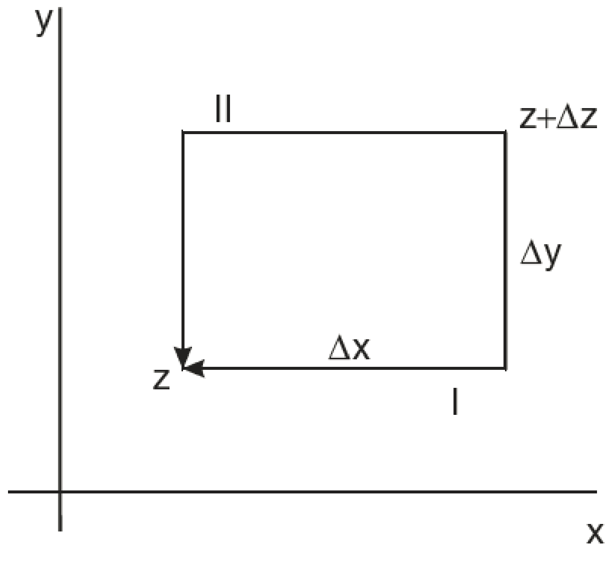
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{2.3}$$

Paling penting untuk memperhatikan bahwa dalam rumus ini $z = z_0 + \Delta z$ bisa berada di semua lokasi di sekitar z_0 dan Δz bisa mendekati nol sepanjang lintasan sebarang yang menghubungkan z dengan z_0. Maka agar nilai turunannya unik, kita mengharuskan limitnya bebas dari cara Δz mendekati nol. Batasan ini menyempitkan jenis fungsi kompleks yang memiliki turunan.

Sebagai contoh jika $f(z) = |z|^2$, maka $w = zz^*$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(z^* + \Delta z^*) - zz^*}{\Delta z} \\ &= z^* + \Delta z^* + \frac{z\Delta z^*}{\Delta z} = x - \mathrm{i}y + \Delta x - \mathrm{i}\Delta y + (x+\mathrm{i}y)\frac{\Delta x - \mathrm{i}\Delta y}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}.\end{aligned}$$

Agar turunan $f'(z)$ ada, limit dari pembagian ini harus sama tidak bergantung ba-



Gambar 2.3: Agar bisa diturunkan pada z, limit yang sama harus diperoleh tidak bergantung bagaimana Δz mendekati nol.

gaimana Δz mendekati nol. Karena $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\Delta y, \Delta z \to 0$ berarti, tentu, baik $\Delta x \to 0$ dan $\Delta y \to 0$. Tetapi cara keduanya mendekati nol bisa membuat perbedaan. Jika kita membiarkan $\Delta z \to 0$ mendekati nol melalui lintasan I pada Gambar 2.3, pertama $\Delta y \to 0$ dan kemudian $\Delta x \to 0$, kita peroleh

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \to 0}\left\{\lim_{\Delta y \to 0}\left[x - \mathrm{i}y + \Delta x - \mathrm{i}\Delta y + (x+\mathrm{i}y)\frac{\Delta x - \mathrm{i}\Delta y}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}\right]\right\} \\ &= 2x.\end{aligned}$$

Tetapi jika kita ambil lintasan II dan mengijinkan $\Delta x \to 0$ dan kemudian $\Delta y \to 0$, kita peroleh

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \lim_{\Delta y\to 0}\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\left[x-\mathrm{i}y+\Delta x-\mathrm{i}\Delta y+(x+\mathrm{i}y)\frac{\Delta x-\mathrm{i}\Delta y}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\right]\right\}\\ &= -2\mathrm{i}y.\end{aligned}$$

Kedua limit ini berbeda, maka $w=|z|^2$ tidak mempunyai turunan kecuali pada $z=0$.

Di lain pihak, jika kita perhatikan $w=z^2$, maka

$$w+\Delta w=(z+\Delta z)^2=z^2+2z\Delta z+(\Delta z)^2,$$

jadi

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}=2z+\Delta z.$$

Limit pembagian ini ketika $\Delta z\to 0$ sama dengan $2z$, apapun lintasan yang diambil Δz untuk mendekati nol. Jadi turunannya ada di setiap titik dan

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\lim_{\Delta\to z}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z.$$

Jelas bahwa tidak setiap kombinasi dari $u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ bisa diturunkan terhadap z. Jika sebuah fungsi kompleks $f(z)$ yang turunannya $f'(z)$ ada pada z_0 dan pada tiap titik di sekitar z_0, maka fungsi dikatakan analitik pada z_0. Sebuah fungsi analitik merupakan sebuah fungsi yang analitik dalam beberapa daerah (domain) dari bidang kompleks. Sebuah fungsi yang analitik dalam keseluruhan bidang kompleks dikatakan fungsi keseluruhan. Sebuah titik yang menghalangi fungsi analitik mempunyai turunan dikatakan sebuah titik singular.

2.1.3 Syarat Cauchy-Riemann

Sekarang kita akan mempelajari syarat yang harus dipenuhi fungsi kompleks agar mempunyai turunan.

Dari definisi:

$$f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y),$$

yaitu

$$\begin{aligned}f(z+\Delta z) &= f\left((x+\Delta x)+\mathrm{i}(y+\Delta y)\right)\\ &= u(x+\Delta x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y+\Delta y).\end{aligned}$$

Karena $w=f(z)$ dan $w+\Delta w=f(z+\Delta z)$, jadi

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v,$$

dengan

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y),\\ \Delta v &= v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y).\end{aligned}$$

Kita bisa menjumlahkan $0 = -u(x, y+\Delta y) + u(x, y+\Delta y)$ ke Δu tanpa mengubah nilainya

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)\\ &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) + u(x, y+\Delta y) - u(x,y).\end{aligned}$$

Ingat definisi turunan parsial

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)] = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Dalam rumus ini hanya variabel x bertambah Δx dan variabel y tetap. Jika ini secara sederhana dipahami simbol Δx membawa arti mendekati nol sebagai sebuah limit, maka kita bisa memindahkannya ke ruas kanan

$$u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x.$$

Dengan cara yang sama, pada rumus berikut hanya variabel y bertambah Δy

$$u(x, y+\Delta y) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y.$$

Jadi

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y. \tag{2.4}$$

Dengan cara yang sama

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y.$$

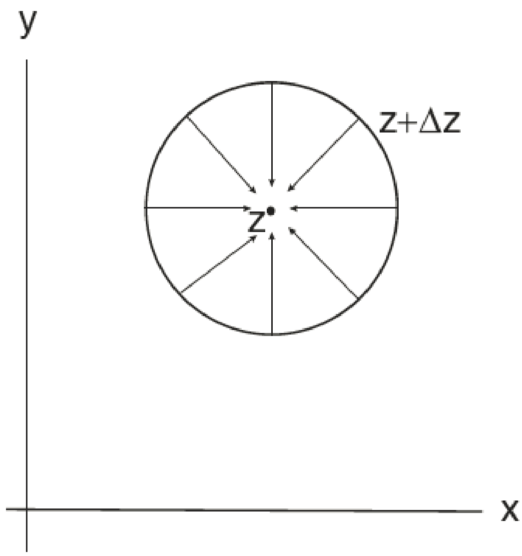
Maka turunan yang diberikan (2.3) bisa dituliskan sebagai

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta u + \mathrm{i}\Delta v}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}.$$

Bagi pembilang dan penyebut dengan Δx, kita mempunyai

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + \mathrm{i}\frac{\Delta y}{\Delta x}}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{1 + \mathrm{i}\frac{\Delta y}{\Delta x}}\left[1 + \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right].\end{aligned}$$

Terdapat lintasan yang tak hingga yang dimiliki Δz mendekati nol, tiap lintasan dikarakterisasi oleh kemiringannya $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ seperti Gambar 2.4. Agar semua lintasan



Gambar 2.4: Lintasan tak hingga Δz mendekati nol, masing-masing dikarakterisasi oleh kemiringannya.

memberikan limit yang sama $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ harus dieliminasi dari rumus ini. Ini bisa terjadi jika dan hanya jika

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)} = \mathrm{i}, \tag{2.5}$$

maka

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{1 + \mathrm{i}\frac{\Delta y}{\Delta x}} \left[1 + \mathrm{i}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2.6}$$

yang tidak bergantung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Dari (2.5), kita mempunyai

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Samakan bagian riil dan imajinernya, kita peroleh pasangan persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dua buah persamaan di atas sangatlah penting yang dinamakan persamaan Cauchy-Riemann.

Dengan persamaan Cauchy-Riemann, turunan (2.6) bisa dituliskan sebagai

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\mathrm{i}\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\mathrm{i}\partial y}. \tag{2.7}$$

Rumus (2.6) adalah turunan dengan Δz mendekati nol sepanjang sumbu riil$-x$ dan rumus (2.7) adalah turunan dengan Δz mendekati nol sepanjang sumbu imajiner$-y$. Untuk fungsi analitik, keduanya harus sama.

Jadi jika $u(x,y), v(x,y)$ kontinu dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann dalam beberapa daerah bidang kompleks, maka $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ merupakan sebuah fungsi analitik pada daerah tersebut. Dengan kata lain, persamaan Cauchy-Riemann merupakan syarat perlu dan cukup agar fungsinya bisa diturunkan (diferensiabel).

2.1.4 Persamaan Cauchy-Riemann dalam Koordinat Polar

Kita sering menjumpai fungsi $f(z)$ dalam koordinat polar, maka sebaiknya kita juga menyatakan persamaan Cauchy-Riemann dalam bentuk polar.

Karena $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$, jadi dengan aturan rantai

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta.$$

Dengan cara yang sama

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta,$$
$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta.$$

Dengan syarat Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kita mempunyai

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta,$$
$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial y}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial x}r\cos\theta.$$

Jadi

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

merupakan persamaan Cauchy-Riemann dalam bentuk polar.

Marilah kita turunkan rumus ini dari definisi turunan

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Dalam koordinat polar, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,

$$\begin{aligned}\Delta w &= \Delta u(r,\theta) + \mathrm{i}\Delta v(r,\theta),\\ \Delta z &= (r+\Delta r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\Delta\theta)} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\end{aligned}$$

Agar $\Delta z \to 0$, pertama kita ambil $\Delta\theta \to 0$ dan memperoleh

$$\Delta z = (r+\Delta r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \Delta r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

kemudian $\Delta r \to 0$, jadi

$$f'(z) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta u(r,\theta) + \mathrm{i}\Delta v(r,\theta)}{\Delta r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

Tetapi jika kita ambil $\Delta r \to 0$ terlebih dahulu

$$\Delta z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\Delta\theta)} - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Karena

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\Delta\theta)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{d}\theta}\Delta\theta = \mathrm{i}\mathrm{e}\Delta\theta$$

jadi Δz bisa dituliskan sebagai

$$\Delta z = r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Delta\theta$$

dan ketika kita mengambil limit $\Delta\theta \to 0$, turunannya menjadi

$$f'(z) = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta u(r,\theta) + \mathrm{i}\Delta v(r,\theta)}{r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Delta\theta} = \frac{1}{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right).$$

Untuk sebuah fungsi analitik, dua rumus turunan haruslah sama

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right).$$

Jadi

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

yang juga kita peroleh dari transformasi langsung.

Lebih dari itu, turunannya juga diperoleh dengan rumus yang ekivalen berikut:

$$\begin{aligned}f'(z) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right).\end{aligned}$$

2.1.5 Fungsi Analitik sebagai Fungsi z

Dalam fungsi analitik sebarang $w = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, variabel x, y bisa digantikan dengan suku yang ekivalen z, z^*:

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad \text{dan} \quad y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - z^*),$$

karena variabel kompleks $z = x + \mathrm{i}y$ dan $z^* = x - \mathrm{i}y$. Jadi sebuah fungsi analitik bisa dianggap secara formal sebagai sebuah fungsi dari z dan z^*. Untuk membuktikan bahwa w hanya bergantung z dan tidak mengandung z^*, kita cukup menghitung $\frac{\partial w}{\partial z^*}$ dan memverifikasi bahwa identik dengan nol. Sekarang dengan aturan rantai

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z^*} &= \frac{\partial(u + \mathrm{i}v)}{\partial z^*} = \frac{\partial u}{\partial z^*} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial z^*} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*}\right).\end{aligned}$$

Karena dari persamaan menyatakan x dan y sebagai z dan z^*, kita mempunyai

$$\frac{\partial x}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{\mathrm{i}}{2},$$

kita bisa menuliskan

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z^*} &= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

Karena w, dengan hipotesis, merupakan sebuah fungsi analitik, u dan v memenuhi syarat Cauchy-Riemann, oleh karena itu masing-masing kuantitas dalam kurung pada rumus terakhir hilang. Jadi

$$\frac{\partial w}{\partial z^*} = 0. \tag{2.8}$$

Jadi, w tidak bergantung z^*, yaitu, bergantung pada x dan y melalui kombinasi $x + \mathrm{i}y$.

Maka jika w merupakan fungsi analitik, maka bisa dituliskan sebagai

$$w = f(z)$$

dan turunannya sebagai

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Definisi ini secara formal identik dengan turunan sebuah fungsi variabel riil. Karena teori umum limit dinyatakan dengan nilai mutlaknya, jadi ketika berlaku untuk variabel riil, maka ini juga akan berlaku untuk variabel kompleks. Maka rumus dalam variabel riil akan memiliki teman dalam variabel kompleks. Sebagai contoh, rumus seperti

$$\frac{\mathrm{d}(w_1 \pm w_2)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} \pm \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z},$$
$$\frac{\mathrm{d}(w_1 w_2)}{\mathrm{d}z} = w_1 \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z} + w_2 \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z},$$
$$\frac{\mathrm{d}(w_1/w_2)}{\mathrm{d}z} = \frac{w_2(\mathrm{d}w_1/\mathrm{d}z) - w_1(\mathrm{d}w_2/\mathrm{d}z)}{w_2^2}, \quad w \neq 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}(w^n)}{\mathrm{d}z} = n w^{n-1} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$$

semuanya berlaku sepanjang w_1, w_2 dan w merupakan fungsi analitik.

Secara spesifik, polinomial sebarang dalam z

$$w(z) = a_n z^n + a_n - 1z^{n-1} + \cdots + a_1$$

anallitik pada semua bidang kompleks jadi merupakan fungsi keseluruhan. Turunannya adalah

$$w'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1)a_n - 1z^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Sehingga fungsi pecahan sebarang dari z (polinomial dibagi dengan polinomial) analitik pada setiap titik yang penyebutnya tak nol. Ketika penyebutnya nol, fungsinya membesar dan tidak bisa diturunkan.

Jadi nilai nol penyebut merupakan titik singular fungsi. Kenyataannya kita bisa mengambil (2.8) sebagai pernyataan alternatif syarat terdiferensialkan. Maka, fungsi dasar yang didefinisikan dalam bab sebelumnya merupakan fungsi analitik, (beberapa dengan titik singular), karena hanya merupakan fungsi z saja. Kita bisa dengan mudah membuktikan fungsi tersebut memenuhi syarat Riemann-Cauchy.

Contoh 2.1.1. Buktikan suku riil u dan suku imajiner v dari $w = z^2$ memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Carilah turunan w melalui turunan parsial u dan v.
Solusi 2.1.1. Karena

$$w = z^2 = (x + \mathrm{i}y) = \left(x^2 - y^2\right) + \mathrm{i}2xy,$$

maka bagian riil dan imajinernya

$$u\,(x, y) = x^2 - y^2, \quad v\,(x, y) = 2xy.$$

Oleh karena itu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Jadi persamaan Cauchy-Riemann terpenuhi. Fungsinya terdiferensialkan dan

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + \mathrm{i}2y = 2z$$

yang kita temukan sebelum kita menganggap z sebagai sebuah variabel.

Contoh 2.1.2. Buktikan suku riil u dan suku imajiner v dari $f(z) = \mathrm{e}^z$ memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Carilah turunan $f(z)$ melalui turunan parsial u dan v.
Solusi 2.1.2. Karena

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x (\cos + \mathrm{i} \sin y)$$

suku riil dan imajinernya adalah

$$u = \mathrm{e}^x \cos y \quad \text{dan} \quad v = \mathrm{e}^x \sin y.$$

Diperoleh:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Jadi persamaan Cauchy-Riemann terpenuhi dan

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^z$$

yang kita harapkan dengan menganggap z sebagai sebuah variabel.

Contoh 2.1.3. Buktikan suku riil u dan suku imajiner v dari $\ln z$ memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Carilah turunan $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln z$ melalui turunan parsial u dan v. (a) gunakan koordinat persegi (Cartesian), (b) gunakan koordinat polar.
Solusi 2.1.3. (a) Dengan koordinat persegi, $z = x + \mathrm{i}y$,

$$\ln z = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2} + \mathrm{i}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x} + 2n\pi\right).$$

Jadi

$$u = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}, \quad v = (\tan^{-1}\frac{y}{x} + 2n\pi)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2 + y^2)} = \frac{x}{(x^2 + y^2)}, \\
\frac{\partial y}{\partial} &= \frac{1}{2}\frac{2y}{(x^2 + y^2)} = \frac{y}{(x^2 + y^2)}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)}, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{(x^2 + y^2)}.
\end{aligned}$$

Maka
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$
Persamaan Cauchy-Riemann terpenuhi dan
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z&=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{x}{(x^2+y^2)}-\mathrm{i}\frac{y}{(x^2+y^2)}\\&=\frac{x-\mathrm{i}y}{(x^2+y^2)}=\frac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)}=\frac{1}{(x+\mathrm{i}y)}=\frac{1}{z}.\end{aligned}$$

(b) Dengan koordinat polar, $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$
$$\ln z=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)=\ln r+\mathrm{i}(\theta+2n\pi).$$
$$u=\ln r,\quad v=\theta+2n\pi$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=\frac{1}{r},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=0,\\\frac{\partial u}{\partial \theta}&=0,\quad \frac{\partial v}{\partial \theta}=1.\end{aligned}$$
Jadi syarat Cauchy-Riemann dalam koordinat polar
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0=-\frac{\partial v}{\partial r},$$
terpenuhi. Turunannya diberikan oleh
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\frac{1}{r}=\frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\frac{1}{z},$$
seperti yang diharapkan.

Contoh 2.1.4. Buktikan suku riil u dan suku imajiner v dari z^n memenuhi persamaan Cauchy-Riemann dan carilah $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^n$ melalui turunan parsial u dan v.
Solusi 2.1.4. Persoalan ini lebih mudah diselesaikan dengan koordinat polar dengan $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,
$$z^n=u(r,\theta)+\mathrm{i}v(r,\theta)=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta),$$
$$u=r^n\cos n\theta,\quad v=r^n\sin n\theta.$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r}&=nr^{n-1}\cos n\theta,\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-nr^n\sin n\theta,\\\frac{\partial v}{\partial r}&=nr^{n-1}\sin n\theta,\quad \frac{\partial v}{\partial \theta}=nr^n\cos n\theta.\end{aligned}$$

Jadi syarat Cauchy-Riemann dalam koordinat polar

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1}\cos n\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -nr^{n-1}\sin n\theta = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

terpenuhi dan turunan z^n diberikan oleh

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^n &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(nr^{n-1}\cos n\theta + \mathrm{i}nr^{n-1}\sin n\theta\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}nr^{n-1}\mathrm{e}^{-in\theta} = nrn - 1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta} = n(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{n-1} = nz^{n-1},\end{aligned}$$

seperti yang diharapkan.

2.1.6 Fungsi Analitik dan Persamaan Laplace

Fungsi analitik memiliki banyak sifat dan aplikasi penting yang menarik. Salah satunya adalah suku riil dan imajiner sebuah fungsi analitik memenuhi persamaan Laplace dua dimensi

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$

Banyak persoalan fisis merupakan persamaan Laplace, sehingga kita secara alami tertarik untuk mencari solusinya.

Jika $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ analitik, maka u dan v memenuhi syarat Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Turunkan persamaan pertama dengan x dan persamaan kedua dengan y, kita peroleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^v}{\partial y \partial x}.$$

Jumlahkan kedua persamaan, diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Sepanjang fungsinya kontinu, urutan turunan bisa ditukar

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

maka:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ini adalah persamaan Laplace untuk u. Dengan cara yang sama, jika pertama kita turunkan persamaan Cauchy-Riemann terhadap y, dan persamaan kedua terhadap x, kita juga bisa membuktikan v memenuhi persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Fungsi yang memenuhi persamaan Laplace disebut sebagai fungsi harmonik. Dua buah fungsi yang memenuhi persamaan Laplace dan juga persamaan Cauchy-Riemann disebut sebagai fungsi harmonik konjugat. Kita telah membuktikan suku riil dan imajiner fungsi analitik merupakan fungsi harmonik konjugat.

Kurva dua dimensi bisa dinyatakan dengan

$$u(x, y) = k.$$

Sebagai contoh jika $u(x, y) = x^2 + y^2$ dan $k = 4$, maka persamaan ini menyatakan sebuah lingkaran berpusat di titik asal dengan jari-jari 2. Dengan mengganti konstanta k, kita mengubah jari-jari lingkaran. Jadi persamaan $x^2 + y^2 = k$ menyatakan sebuah lingkaran berpusat di titik asal dengan berbagai jari-jari.

Tiap fungsi harmonik konjugat yang membentuk suku riil dan imajiner sebuah fungsi analitik $f(z)$ membuat sebuah kurva dalam bidang $x - y$. Yaitu, jika $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, maka $u(x, y) = k$ dan $v(x, y) = c$ dengan k dan c berupa konstanta, yaitu dua buah kurva.

Jika Δu adalah perbedaan u dari dua titik berdekatan, maka dengan (2.4)

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y.$$

Jika dua buah titik tersebut pada kurva yang sama

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = k, \quad u(x, y) = k,$$

maka

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = 0.$$

Dalam kasus ini

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y.$$

Untuk mencari kemiringan kurva ini, kita bagi kedua ruas persamaan ini dengan Δx

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y.$$

jadi kemiringan kurva $u(x,y)=k$ diberikan oleh

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_u = -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}.$$

Dengan cara yang sama, kemiringan kurva $v(x,y)=c$ diberikan oleh

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_v = -\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}.$$

Karena u dan v memenuhi persamaan Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

kemiringan kurva $v(x,y)=c$ bisa dituliskan sebagai

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_v = \frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial x}.$$

yang, pada titik bersama sebarang, hanyalah merupakan kemiringan negatif dari kurva $u(x,y)=k$. Dari geometri analitik, kita tahu dua buah kurva ini saling ortogonal (tegak lurus). Sebagai contoh, suku riil fungsi analitik z^2 adalah $u(x,y)=x^2-y^2$, kurva $u=k$ berupa hiperbola yang asimtotik terhadap garis $y=\pm x$ seperti yang ditunjukkan bidang$-z$ pada Gambar 2.1. Suku imajiner z^2 adalah $v(x,y)=2xy$, kurva $v=c$ berupa hiperbola yang asimtotik terhadap sumbu x dan y, juga ditunjukkan bidang$-z$ pada Gambar 2.1. Terlihat bahwa keduanya tegak lurus pada titik perpotongan.

Sifat fungsi analitik ini memberikan dasar metode dalam dinamika fluida, listrik statik dan cabang lain dalam fisika.

Contoh 2.1.5. Misalkan $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ merupakan sebuah fungsi analitik. Jika $u(x,y)=xy$, carilah $v(x,y)$ dan $f(z)$.

Solusi 2.1.5.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Metode 1: Mencari $f(z)$ dari turunannya

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=y-\mathrm{i}x=-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)=-\mathrm{i}z,$$

$$f(z)=-\mathrm{i}\frac{1}{2}z^2+C.$$

$$f(z)=-\frac{\mathrm{i}}{2}(x+\mathrm{i}y)^2+C=xy-\frac{\mathrm{i}}{2}(x^2-y^2)+C,$$

$$v(x,y) = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C'.$$

Metode 2: Mencari $v(x,y)$ terlebih dahulu

$$\frac{\partial v}{\partial y} = y \quad \Longrightarrow \quad v(x,y) = \int y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2}y^2 + k(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}k(k)}{\mathrm{d}x} = -x, \Longrightarrow k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C;$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$f(z) = xy + \mathrm{i}\frac{1}{2}(y^2 - x^2 + 2C),$$

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - z^*) \quad \text{sehingga} \quad f(z) = -\frac{1}{2}z^2\mathrm{i} + C'.$$

Contoh 2.1.6. Misalkan $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}(x,y)$ merupakan sebuah fungsi analitik. Jika $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, carilah $v(x,y)$ dan $f(z)$.

Solusi 2.1.6.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2 + y^2)} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Metode 1: Mencari $f(z)$ terlebih dahulu dari turunan pertamanya

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)} - \mathrm{i}\frac{2y}{(x^2 + y^2)} \\
&= 2\frac{x - \mathrm{i}y}{(x^2 - y^2)} = 2\frac{x - \mathrm{i}y}{(x - \mathrm{i}y)(x + \mathrm{i}y)} = 2\frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{2}{z},
\end{aligned}$$

$$f(z) = 2\ln z + C = \ln z^2 + C,$$

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}; \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}; \quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x},$$

$$\ln z^2 = \ln(x^2 + y^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} = \ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i}2\tan^{-1}\frac{y}{x},$$

$$v(x,y) = 2\tan^{-1}\frac{y}{x} + C.$$

Metode 2: Mencari $v(x,y)$ terlebih dahulu

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x}{(x^2 + y^2)} \quad \Longrightarrow \quad v(x,y) = \int \frac{2x}{(x^2 + y^2)} \, dy = 2\tan^{-1}\frac{y}{x} + k(x),$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 2\left(\frac{-y}{x^2}\right)\frac{1}{(1 + y^2/x^2)} + \frac{\mathrm{d}k(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)} + \frac{\mathrm{d}k(x)}{\mathrm{d}x},$$

$$v(x,y) = 2\tan^{-1}\frac{y}{x} + C.$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i}2\tan^{-1}\frac{y}{x} + \mathrm{i}C \\
&= \ln(x^2 + y^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + \mathrm{i}C \\
f(z) &= \ln z^2 + C'.
\end{aligned}$$

Contoh 2.1.7. Misalkan $f(z) = \frac{1}{z} = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, (a) buktikan bahwa persamaan Cauchy-Riemann terpenuhi; (b) buktikan secara eksplisit suku riil dan imajiner memenuhi persamaan Laplace; (c) deskripsikan kurva $u(x,y) = k$ dan $v(x,y) = c$ (d) buktikan kurva $u(x,y) = k$ dan $v(x,y) = c$ saling tegak lurus pada titik perpotongannya.

Solusi 2.1.7.

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y}.\frac{x-\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Jadi

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

(a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Jelaslah persamaan Cauchy-Riemann terpenuhi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(y^2-x^2)(-2)(2x)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2xy(-2)(2y)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}.$$

Jadi suku riil memenuhi persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^u}{\partial y^2} = 0.$$

Selanjutnya,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(2xy)(-2)(2x)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2y^3-6x^2y}{(x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y^2} = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(-x^2+y^2)(-2)(2y)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2y^3+6x^2y}{(x^2+y^2)^3}.$$

Suku imajiner juga memenuhi persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

(c) Persamaan

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = k$$

bisa dituliskan sebagai

$$x^2 + y^2 = \frac{x}{y}$$

atau

$$\left(-\frac{1}{2k}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4k^2},$$

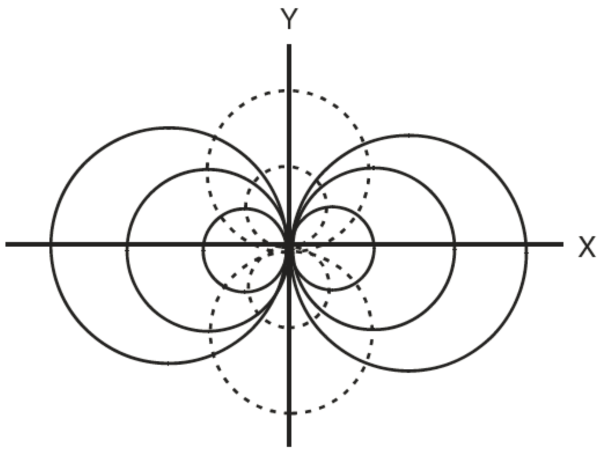
yang berupa sebuah lingkaran dengan konstanta k. Jadi $u(x, y) = k$ merupakan sebuah lingkaran berpusat pada $(\frac{1}{2k}, 0)$ dengan jari-jari $\frac{1}{2k}$. Lingkaran ini ditunjukkan Gambar 2.5 dengan garis penuh. Dengan cara yang sama

$$v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = c$$

bisa dituliskan sebagai

$$x^2 + y^2 = -\frac{y}{c} \quad \text{atau} \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}.$$

Jadi $v(x, y) = c$ berupa lingkaran berjari-jari $\frac{1}{2c}$ berpusat pada $(0, -\frac{1}{2c})$. Lingkaran



Gambar 2.5: Kurva yang mendeskripsikan suku riil dan imajiner dari $\frac{1}{z}$.

ini ditunjukkan dengan garis putus-putus pada Gambar 2.5.

(d) Pada kurva yang dinyatakan oleh

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} = k,$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 0,$$

diberikan oleh

$$\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\mathrm{d}x - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = 0.$$

diperoleh

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_u = \frac{y^2-x^2}{2xy}.$$

Dengan cara yang sama, dengan

$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} = c,$$

$$\mathrm{d}v = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x - \left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\mathrm{d}y = 0$$

dan

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_v = \frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

Karena hasil kali kemiringannya negatif 1, dua buah kurva tersebut saling tegak lurus.

Gambar 2.5 tidak lain berupa garis medan listrik dan garis ekipotensial dari sebuah garis dipol.

2.2 Integrasi Kompleks

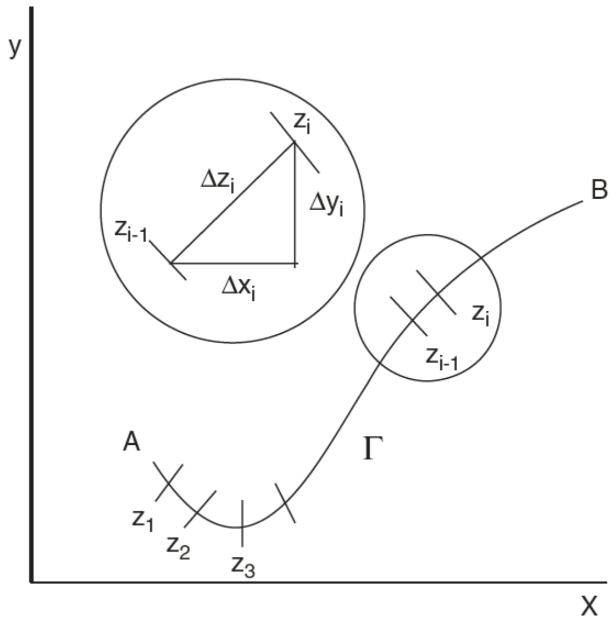
Ter berbagai teorema yang elegan berkaitan dengan mengintegrasikan fungsi analitik pada sebuah loop. Teorema ini membuat integrasi kompleks menjadi menarik dan berguna. Tetapi sebelum kita membicarakannya, kita harus mendefinisikan integrasi kompleks.

2.2.1 Integral Garis Fungsi Kompleks

Ketika sebuah variabel kompleks z bergerak dalam bidang kompleks dua dimensi, maka variabel ini membuat sebuah kurva. Jadi untuk mendefinisikan sebuah fungsi kompleks $f(z)$ antara dua buah titik A dan B, kita juga harus menentukan lintasan (yang disebut kontur) sepanjang z bergerak. Nilai integralnya akan bergantung, secara umum, terhadap kontur. Tetapi, kita akan menemukan, dalam kondisi tertentu, integralnya tidak bergantung terhadap kontur yang kita pilih.

Kita nyatakan integral sebuah fungsi kompleks $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ sepanjang kontur $\mathit{\Gamma}$ dari titik A ke titik B sebagai

$$I = \int_{A,\mathit{\Gamma}}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z.$$



Gambar 2.6: Jumlah Riemann sepanjang kontur Γ yang dibagi menjadi n segmen.

Integralnya bisa didefinisikan sebagai jumlah Riemann seperti dalam integrasi variabel riil. Konturnya dibagi menjadi n segmen seperti Gambar 2.6.

Kita membentuk penjumlahan

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta z_i,$$

dengan $z_0 = A,\ z_n = B$, dan $f(\zeta_i)$ merupakan fungsi yang dihitung di titik pada Γ antara $zi - 1$ dan z_i. Jika I_n dihitung sebagai limit ketika $n \to \infty$ dan $|\Delta z_i| \to$, maka integralnya bisa kita definisikan sebagai

$$\int_{A,\Gamma}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{|\Delta z_i| \to 0, n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\Delta z_i$$

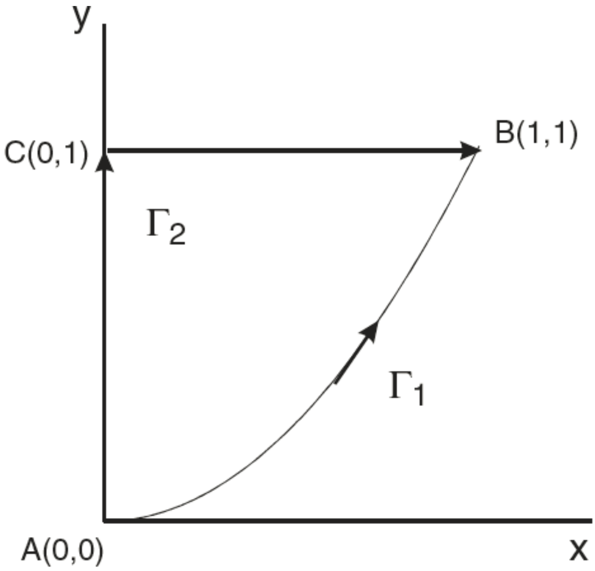
Karena $\Delta z_i = \Delta x_i + \mathrm{i}\Delta y_i$ seperti Gambar 2.6, integralnya bisa dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}\int_{A,\Gamma}^{B} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{A,\Gamma}^{B} (u + \mathrm{i}v)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\ \mathrm{d}y) = \int_{A,\Gamma}^{B} [(u\ \mathrm{d}x - v\ \mathrm{d}y) + \mathrm{i}(v\ \mathrm{d}x + u\ \mathrm{d}y)] \\ &= \int_{A,\Gamma}^{B} (u\ \mathrm{d}x - v\ \mathrm{d}y) + \mathrm{i}(v\ \mathrm{d}x + u\ \mathrm{d}y). \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Jadi integral kontur kompleksnya dinyatakan sebagai dua buah integral garis.

Contoh 2.2.1. Hitunglah integral $I = \int_A^B \, \mathrm{d}z$ dari $z_\mathrm{A} = 0$ ke $z_\mathrm{B} = 1+\mathrm{i}$, (a) sepanjang kontur $\Gamma_1 : y = x^2$, (b) sepanjang sumbu$-y$ dari 0 ke i, kemudian sepanjang garis horizontal dari i ke $1+\mathrm{i}$, as Γ_2 ditunjukkan Gambar 2.7.

Solusi 2.2.1.



Gambar 2.7: Dua kontur Γ_1 dan Γ_2 dari A ($z_A = 0$) ke B ($z_B = 1+\mathrm{i}$), Γ_1 sepanjang kurva $y = x^2$, Γ_2: pertama sepanjang sumbu$-y$ ke C, $z_C = \mathrm{i}$ kemudian sepanjang sumbu horizontal ke B.

$$f(z) = z^2 = (x+\mathrm{i}y)^2 = (x^2-y^2) + \mathrm{i}2xy = u + \mathrm{i}v,$$

$$\int_{A,\Gamma}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{A,\Gamma}^{B} [(x^2-y^2)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y] + \mathrm{i} + \int_{A,\Gamma}^{B} [2xy\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y].$$

(a) Sepanjang Γ_1, $\quad y = x^2,\ \mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$

$$\int_{A,\Gamma_1}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 [(x^2-x^4)\,\mathrm{d}x - 2xx^2 2x\,\mathrm{d}x] + \mathrm{i}\int_0^1 [2xx^2\,\mathrm{d}x + (x^2-x^2)2x\,\mathrm{d}x]$$
$$= \int_0^1 (x^2-5x^2)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_0^1 (4x^2-2x^5)\mathrm{d}x = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

(b) Misalkan $z_C = \mathrm{i}$ seperti pada Gambar 2.7. Jadi

$$\int_{A,\Gamma_2}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{A,\Gamma_2}^{C} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C,\Gamma_2}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dari A ke C: $x = 0,\ \mathrm{d}x = 0$

$$\int_{C,\Gamma_2}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (x^2-1)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3} + \mathrm{i}$$

Dari C ke B: $y = 1, \mathrm{d}y = 0$

$$\int_{A,\Gamma_2}^{B} f(z)\ \mathrm{d}z = -\frac{1}{3}\mathrm{i} - \frac{2}{3} + \mathrm{i} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

Integral sepanjang Γ_1 dan Γ_2 adalah sama.

2.2.2 Bentuk Parametrik Integral Garis Kompleks

Jika sepanjang kontur Γ, z dinyatakan secara parametrik, integral garisnya bisa ditransformasikan menjadi sebuah integra; biasa dengan sebuah variabel bebas. Jika $z = z(t)$, dengan t sebuah parameter, dan $A = z(t_A), (B) = z(t_B)$, maka

$$\int_{A}^{B} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{t_A}^{t_B} f(z(t))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

Sebagai contoh, pada Γ_1 dari contoh terakhir, $y = x^2$, kita bisa memilih $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ dengan $x(t) = t$ dan $y(t) = t^2$. Diperoleh $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 1 + \mathrm{i}2t$ dan

$$\begin{aligned}\int_{A,\Gamma_1}^{B} z^2\ \mathrm{d}z &= \int_0^1 (t + \mathrm{i}t^2)^2(1 + \mathrm{i}2t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 [(t^2 - 5t^2) + \mathrm{i}(4t^2 - 2t^5)]\ \mathrm{d}t = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama pada Γ_2 dari contoh terakhir, dari A ke C kita bisa memilih $z(t) = \mathrm{i}t$ dengan $0 \leq t \leq 1$ dan $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}$. Dari C ke B kita bisa memilih $z(t) = (t-1)+\mathrm{i}$ dengan $1 \leq t \leq 2$ dan $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 1$. Jadi

$$\begin{aligned}\int_{A,\Gamma_2}^{B} z^2\ \mathrm{d}z &= \int_0^1 (\mathrm{i}t)^2\ \mathrm{i}\ \mathrm{d}t + \int_1^2 (t - 1 + \mathrm{i})^2\ \mathrm{d}t. \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{i} - \frac{2}{3} + \mathrm{i} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Parameterisasi Kontur Lingkaran

Sebuah kontur lingkaran bisa dengan mudah diparameterisasi dengan variabel sudut koordinat polar. Ini merupakan hal penting karena dengan prinsip deformasi kontur, yang akan kita lihat, integrasi kontur lain juga bisa dilakukan dengan mengubah konturnya menjadi sebuah lingkaran.

Perhatikan integral $I = \oint_C f(z)\mathrm{d}z$, dengan C merupakan sebuah lingkaran berjari-jari r, berpusat di titik asal. Kita bisa menyatakan z sebagai

$$\begin{aligned}z(\theta) &= r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} &= -r\sin\theta + \mathrm{i}r\cos\theta = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\end{aligned}$$

Ini berarti $\mathrm{d}z = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$, sehingga integralnya menjadi

$$I = \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Contoh berikut menggambarkan bagaimana prosedur ini bekerja.

Contoh 2.2.2. Hitung integral $\oint_C z^n \mathrm{d}z$, dengan n bilangan bulat dan C merupakan sebuah lingkaran berjari-jari r, berpusat di titik asal.

Solusi 2.2.2.

$$\oint_C z^n\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}r^{n+1}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Untuk $n \neq -1$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\mathrm{i}(n+1)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\mathrm{i}(n+1)}[1-1] = 0.$$

Untuk $n = 1$

$$\int_0^{2\pi} (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}.$$

Ini berarti

$$\oint_c z^n\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{for} \quad n \neq -1,$$
$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\mathrm{i}.$$

Perhatikan bahwa hasilnya tidak bergantung jari-jari r.

Beberapa Sifat Integral Garis Kompleks

Bentuk parametrik dari integral garis kompleks membuat kita bisa melihat dengan cepat banyak rumus integral biasa variabel riil bisa secara langsung digunakan dalam integrasi kompleks. Sebagai contoh, integral kompleks dari B ke A sepanjang lintasan Γ yang sama diberikan oleh ruas kanan (2.10) dengan t_A dan t_B ditukar, sehingga ada tanda negatif pada persamaan. Jadi

$$\int_{A,\Gamma}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{B,\Gamma}^{A} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dengan cara yang sama, jika C pada Γ, maka

$$\int_{A,\Gamma}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{A,\Gamma}^{C} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C,\Gamma}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Jika integral dari A ke B sepanjang Γ_1 dan dari B kembali ke A sepanjang kontur berbeda Γ_2, kita bisa menuliskan jumlah dua integralnya sebagai

$$\int_{A,\Gamma_1}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{A,\Gamma_2}^{A} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

dengan $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ dan simbol Γ untuk menegaskan integrasinya berlawanan arah jarum jam sepanjang kontr tertutup Γ. Jadi

$$\begin{aligned}\oint_{\text{c.c.w}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{A,\Gamma_1}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{B,\Gamma_2}^{A} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= -\int_{B,\Gamma}^{A} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{A,\Gamma}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z = -\oint_{\text{c.w}} f(z)\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

dengan c.c.w berarti *counter clockwise*, berlawanan arah jarum jam dan c.w berarti *clockwise* searah jarum jam.

Kita juga bisa membuktikan

$$\left| \int_{A,\Gamma}^{B} f(z) \right| \mathrm{d}z \leq ML, \tag{2.11}$$

dengan M adalah nilai maksimum dari $|f(z)|$ pada Γ dan L adalah panjang Γ. Ini karena

$$\left| \int_{t_A}^{t_B} f(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right| \leq \int_{t_A}^{t_B} \left| f(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t,$$

yang merupakan generalisasi $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$. Dengan definisi M, kita mempunyai

$$\int_{t_B}^{t_B} \left| f(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \leq M \int_{t_A}^{t_B} \left| \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t = M \int_{A}^{B} |\mathrm{d}| = ML.$$

Jadi dengan (2.10), kita mempunyai

$$\left| \int_{A}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int_{t_A}^{t_B} f(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \right| \leq ML.$$

2.3 Teorema Integral Cauchy

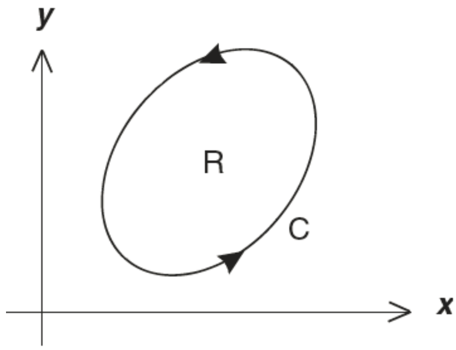
Seperti yang sudah kita lihat integrasi z^2 sepanjang Γ_1 dan Γ_2 pada Gambar 2.7 persis sama. Jadi integrasi pada sebuah loop tertutup dari A ke B sepanjang Γ_1 dan kembali dari B ke A sepanjang Γ_2 sama dengan nol. Pada 1825, Cauchy membuktikan sebuah teorema yang memungkinkan kita melihat hal ini merupakan yang kita tinjau tanpa melakukan integrasi. Sebelum kita membicarakan teorema, marilah kita ulang lemma Green pada variabel riil.

2.3.1 Lemma Green

Ter hubungan penting yang mengijinkan kita mentransformasikan sebuah integral garis menjadi sebuah integral luas untuk garis dan luas pada bidang$-xy$. Ini sering disebut sebagi lemma Green yaitu

$$\oint_C [P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y] = \iint_R \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2.12}$$

dengan C kurva tertutup yang di sekeliling R. Kurva C berlawanan arah jarum jam, yaitu dengan daerah R selalu ke kiri seperti Gambar 2.8.



Gambar 2.8: Kontur tertutup C dari integral garis dalam lemma Green. C berlawanan arah jarum jam dan didefinisikan sebagai arah positif terhadap arah interior dari R.

Untuk membuktikan lemma Green, marilah kita gunakan Gambar 2.9, bagian (a) untuk melakukan integrasi ruas pertama integral luas lipat dua

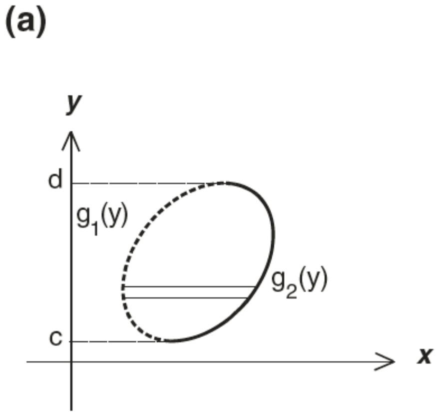
$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial Q(x,y)}{\partial}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_c^d \left[\int_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \\ &= \int_c^d [Q(x,y)]_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Sekarang

$$\begin{aligned}\int_c^d [Q(x,y)]_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)}\,\mathrm{d}y &= \int_c^d Q(g_2(y),y)\,\mathrm{d}y - \int_c^d Q(g_1(y),y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d Q(g_2(y),y)\,\mathrm{d}y + \int_d^c Q(g_1(y),y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Kontur pada integral garis terakhir dari $y = c$ melalui $g_2(y)$ ke $y = d$ dan kembali melalui $g_1(y)$ ke $y = c$. Jelaslah ini adalah integral loop tertutup yang berlawanan arah jarum jam

$$\iint_R \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\mathrm{c.c.w}} Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{2.13}$$



Gambar 2.9: Kontur yang sama tetapi dengan dua cara berbeda untuk melakukan integral lipat dua dari lemma Green.

Sekarang kita menggunakan Gambar 2.9, bagian (b) untuk menghitung luas integral lipat dua

$$\iint_R \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_a^b [P(x,y)]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\int_a^b [P(x,y)]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b P(x,f_2(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b P(x,f_1(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b P(x,f_2(x))\,\mathrm{d}x + \int_b^a P(x,f_2(x))\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Dalam kasus ini kontur dari $x = a$ melalui $f_2(x)$ ke $x = b$ dan kembali ke $x = a$ melalui $f_1(x)$. Jadi searah jarum jam

$$\iint {}_R \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\text{c.w}} P(x,y)\mathrm{d}x = -\oint_{\text{c.c.w.}} P(x,y)\mathrm{d}x. \tag{2.14}$$

Dalam langkah terakhir kita sudah mengubah tanda untuk membuatnya berlawanan arah jarum jam.

Kurangkan (2.14) dari (2.13), kita mempunyai lemma Green

$$\iint_R \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\text{c.c.w.}} [Q(x,y)\,\mathrm{d}y + P(x,y)\,\mathrm{d}x]$$

2.3.2 Teorema Cauchy-Goursat

Sebuah teorema penting dalam integrasi kompleks adalah sebagai berikut:

Jika C berupa kontur tertutup dan $f(z)$ analitik di dalam dan pada C, maka

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{2.15}$$

yang dikenal sebagai teorema Cauchy. Buktinya adalah sebagai berikut. Kita mulai dengan

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = \oint_C (u\ \mathrm{d}x - v\ \mathrm{d}y) + \mathrm{i}\oint_C (v\ \mathrm{d}x + u\ \mathrm{d}y), \tag{2.16}$$

gunakan lemma Green (2.12) dan kita identifikasi P sebagai u dan Q sebagai $-v$, kita mempunyai

$$\oint_C (u\ \mathrm{d}x - v\ \mathrm{d}y) = \iint_R \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Karena $f(z)$ analitik, jadi u dan v memenuhi syarat Cauchy-Riemann. Secara khusus

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

jadi integral luas lipat duanya sama dengan nol, maka

$$\oint_C (u\ \mathrm{d}x - v\ \mathrm{d}y) = 0$$

Dengan cara yang sama, jika Q sebagai u dan P sebagai v

$$\oint_C (v\ \mathrm{d}x + u\ \mathrm{d}y) = \iint_R \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$$

Karena syarat Cauchy- Riemann lainnya

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

integral ruas kirinya sama dengan nol

$$\oint_C (v\ \mathrm{d}x + u\ \mathrm{d}y) = 0$$

Jadi kedua buah integral pada ruas kanan (2.16) sama dengan nol, maka

$$\oint_C f(z)\ \mathrm{d}z = 0,$$

yang dikenal sebagai teorema integral Cauchy.

Dalam pembuktian ini, kita telah menggunakan lemma Green yang mensyaratkan turunan pertama u dan v kontinu. Jadi secara implisit kita telah mengasumsikan turunan $f(z)$ kontinu. Pada 1903, Gourast membuktikan teorema ini tanpa mengasumsikan kontinuitas dari $f(z)$. Maka teorema ini dikenal juga sebagai teorema Cauchy-Gourast. Secara matematik, penghilangan asumsi kontinuitas oleh Gourast pada pembuktian sangatlah penting karena hal ini mengijinkan kita memperoleh turunan fungsi analitik adalah analitik dan secara otomatis kontinu. Bukti Gourast bisa dibaca pada *Complex Variables and Applications* oleh J.W. Brown and R.V. Churchill Complex Variable and Applications, 5th edn. (McGraw-Hill, New York 1989).

2.3.3 Teorema Kalkulus Fundamental

Jika kontur tertutup Γ dibagi menjadi dua Γ_1 dan Γ_2, seperti Gambar 2.7, dan $f(z)$ analitik pada dan di antara Γ_1 dan Γ_2, maka teorema integral Cauchy bisa dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{A,\Gamma_1}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{B\Gamma_2}^{A} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{A\Gamma_1}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{A\Gamma_2}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,\end{aligned}$$

dengan tanda negatif muncul karena kita telah menukar batas integrasi pada integral terakhir. Jadi kita mempunyai

$$\int_{A\Gamma_1}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{A\Gamma_2}^{B} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{2.17}$$

menunjukkan bahwa nilai integral garis antara dua buah titik bebas terhadap lintasan yang diberikan integran yang berupa fungsi analitik dalam domain pada dan di antara kontur.

Dengan hal ini, kita bisa membuktikan, sepanjang $f(z)$ analitik pada sebuah daerah mengandung A dan B

$$\int_A^B f(z)\,\mathrm{d}z = F(B) - F(A),$$

dengan

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Integral

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')\,\mathrm{d}z' \tag{2.18}$$

secara unik mendefinisikan fungsi $F(z)$ jika z_0 merupakan titik tertentu dan $f(z)$ analitik pada semua daerah yang mengandung lintasan antara z_0 dan z. Dengan cara yang sama, kita bisa mendefinisikan

$$F(z+\Delta z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(z')\,\mathrm{d}z' = \int_{z_0}^{z} f(z')\,\mathrm{d}z' + \int_{z}^{z+\Delta z} f(z')\,\mathrm{d}z'.$$

Jelaslah

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z')\,\mathrm{d}z'.$$

Untuk Δz yang kecil, ruas kanan menjadi

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z')\mathrm{d}z' \to f(z)\Delta z,$$

yang mengimplikasikan

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z).$$

Jadi

$$\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}=f(z)$$

diperoleh teorema kalkulus fundamental:

$$\int_A^B f(z)\mathrm{d}z=\int_A^B \mathrm{d}F(z)=F(B)-F(A).$$

Contoh 2.3.1. Carilah nilai integral $\int_0^{1+\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z$.

Solusi 2.3.1.

$$\int_0^{1+\mathrm{i}} z^2\mathrm{d}z=\left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^{1+\mathrm{i}}=\frac{1}{3}(1+\mathrm{i})^3=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

Perhatikan bahwa hasilnya sama dengan Contoh 2.2.1.

Contoh 2.3.2. Carilah nilai integral berikut:

$$I_1=\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\cos z\mathrm{d}z,\quad I_2=\int_{4+\pi\mathrm{i}}^{4-3\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{z/2}\,\mathrm{d}z.$$

Solusi 2.3.2.

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}\cos z\mathrm{d}z=[\sin z]_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}}=\sin(\pi\mathrm{i})-\sin(-\pi\mathrm{i})\\&=2\sin(\pi\mathrm{i})=2\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}\pi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}\pi)}\right)=\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)\mathrm{i}\simeq 23.097\mathrm{i}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2&=\int_{4+\pi\mathrm{i}}^{4-3\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{z/2}\,\mathrm{d}z=\left[2\mathrm{e}^{z/2}\right]_{4+\pi\mathrm{i}}^{4-3\pi\mathrm{i}}=2\left(\mathrm{e}^{2-\mathrm{i}3\pi/2}-\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}3\pi/2}\right)\\&=2\mathrm{e}^2\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/2}\right)=2\mathrm{e}^2(\mathrm{i}-\mathrm{i})=0.\end{aligned}$$

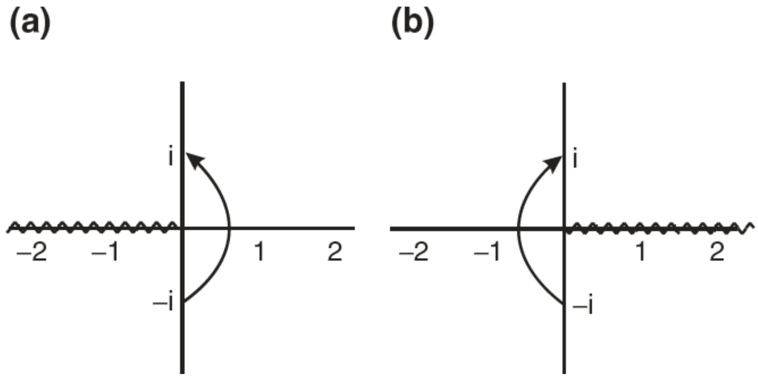
Contoh 2.3.3. Carilah nilai integral berikut:

$$\int_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Solusi 2.3.3. Karena $z=0$ merupakan sebuah titik singular, lintasan integrasinya tidak melalui titik asal. Selanjutnya

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{z}=\ln z+C$$

dengan $\ln z$ berupa fungsi bernilai jamak, jadi ter potongan cabang. Untuk menghitung integral berhingga ini kita harus menentukan lintasan z dari $-\mathrm{i}$ ke i. Ter dua buah kemungkinan dalam (a) dan (b) gambar berikut:



(a) Dari $-\mathrm{i}$ ke i di sebelah kanan bidang kompleks, kita harus mengambil sumbu riil negatif sebagai potongan cabang. Dalam cabang utama, $-\pi < \theta < \pi$. Jadi

$$\int_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = [\ln z]_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} = [\ln \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]_{\theta=-\frac{1}{2}\pi}^{\theta=\frac{1}{2}\pi} = [\mathrm{i}\theta]_{\theta=-\frac{1}{2}\pi}^{\theta=\frac{1}{2}\pi} = \mathrm{i}\frac{1}{2}\pi + \mathrm{i}\frac{1}{2}\pi = \mathrm{i}\pi.$$

(b) Dari $-\mathrm{i}$ ke i di sebelah kiri bidang kompleks, kita harus mengambil sumbu riil positif sebagai potongan cabang. Dalam cabang utama, $0 < \theta < 2\pi$. Jadi

$$\int_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = [\ln z]_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} = [\ln \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]_{\theta=\frac{3}{2}\pi}^{\theta=\frac{1}{2}\pi} = [\mathrm{i}\theta]_{\theta=-\frac{1}{2}\pi}^{\theta=\frac{1}{2}\pi} = \mathrm{i}\frac{1}{2}\pi + \mathrm{i}\frac{3}{2}\pi = -\mathrm{i}\pi.$$

2.4 Konsekuensi Teorema Cauchy

2.4.1 Prinsip Deformasi Kontur

Ter konsekuensi praktis langsung dari teorema integral Cauchy. Kontur integral kompleks bisa dideformasi sebarang melalui daerah analitik tanpa mengubah nilai integral.

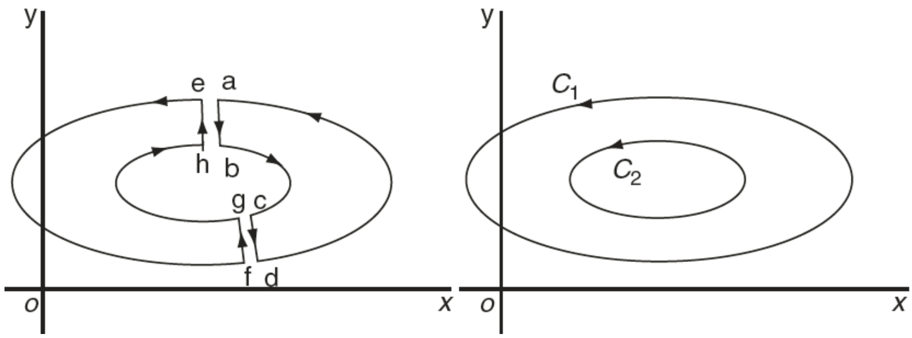
Perhatikan integrasi melalui dua buah kontur tampak di sisi kiri Gambar 2.10. Jika $f(z)$ analitik maka

$$\oint_{abcda} f(z)\mathrm{d}z = 0, \tag{2.19}$$

$$\oint_{efghe} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{2.20}$$

Secara alami jumlahnya juga nol

$$\oint_{abcda} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{efghe} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{2.21}$$



Gambar 2.10: Deformasi kontur.

Perhatikan integral melalui ab dan he arahnya berlawanan. Jika ab berhimpit he, kontribusinya akan saling menghilangkan. Jadi jika jarak ab dan he, dan antara cd dan fg mendekati nol, jumlah integralnya menjadi jumlah integral sepanjang kontur luar C_1 dan integral sepanjang kontur dalam C_2 tetapi dalam arah berlawanan. Jika kita rubah arah C_2, kita harus mengubah tanda integral. Jadi

$$\oint_{abcda} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{efghe} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Diperoleh

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z, \tag{2.22}$$

di sini kita telah membuktikan bahwa integral garis sebuah fungsi analitik melalui kurva tertutup sebarang C_1 sama dengan integral garis fungsi yang sama melalui kurva tertutup lain C_2 sehingga C_1 bisa terdeformasi kontinu sepanjang $f(z)$ analitik antara C_1 dan C_2 dan nilainya tunggal pada C_1 dan C_2.

2.4.2 Rumus Integral Cauchy

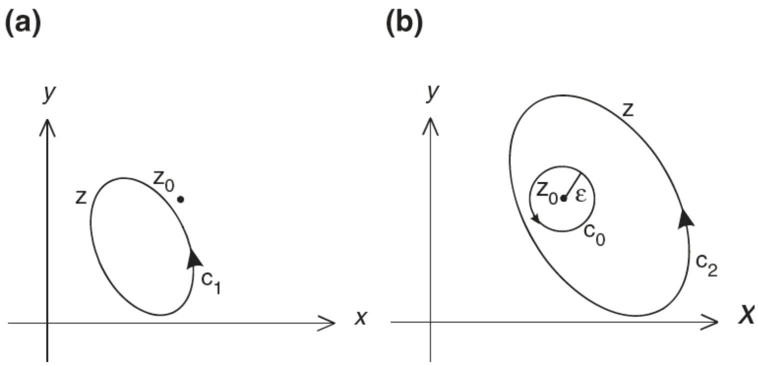
Rumus integral Cauchy merupakan ekstensi alami dari teorema integral Cauchy. Perhatikan integral

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z, \tag{2.23}$$

dengan $f(z)$ analitik di setiap tempat dalam bidang$-z$, dan C_1 merupakan kontur tertutup yang tidak mengandung titik z_0 seperti Gambar 2.11. **(a)**.

Karena $(z - z_0)^{-1}$ anlitik di setiap tempat kecuali pada $z = z_0$, dan z_0 di luar C_1, jadi $f(z)/(z - z_0)$ anlitik di dalam C_1. Dari teorema integral Cauchy

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 0. \tag{2.24}$$



Gambar 2.11: Kontur integrasi tertutup. **(a)** Titik singular z_0 di luar kontur C_1. **(b)** Kontur C_2 melingkupi z_0, C_2 bisa dideformasi menjadi sebuah lingkaran C_0 tanpa mengubah nilai integral.

Perhatikan integral kedua

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z, \tag{2.25}$$

mirip dengan yang pertama, kecuali kontur C_2 melingkupi z_0, seperti Gambar 2.11. **(b)**. Integran pada integral ini tidak analitik pada $z = z_0$ yang berada di dalam C_2, jadi kita tidak bisa menggunakan teorema integral Cauchy untuk mengatakan $I_2 = 0$. Tetapi, integrannya analitik di setiap tempat kecuali pada titik $z = z_0$, jadi kita bisa mendeformasi kontur menjadi sebuah lingkaran infinitesimal berjari-jari ε berpusat pada z_0 tanpa mengubah nilainya

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z. \tag{2.26}$$

Deformasinya juga ditunjukkan Gambar 2.11. **(b)**.

Integral ini bisa dihitung. Untuk melihatnya lebih jelas, kita memperbesar kontur dalam Gambar 2.12.

Karena z berada pada lingkaran C_0, dengan notasi ditunjukkan Gambar 2.12, jelaslah bahwa

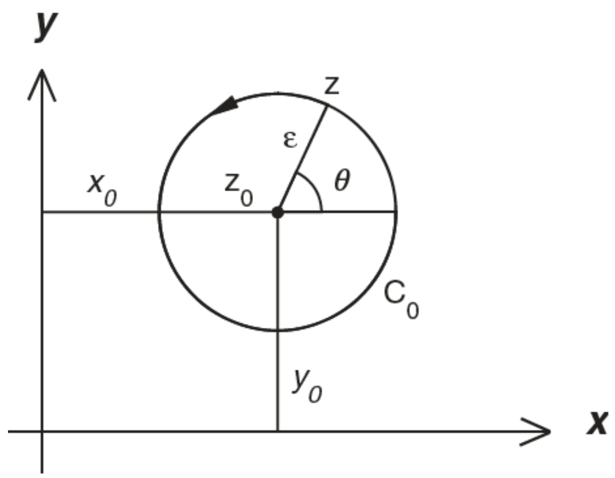
$$\begin{aligned} z &= x + \mathrm{i}y, \\ x &= x_0 + \varepsilon \cos\theta, \\ y &= y_0 + \varepsilon \sin\theta. \end{aligned}$$

Jadi

$$z = (x_0 + \mathrm{i}y_0) + \varepsilon(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{2.27}$$

Maka

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0 + \mathrm{i}y_0, \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \end{aligned}$$



Gambar 2.12: Kontur lingkaran untuk rumus integral Cauchy.

kita bisa menuliskan

$$z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}. \tag{2.28}$$

Pada C_0, ε konstan dan θ dari 0 sampai 2π. Jadi

$$dz = i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta \tag{2.29}$$

dan

$$\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta. \tag{2.30}$$

Ketika $\varepsilon \to 0$, $\quad f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) \to f(z_0)$ dan bisa diambil di luar integral

$$\begin{aligned} I_2 &= \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = i f(z_0) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0), \end{aligned} \tag{2.31}$$

dengan C lintasan tertutup berlawanan arah jarum jam yang melingkupi z_0, dan $f(z)$ analitik di dalam C. hasil ini dikenal sebagai rumus integral Cauchy, biasanya dituliskan sebagai

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{2.32}$$

2.4.3 Turunan Fungsi Analitik

Jika kita menurrunkan dua ruas rumus integral Cauchy, menukar urutan turunan dan integral, kita peroleh

$$f'(z_0) \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \frac{d}{dz_0} \frac{1}{(z - z_0)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz.$$

Untuk memperoleh rumus ini dengan lebih baik, kita bisa mulai dengan rumus formal turunan

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0)}{\Delta z_0} = \lim_{\Delta z_0 \to 0} \frac{1}{\Delta z_0} [f(z_0 + \Delta z_0) - f(z_0)] \\
&= \lim_{\Delta z_0 \to 0} \frac{1}{\Delta z_0} \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - \Delta z_0} \,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z \right].
\end{aligned}$$

Sekarang

$$\begin{aligned}
&\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - \Delta z_0} \,\mathrm{d}z - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = \oint_C f(z) \left(\frac{1}{z - z_0 - \Delta z_0} - \frac{1}{z - z_0} \right) \mathrm{d}z \\
&= \oint_C f(Z) \frac{\Delta z_0}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)} \,\mathrm{d}z = \Delta z_0 \oint_C \frac{f(z) \mathrm{d}z}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)}.
\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta z_0 \to 0} \frac{1}{\Delta z_0} \left[\frac{\Delta z_0}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(Z) \mathrm{d}z}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)} \right] \\
&= \lim_{\Delta z_0 \to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z) \mathrm{d}z}{(z - z_0 - \Delta z_0)(z - z_0)} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama kita bisa membuktikan bahwa

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} \,\mathrm{d}z \tag{2.33}$$

dan secara umum

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z. \tag{2.34}$$

Jadi kita telah memperoleh fakta bahwa fungsi analitik memiliki turunan untuk semua orde. Semua turunan fungsi analitik juga analitik. Hal ini agak berbeda dengan pengalaman kita pada variabel riil, ketika kita mempunyai sebuah fungsi yang turunan pertama dan keduanya ada, tetapi turunan ketiganya tidak terdefinisi.

Rumus integral Cauchy mengijinkan kita untuk menentukan nilai fungsi analitik pada titik interior z sebarang pada daerah yang terhubung sederhana dengan mengintegrasikan pada kurva C yang mengelilingi daerah tersebut. Nilai pada batas saja yang digunakan. Jadi, kita perhatikan jika sebuah fungsi analitik ditentukan pada semya batas daerah yang terhubung sederhana, fungsi dan semua turunannya bisa ditentukan pada semua daerah interiornya. Rumus integral Cauchy bisa dituliskan dalam bentuk

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta, \tag{2.35}$$

dengan z merupakan titik interior sebarang di dalam C. Variabel kompleks ζ pada C dan berupa variabel dummy integrasi yang hilang dalam proses integrasi. Rumus integral Cauchy dalam bentuk ini biasanya digunakan.

Contoh 2.3.1. Hitunglah integral

$$\text{(a)} \oint \frac{z^2 \sin \pi z}{z - \frac{1}{2}}\, \mathrm{d}z, \qquad \text{(b)} \oint \frac{\cos z}{z^3}\, \mathrm{d}z.$$

mengelilingi lingkaran $|z| = 1$.
Solusi 2.3.1. (a) Titik singular $z = \frac{1}{2}$ berada di dalam lingkaran $|z| = 1$. Jadi

$$\oint \frac{z^2 \sin \pi z}{z - \frac{1}{2}}\, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}[z^2 \sin \pi z]_{1/2} = 2\pi\mathrm{i} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin\left(\pi\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi\mathrm{i}.$$

(b) Titik singular $z = 0$ di dalam lingkaran $|z| = 1$. Jadi

$$\oint \frac{\cos z}{z^3}\, \mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\right]_{z=0} = \pi\mathrm{i}[-\cos(0)] = -\pi\mathrm{i}.$$

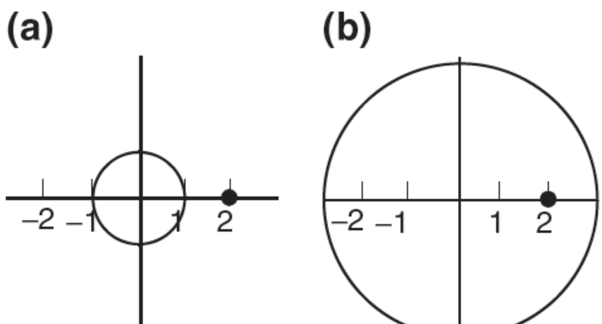
Contoh 2.3.2. Hitunglah integral

$$\oint \frac{z^2 - 1}{(z-2)^2}\, \mathrm{d}z$$

mengelilingi (a) lingkaran $|z| = 1$, (b) lingkaran $|z| = 3$.
Solusi 2.3.2. (a) Titik singular $z = 2$. Titik ini di luar $|z| = 1$, seperti Gambar 2.13 **(a)**. Di dalam lingkaran $|z| = 1$, fungsi $\frac{z^2-1}{(z-2)^2}$ analitik, jadi

$$\oint \frac{z^2 - 1}{(z-2)^2}\, \mathrm{d}z.$$

(b) Karena $z = 2$ di dalam lingkaran $|z| = 3$, seperti ditunjukkan Gambar 2.13 **(b)**,



Gambar 2.13: **(a)** $|z| = 1$, **(b)** $|z| = 3$.

kita bisa menuliskan integralnya sebagai

$$\oint \frac{z^2-1}{(z-2)^2}\,\mathrm{d}z = \oint \frac{f(z)}{(z-2)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f'(2)$$

dengan

$$f(z) = z^2 - 1, \quad f'(z) = 2z, \quad \text{and} \quad f'(2) = 4.$$

Jadi

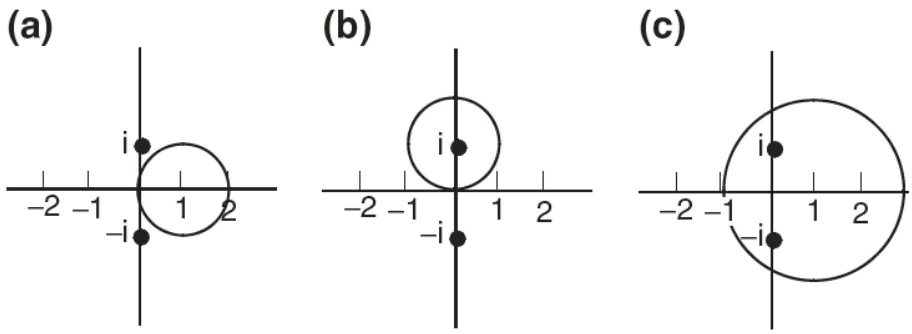
$$\oint \frac{z^2-1}{(z-2)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}4 = 8\pi\mathrm{i}.$$

Contoh 2.3.3. Hitunglah integral

$$\oint \frac{z^2-1}{(z-2)^2}\,\mathrm{d}z$$

(a) mengelilingi lingkaran $|z-1|=1$, (b) mengelilingi lingkaran $|z-\mathrm{i}|=1$, (c) mengelilingi lingkaran $|z-1|=2$.

Solusi 2.3.3. Bukan hanya hubungan antara titik singular dan kontur yang jelas dari contoh sebelumnya, untuk menyelesaikan persoalan integrasi kontur tertutup, paling baik yang dilakukan pertama kali adalah mencari titik singular (yang dikenal sebagai kutub) dan menunjukkannya dalam bidang kompleks dan menggambar konturnya. Dalam kasus khusus ini, titik singulatnya adalah pada $z=\pm\mathrm{i}$, yang merupakan solusi dari $z^2+1=0$. Tiga buah konturnya ditunjukkan Gambar 2.14. (a) Terlihat bahwa



Gambar 2.14: **(a)** $|z-1|=1$, **(b)** $|z-\mathrm{i}|=1$, **(c)** $|z-1|=2$.

kedua titik singular di luar kontur $|z1|=1$, jadi

$$\oint \frac{z^2}{(z-2)^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

(b) dalam kasus ini, hanya titik singular $z=\mathrm{i}$ di dalam kontur, jadi kita bisa menuliskan

$$\oint \frac{z^2}{(z-2)^2}\,\mathrm{d}z = \oint \frac{z^2}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z = \oint \frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z,$$

dengan

$$f(z) = \frac{z^2}{(z + \mathrm{i})}.$$

Diperoleh

$$\oint \frac{z^2}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \oint \frac{f(z)}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}f(\mathrm{i})2\pi\mathrm{i}\frac{(\mathrm{i})^2}{\mathrm{i}-\mathrm{i}} = -\pi.$$

(c) Dalam kasus ini kedua titik singular di dalam kontur. Untuk menggunakan rumus integral Cauchy, pertama kita ambil pecahan parsial dari $\frac{1}{z^2+1}$

$$\begin{aligned}\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} &= \frac{A}{(z-\mathrm{i})} + \frac{B}{(z+\mathrm{i})}\\ &= \frac{A(z+\mathrm{i}) + B(z-\mathrm{i})}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \frac{(A+B)z + (A-B)\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}.\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{gathered}A + B = 0, \quad (A+B)\mathrm{i} = 1,\\ B = -1, \quad 2A\mathrm{i} = 1,\\ A = \frac{1}{2\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}, \quad B = \frac{\mathrm{i}}{2}.\end{gathered}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned}\oint \frac{z^2}{z^2+1}\,\mathrm{d}z &= \oint z^2\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{(z-\mathrm{i})} + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{(z+\mathrm{i})}\right)\mathrm{d}z\\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\oint \frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{i}}{2}\oint \frac{z^2}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Masing-masing integral pada ruas kanan hanya memiliki sebuah titik singular di dalam kontur. Menurut rumus integral Cauchy

$$\begin{aligned}\oint \frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{i})^2 = -2\pi\mathrm{i},\\ \oint \frac{z^2}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{i})^2 = -2\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Jadi

$$\oint \frac{z^2}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{i}}{2}(-2\pi\mathrm{i}) + \frac{\mathrm{i}}{2}(-2\pi\mathrm{i}) = 0.$$

Contoh 2.3.4. Hitunglah integral

$$\oint \frac{z-1}{2z^2+3z-2}\,\mathrm{d}z$$

mengelilingi persegi yang titik-titik sudutnya $(1,1),\ (-1,1),\ (-1,-1),\ (1,-1)$.

Solusi 2.3.4. Untuk mencari titik singular, kita ambil penyebutnya sama dengan nol

$$2z^2 + 3z - 2 = 0$$

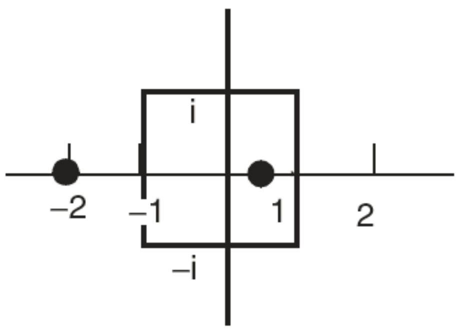
sehingga titik singularnya pada

$$z = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{9+16}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \\ -2, \end{cases} .$$

Penyebutnya bisa dituliskan sebagai

$$2z^2 + 3z - 2 = 2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+2).$$

Titik singular dan konturnya ditunjukkan gambar berikut:



Karena hanya titik singular pada $z = \frac{1}{2}$ di dalam kontur, kita bisa menuliskan integralnya sebagai

$$\oint \frac{z-1}{2z^2+3z-2}\,\mathrm{d}z = \oint \frac{z-1}{2(z-\frac{1}{2})(z+2)}\,\mathrm{d}z = \oint \frac{f(z)}{(z-\frac{1}{2})}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f\left(\frac{1}{2}\right)$$

dengan

$$f(z) = \frac{z-1}{2(z+2)}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{10}.$$

Jadi

$$\oint \frac{z-1}{2z^2+3z-2}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{5}\pi \mathrm{i}.$$

Berbagai teorema penting bisa dengan mudah dibuktikan dengan rumus integral Cauchy dan turunannya.

Teorema Nilai Rata-rata Gauss

Jika $f(z)$ analitik di dalam dan pada sebuah lingkaran C berpusat pada z_0, maka nilai rata-rata $f(z)$ pada C adalah $f(z0)$.

Teorema ini mengikuti langsung rumus integral Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z.$$

Misalkan lingkaran C adalah $|z - z_0| = r$, jadi

$$z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \text{and} \quad \mathrm{d}z = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

yang merupakan nilai rata-rata $f(z)$ pada C.

Teorema Liouville

Jika $f(z)$ analitik pada keseluruhan bidang kompleks dan $|f(z)|$ terbatas untuk semua nilai z, maka $f(z)$ konstan.

Untuk membuktikan teorema ini, kita mulai dengan

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z')}{(z' - z)^2}\, \mathrm{d}z'.$$

Syarat agar $|f(z)|$ terbatas mengatakan kepada kita sebuah konstanta tak negatif M ada sehingga $|f(z)| \leq M$ untuk semua z. Jika kita mengambil C sebagai lingkaran $|z' - z| = R$, maka

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \right| \oint_C \frac{|f(z')|}{|(z' - z)^2|} |\mathrm{d}z'| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R^2} M 2\pi R = \frac{M}{R} \end{aligned}$$

karena $f(z')$ analitik di semua tempat, kita bisa mengambil R sebesar mungkin. Jelaslah bahwa $\frac{M}{R} \to 0$, ketika $R \to \infty$. Jadi $|f'(z)| = 0$, yang mengimplikasikan $f'(z) = 0$ untuk semua z, sehingga $f(z)$ konstan.

Teorema Aljabar Fundamental

Teorema berikut dikenal sebagai teorema aljabar fundamental. Dalam bab terakhir kita telah mengatakan bahwa teorema ini sangat penting dalam sistem bilangan kita.

Setiap persamaan polinomial

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0$$

berderajat satu atau lebih besar memiliki paling tidak satu buah akar.

Untuk membuktikan teorema ini, marilah pertama kita mengasumsikan kebalikannya, katakanlah $P_n(z) \neq 0$ untuk sebarang z. Maka fungsi

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$$

analitik di setiap tempat. Karena $f(z)$ tidak akan bernilai tak hingga dan $f(z) \to 0$ ketika $z \to \infty$, jadi $|f(z)|$ terbatas untuk semua z. Dengan teorema Liouville kita menyimpulkan bahwa $f(z)$ haruslah berupa konstanta dan $P_n(z)$ harus konstan. Ini merupakan sebuah kontradiksi, karena $P_n(z)$ merupakan sebuah polinomial dari z. Jadi, $P_n(z) = 0$, paling tidak harus memiliki sebuah akar.

Dari teorema ini $P_n(z)$ tepat memiliki n akar. Karena $P_n(z)$ paling tidak memiliki satu akar, katakanlah z_1. Jadi

$$P_n(z) = (z - z_1)Q_{n-1}(z)$$

dengan $Q_{n-1}(z)$ merupakan polinomial berderajat $n-1$. Dengan argumen yang sama, kita menyimpulkan bahwa $Q_{n-1}(z)$ paling tidak harus memiliki satu buah akar, yang kita nyatakan dengan z_2. Dengan mengulangi prosedur n kali kita peroleh

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n) = 0$$

Jadi $P_n(z) = 0$ tepat memiliki n buah akar.

2.5 Latihan

1. Buktikan suku riil dan imajiner fungsi $f(z)$ berikut memenuhi syarat Cauchy-Riemann:
   (a) z^2, (b) e^z, (c) $\dfrac{1}{z+2}$.
2. Buktikan bahwa suku riil $u(x,y)$ dan suku imajiner $v(x,y)$ sebuah fungsi analitik $\mathrm{e}^z = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ memenuhi persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

3. Buktikan bahwa turunan $\frac{1}{z+2}$ dihitung dengan tiga cara berbeda memberikan hasil yang sama:

   (a) Misalkan $\Delta y = 0$, sehingga $\Delta z \to 0$ sejajar dengan sumbu x. Dalam kasus ini
   $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

   (b) Misalkan $\Delta x = 0$, sehingga $\Delta z \to 0$ sejajar dengan sumbu y. Dalam kasus ini
   $$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

   (c) Gunakan aturan seperti z berupa variabel riil
   $$f'(z) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}.$$

4. Misalkan $z^2 = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, carilah titik perpotongan antara $u(x,y) = 1$ dan $v(x,y) = 2$. Buktikan pada titik perpotongan kurva $u(x,y) = 1$ tegak lurus dengan $v(x,y) = 2$.

5. Misalkan $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ merupakan fungsi analitik. Jika $u(x,y)$ diberikan oleh fungsi berikut:
   $$\text{(a) } x^2 - y^2, \quad \text{(b) } \mathrm{e}^y \sin x$$
   Buktikan bahwa keduanya memenuhi persamaan Laplace. Carilah fungsi konjugat harmonik $v(x,y)$. Nyatakan $f(z)$ sebagai fungsi z saja.
   Jawab: (a) $v(x,y) = 2xy + c$ $f(z) = z^2 + c$, (b) $v(x,y) = \mathrm{e}^y \cos x + c$, $f(z) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} + c$.

6. Di kuadran manakah dalam bidang kompleks $f(z) = |x| - \mathrm{i}|y|$ berupa fungsi analitik?
   Petunjuk: Dalam kuadran pertama $x > 0$ jadi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial |x|}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$, dalam kuadran kedua $x < 0$, jadi $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial |x|}{\partial x} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1$ dan seterusnya.
   Jawab: $f(z)$ analitik pada kuadran kedua dan keempat saja.

7. Nyatakan suku riil dan imajiner dari $(z+1)^2$ dalam koordinat polar, yaitu, mencari $u(r,\theta)$ dan $v(r,\theta)$ dalam ekspresi
   $$(z+1)^2 = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta).$$
   Buktikan bahwa keduanya memenuhi persamaan Cauchy-Riemann dalam bentuk polar
   $$\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}.$$

8. Buktikan ketika sebuah fungsi analitik dinyatakan dalam koordinat polar, suku riil dan imajinernya memenuhi persamaan Laplace dalam koordinat polar

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0.$$

9. Untuk membuktikan bahwa integral garis, secara umum, bergantung lintasan integrasi, hitunglah

$$\int_{-1}^{\mathrm{i}} |z|^2 \,\mathrm{d}z$$

(a) sepanjang garis lurus dari titik asal -1 ke titik akhir i, (b) sepanjang busur lingkaran satuan $|z| = 1$ berlawanan arah jarum jam dari titik asal -1 ke titik akhir i.
Petunjuk: (a) Parameterisasi segmen garis dengan $z = -1 + (1 + \mathrm{i}),\ 0 \leq t \leq 1$.
(b) Parameterisasi busur dengan $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \pi \geq \theta \geq \pi/2$.
Jawab: (a) $2(1 + \mathrm{i})/3$, (b) $1 + \mathrm{i}$.

10. Untuk memverifikasi integral garis sebuah fungsi analitik bebas lintasan, hitunglah

$$\int_{0}^{3+\mathrm{i}} z^2 \,\mathrm{d}z$$

(a) sepanjang garis $y = x/3$, (b) sepanjang sumbu riil ke 3, kemudian vertikal ke $3 + \mathrm{i}$, (c) sepanjang sumbu imajiner ke i kemudian horizontal ke $3 + \mathrm{i}$.
(a) $6 + \frac{26}{3}\mathrm{i}$, (b) $6 + \frac{26}{3}\mathrm{i}$, (c) $6 + \frac{26}{3}\mathrm{i}$.

11. Buktikan lemma Green

$$\oint_C [A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y] = \iint_R \left[\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial A(x,y)}{\partial y}\right] \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

untuk integral

$$\oint [(x^2 + y)\mathrm{d}x - xy^2\mathrm{d}y]$$

dengan batas sebuah persegi yang titik sudutnya $(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)$.

12. Buktikan lemma Green untuk integral

$$\oint [(x - y)\mathrm{d}x - (x + y)\mathrm{d}y]$$

yang diambil pada kuadran pertama antara kurva $y = x^2$ dan $y^2 = x$.

13. Hitunglah

$$\int_{0}^{3+\mathrm{i}} z^2 \,\mathrm{d}z$$

dengan teorema kalukulus fundamental. Yaitu

$$\text{jika } \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}, \quad \text{maka } \int_A^B f(z)\,\mathrm{d}z = F(B) - F(A),$$

sehingga $f(z)$ analitik pada daerah antara A dengan B.
Jawab: $6 + \frac{26}{3}\mathrm{i}$.

14. Berapakah nilai
$$\oint_C \frac{3z^2 + 7z + 1}{z + 1}\,\mathrm{d}z$$
(a) jika C adalah lingkaran $|z + 1| = 1$? (b) jika C adalah lingkaran $|z + \mathrm{i}| = 1$? (c) jika C adalah elips $x^2 + 2y^2 = 8$?
Jawab: (a) $-6\pi\mathrm{i}$, (b) 0, (c) $-6\pi\mathrm{i}$

15. Berapakah nilai
$$\oint_C \frac{z + 4}{z^2 + 2z + 5}\,\mathrm{d}z$$
(a) jika C adalah lingkaran $|z| = 1$? (b) jika C adalah lingkaran $|z + 1 - \mathrm{i}| = 2$? (c) jika C adalah lingkaran $|z + 1 + \mathrm{i}| = 2$?
Jawab: (a) 0, (b) $\frac{1}{2}(3 + 2\mathrm{i})\pi$, (c) $\frac{1}{2}(-3 + 2\mathrm{i})\pi$.

16. Berapakah nilai
$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z + 1)^2}\,\mathrm{d}z$$
mengelilingi lingkaran $|z - 1| = 3$?
Jawab: $2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}$.

17. Berapakah nilai
$$\oint_C \frac{z + 1}{z^3 + 2z^2}\,\mathrm{d}z$$
(a) jika C adalah lingkaran $|z| = 1$? (b) jika C adalah lingkaran $|z - 2 - \mathrm{i}| = 2$? (c) jika C adalah lingkaran $|z - 1 - 2\mathrm{i}| = 2$?
Jawab: (a) $-\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}$, (b) $\frac{3}{2}\pi\mathrm{i}$, (c) 0.

18. Berapakah nilai integral
$$\oint \frac{z^3 + \sin z}{(z - \mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z$$
melalui batas sebuah segitiga dengan titik sudut $\pm 2,\ 2\mathrm{i}$.
Jawab: $\pi(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1})/2 - 6\pi$.

19. Berapakah nilai
$$\oint_C \frac{\tan z}{z^2}\,\mathrm{d}z$$
jika C berupa lingkaran $|z| = 1$?
Jawab: $2\pi\mathrm{i}$.

20. Berapakah nilai
$$\oint_C \frac{\ln z}{(z - 1)^2}\,\mathrm{d}z$$
mengelilingi lingkaran $|z - 3| = 2$?
Jawab: $\pi\mathrm{i}$.

3

Deret Kompleks dan Teori Residu

Ekspansi deret ditemui di setiap bidang dalam sains dan teknik. Dalam teori fungsi kompleks, ekspansi deret memainkan peran penting karena merupakan dasar untuk menurunkan dan menggunakan teori residu, yang memberikan metode untuk menghitung integral kontur kompleks dan beberapa integral dari variabel riil yang sulit. Sebelum membicarakan secara formal, pertama-tama kita akan meninjau deret geometrik dasar.

3.1 Deret Geometrik Dasar

Misalkan

$$S = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n. \tag{3.1}$$

Kalikan dengan z

$$zS = z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + z^{n+1}$$

dan kurangkan kedua deret

$$(1 - z)S = 1 - z^{n+1}$$

kita peroleh

$$S = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Sekarang jika $|z| < 1, z^{n+1} \to 0$ ketika $n \to \infty$. Jadi ketika n menuju tak hingga

$$S = \frac{1}{1 - z}$$

dan dari (3.1) diperoleh

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k. \tag{3.2}$$

Jelaslah deret ini akan divergen untuk $|z| \geq 1$. Penting untuk diingat bahwa deret ini hanya konvergen untuk $|z| < 1$. Dengan syarat ini, deret alternatif berikut juga konvergen:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots . \tag{3.3}$$

3.2 Deret Taylor

Deret Taylor mungkin yang paling sering kita jumpai dalam variabel riil. Deret Taylor kompleks jauh lebih menarik.

3.2.1 Deret Taylor Kompleks

Dalam banyak aplikasi variabel kompleks, kita akan mengekspansikan sebuah fungsi analitik $f(z)$ menjadi sebuah deret di sekitar titik tertentu $z = z_0$. Kita akan membuktikan jika $f(z)$ analitik di sekitar (tetangga) z_0 termasuk titik $z = z_0$, maka $f(z)$ bisa dinyatakan sebagai sebuah deret dengan pangkat positif dari $(z - z_0)$.

Pertama marilah kita ingat

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{t-z}\, \mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

dengan t adalah variabel integrasi dan berada pada kontur yang melingkupinya C, sehingga $f(z)$ analitik. Kuantitas $(z - z_0)$ bisa dinyatakan sebagai integral melalui identitas

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)+(z_0-z)} = \frac{1}{(t-z_0)(1-\frac{z-z_0}{t-z_0})}.$$

Jika

$$\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1, \tag{3.5}$$

kemudian dengan deret geometrik dasar

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{t-z_0}} = 1 + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right) + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3 + \cdots . \tag{3.6}$$

Jadi (3.4) bisa dituliskan sebagai

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{t-z_0} \left[1 + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right) + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3 + \cdots\right] \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{t-z_0}\,\mathrm{d}t + \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}\,\mathrm{d}t\right](z-z_0) \\
&\quad + \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^3}\,\mathrm{d}t\right](z-z_0)^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^4}\,\mathrm{d}t\right](z-z_0)^3 + \cdots . \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Menurut integral Cauchy dan turunannya

$$
f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}t
$$

persamaan (3.7) menjadi

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \\
&= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \cdots \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

yang merupakan deret Taylor yang sudah dikenal.

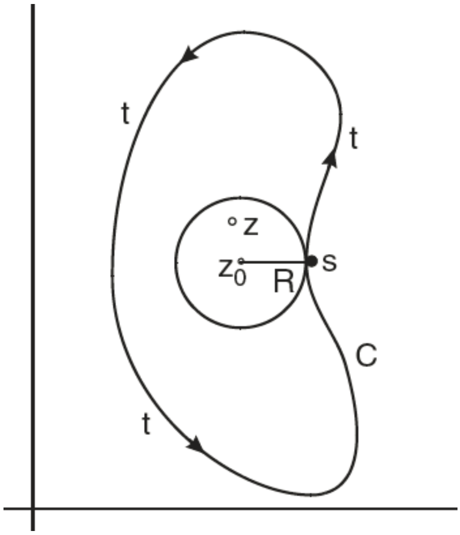
3.2.2 Konvergensi Deret Taylor

Untuk membicarakan konvergensi deret Taylor, marilah kita ingat kembali definisi titik singular.

Singularitas

Jika $f(z)$ analitik pada semua titik di sekitar z_s tetapi tidak terdiferensialkan pada z_s, maka z_s dikenal sebagai titik singular. Kita juga mengatakan $f(z)$ memiliki singularitas pada $z = z_s$. Sebagai contoh:

- $\dfrac{1}{z^2+1}$ memiliki singularitas pada $z = \mathrm{i}, -\mathrm{i}$.
- $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ memiliki singularitas pada $z = \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3\pi}{2} \pm \dfrac{5\pi}{2}, \ldots$.
- $\dfrac{1+2z}{z^2-5z+6}$ memiliki singularitas pada $z = 2, 3$.
- $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z+1}$ memiliki singularitas pada $z = \pm\mathrm{i}\pi, \pm\mathrm{i}3\pi, \pm\mathrm{i}\pi5\pi, \ldots$.



Gambar 3.1: Jari-jari konvergensi deret Taylor. Pusat ekspansi pada z_0. Titik singular pada s membatasi daerah konvergensi di dalam interior lingkaran dengan jari-jari R.

Jari-jari Konvergensi

Rumus integral Cauchy (3.4) jelas berlaku untuk semua z di dalam kontur C, jika $f(t)$ analitik di dalam dan pada C. Tetapi, dalam membuat deret Taylor di sekitar $z = z_0$, kita menggunakan (3.6) yang benar hanya jika syarat (3.5) terpenuhi. Ini berarti $|z - z_0|$ harus kurang dari $|t - z_0|$. Karena t berada pada kontur C lain pada Gambar 3.1, jarak $|t - z_0|$ berubah ketika t bergerak mengelilingi C. Dengan kontur yang ditunjukkan gambar, nilai paling kecil $|t - z_0|$ adalah $|s - z_0|$ dengan s adalah titik yang berada pada C paling dekat dengan z_0. Agar $|z-z_0|$ kurang dari semua nilai $|t-z_0|$, $|z-z_0|$ harus kurang dari $|s-z_0|$. Ini berarti deret Taylor (3.8) berlaku hanya untuk titik-titik z yang berada di dalam lingkaran yang berpusat pada z_0, dengan jari-jari $R = |s - z_0|$.

Jika $F(z)$ analitik di setiap tempat, kita bisa menggambarkan kontur C sebesar yang kita inginkan. Jadi deret Taylor konvergen di semua bidang kompleks. Tetapi jika $f(z)$ mempunyai titik singular pada $z = s$, maka kontur harus digambarkan sedemikian rupa sehingga titik $z = c$ berada di luar C. Pada Gambar 3.1, kontur C bisa dekat sekali (infinitesimal) dengan s, tetapi s haruslah tidak berada atau di dalam C. Untuk kasus tersebut jari-jari paling besarnya yang mungkin adalah $|s - z_0|$. Jadi jari-jari konvergensi deret Taylor sama dengan jarak antara pusat ekspansi dengan titik singular paling dekat.

Pembahasan kita sebelumnya berlaku sama baiknya dengan daerah lingkaran di sekitar titik asal $z_0 = 0$. Deret Taylor di sekitar titik asal

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots$$

yang disebut deret Maclaurin

Meski ekspansinya dalam fungsi variabel riil, jari-jari konvergensi juga sama pentingnya. Untuk mengilustrasikan, perhatikan

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots .$$

Deret ini konvergen pada interior lingkaran paling besar di sekitar titik asal sehingga $f(z)$ anlitik. Sekarang jika $f(z)$ memiliki dua buah titik singular pada $z = \pm\mathrm{i}$, dan meskipun kita bisa menganggap nilai riil z saja, sehingga $1/(1+x^2)$ terdiferensialkan di setiap tempat terhadap x, singularitas dalam bidang kompleks ini memberikan batas yang tidak bisa dihindari untuk selang konvergensi pada sumbu$-x$. Karena jarak antara pusat ekspansi pada $z = 0$ dan titik singular paling dekat, i atau $-\mathrm{i}$ adalah $|\mathrm{i} - 0| = 1$, jari-jari konvergensi sama dengan 1, berpusat di titik asalnya. Jadi selang konvergensi pada sumbu$-z$ antara $x = \pm 1$. Dengan kata lain, Deret Maclaurin

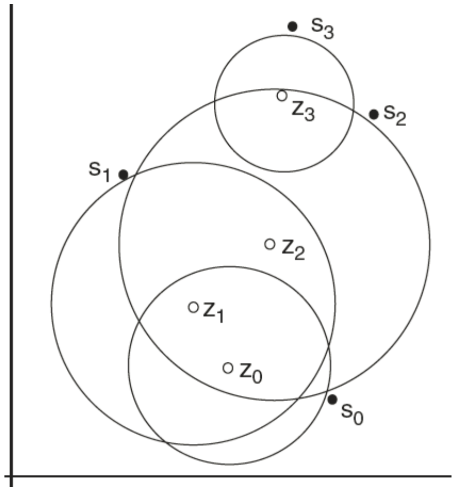
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots .$$

berlaku hanya untuk $-1 < x < 1$, meskipun $1/(1+x^2)$ dan turunan semua ordenya terdefinisikan sepanjang sumbu riil x. Sekarang jika kita ekspansikan fungsi riil $1/(1+x^2)$ ke dalam deret Taylor di sekitar $x = x_0$, maka jari-jari konvergensi sama dengan $|\mathrm{i} - x_0| = \sqrt{1 + x - 0^2}$. Ini berarti deret hanya konvergen pada selang antara $x = x_0 - \sqrt{1 + x - 0^2}$ dan $x = x_0 + \sqrt{1 + x - 0^2}$.

3.2.3 Perluasan Analitik

Jika kita mengetahui nilai sebuah fungsi analitik dalam sebuah daerah kecil di sekitar z_0, kita bisa menggunakan ekspansi Taylor di sekitar z_0 untuk mencari nilai fungsi di daerah yang lebih besar. Meskipun ekspansi Taylor hanya berlaku di dalam lingkaran dengan jari-jari konvergensi yang ditentukan oleh letak titik singular paling dekat, rantai ekspansi Taylor bisa digunakan untuk menentukan fungsi pada keseluruhan bidang kompleks kecuali pada titik singular fungsi tersebut. Proses ini digambarkan pada Gambar 3.2.

Anggap kita mengetahui nilai di sekitar z_0 dan titik singular paling dekat dengan z_0 adalah s_0. Ekspansi Taylor di sekitar z_0 berlaku untuk sebuah daerah lingkaran dengan jari-jari $|z_0 - s_0|$. Karena ekspansi deret Taylor memberikan nilai fungsi dan semua turunan pada tiap titik di dalam lingkaran ini, kita bisa menggunakan titik sebarang di dalam lingkaran ini sebagai pusat ekspansi baru. Sebagai contoh, kita



Gambar 3.2: Perluasan analitik. Sebuah ekspansi deret Taylor yang secara anlitik melanjutkan sebuah fungsi yang awalnya diketahui di daerah sekitar z_0. Ekspansi pertama di sekitar z_0 hanya berlaku di dalam lingkaran berjari-jari $|z_0 - s_0|$, dengan s_0 adalah titik singular paling dekat z_0. Ekspansi Tayolr berikutnya di sekitar z_1 yang berada di dalam lingkaran pertama. Ekspansi Taylor berikutnya dibatasi oleh titik singular s_1 dan begitu seterusnya.

mungkin mengekspansikan deret Taylor lain di sekitar z_1 pada Gambar 3.2. Kita bisa melakukan hal ini karena $f_n(z_1)$ diketahui untuk semua n dari ekspansi Taylor pertama di sekitar z_0. Jari-jari konvergensi deret Taylor kedua ditentukan oleh jarak dari z_1 ke titik singular paling dekat s_1. Jika kita lanjutkan cara ini, seperti yang diindikasikan dalam Gambar 3.2, kita bisa menutupi semua bidang kompleks kecuali pada titik singular $s_0,\ s_1,\ s_2, \ldots$. Dengan kata lain, fungsi analitik di setiap titik bisa dibangun dari pengetahuan fungsi di dalam daerah kecil. Proses ini disebut Perluasan analitik.

Konsekuensi langsung dari kelanjuntan analitik dikenal sebagai teorema identitas. Ini menyatakan bahwa jika $f(z)$ dan $g(z)$ analitik dan $f(z) = g(z)$ melalui sebuah kurva di daerah D, maka $f(z) = g(z)$ pada D. Kita bisa membuktikan ini dengan memperhatikan fungsi analitik $h(z) = f(z) - g(z)$. Jika kita bisa membuktikan $h(z)$ identik dengan nol pada daerah tersebut, maka teorema ini terbukti.

Jika kita memilih sebuah titik $z = z_0$, maka kita bisa mengekspansikan $h(z)$ dalam deret Taylor di sekitar z_0

$$h(z) = h(z_0) + h'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!}h''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots$$

yang akan konvergen di dalam beberepa lingkaran yang membesar sejauh titik paling dekat dengan batas D. Tetapi karena z_0 pada L, $h(z_0) = 0$. Lebih lanjut, turunan h juga harus nol jika z mendekati z_0 sepanjang L. Karena $h(z)$ analitik, turunannya tidak bergantung bagaimana z mendekati z_0, ini berarti

$$h'(z_0) = h''(z_0) = \cdots = 0.$$

Jadi, $h(z) = 0$ di dalam lingkaran. Kita skarang bisa mengekspansikan di sekitar titik baru yang berada di titik sebarang di dalam lingkaran. Oleh karena itu, dengan perluasan analitik, kita bisa membuktikan $h(z) = 0$ pada daerah D.

3.2.4 Keunikan Deret Taylor

Jika terdapat konstanta a_n, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sedemikian rupa sehingga

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

konvergen untuk semua titik z di dalam beberapa lingkaran yang berpusat pada z_0, maka deret pangkat ini haruslah berupa deret Taylor, tidak bergantung pada bagaimana konstanta tersebut diperoleh. Ini mudah dibuktikan, karena

$$\begin{aligned} f(z) &= a_1 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots , \\ f(z) &= a_1 + 2a_2(z - z_0) + a_3(z - z_0)^2 + 4a_4(z - z_0)^3 + \cdots , \\ f(z) &= 2a_2 + 3.2a_3(z - z_0) + 4.3(z - z_0)^2 + \cdots , \end{aligned}$$

jelaslah

$$f(z_0) = a_0,\ f'(z_0) = a_1,\ f''(z_0) = 2a_2,\ f'''(z_0) = 3.2a_3, \ldots .$$

Diperoleh:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

yang merupakan koefisien Taylor. Jadi, deret Taylor unik. Oleh karena itu tidak bergantung bagaimana deret pangkat diperoleh, jika konvergen dalam beberapa daerah sirkular, ini merupakan deret Taylor. Contoh berikut menggambarkan beberapa teknik mengekspansikan sebuah fungsi menjadi deret Taylor.

Contoh 3.2.1. Carilah deret Taylor di sekitar titik asal dan juga jari-jari konvergensinya:

$$\text{(a) } \sin z, \quad \text{(b) } \cos z, \quad \text{(c) } \mathrm{e}^z.$$

Solusi 3.2.1. (a) Karena $f(z) = \sin z$,

$$f'(z) = \cos z, \quad f''(z) = -\sin z, \quad f'''(z) = -\cos z, \quad f^4(z) = \sin z, \ldots .$$

Maka

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = 0, \ldots.$$

Jadi

$$\begin{aligned}\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n \\ &= z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \ldots.\end{aligned}$$

Deret ini berlaku untuk semua z, karena $\sin z$ merupakan fungsi keseluruhan (analitik untuk semua bidang kompleks).

(b) Jika $f(z) = \cos z$, jadi

$$f'(z) = -\sin z, \quad , f''(z) = -\cos z, \quad f^4(z) = \cos z, \ldots,$$
$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0, f^4(0) = 1, \ldots.$$

Oleh karena itu

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \cdots.$$

Deret ini juga berlaku untuk semua z.

(c) Untuk $f(z) = \mathrm{e}^z$, maka

$$f^{(n)}(z) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z \quad \text{dan} \quad f^{(n)}(0) = 1.$$

Diperoleh:

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots.$$

Deret ini konvergen untuk semua z, karena z merupakan fungsi keseluruhan.

Contoh 3.2.2. Carilah deret Taylor di sekitar titik asal dan jari-jari konvergensinya untuk

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{\cos z}.$$

Solusi 3.2.2. Titik singular fungsi berada pada nilai nol pembilang. Karena $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, titik singular paling dekat adalah pada $z = \pm \frac{\pi}{2}$. Jadi deret Taylor di sekitar titik berlaku untuk $|z| < \frac{\pi}{2}$. Kita bisa mencari konstanta dari

$$\frac{\mathrm{e}^z}{\cos z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

dari $f^{(n)}(0)$, tetapi turunan berulang akan semakin rumit. Jadi kita menggunakan fakta deret Taylor untuk e^z dan $\cos z$ yang sudah diketahui. Menggantikan e^z dan $\cos z$ dengan deret Taylornya pada persamaan

$$\mathrm{e}^z = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 + \cdots) \cos z,$$

kita peroleh

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots = (a_0 + a_1 z^2 + a_3 z^3 + \cdots)$$
$$\left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \cdots\right).$$

Kalikan dan kumpulkan suku-sukunya

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots = a_0 + a_1 z + \left(a_2 - \frac{1}{2}a_0\right) z^2 + \left(a_3 - \frac{1}{2}a_1\right) z^3 + \cdots.$$

Jadi

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 - \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_3 - \frac{1}{2}a_1 = \frac{2}{3!}, \cdots.$$

Diperoleh:

$$a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_0 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3!} + \frac{1}{2}a_1 = \frac{2}{3}, \cdots$$

dan

$$\frac{e^z}{\cos z} = 1 + z + z^2 + \frac{2}{3}z^3 + \cdots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Contoh 3.2.3. Carilah deret Taylor di sekitar $z = 2$ untuk

$$\text{(a) } \frac{1}{z}, \quad \text{(b) } \frac{1}{z^2}.$$

Solusi 3.2.3. (a) Fungsi $1/z$ memiliki titik singular pada $z = 0$, jarak antara titik ini dengan pusat ekspansi adalah 2. Jadi deret Taylor di sekitar $z = 2$ konvergen untuk $|z - 2| < 2$ dan memiliki bentuk

$$\frac{1}{z} = a_0 + a_1(z-2) + a_2(z-2)^2 + \cdots.$$

Kita bisa menuliskan fungsinya sebagai

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+}(z-2) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \left(\frac{z-2}{2}\right)}.$$

Untuk $|z-2| < 2$, $|\frac{|z-2|}{2} < 1|$. Jadi kita bisa menggunakan deret geometrik (3.3) untuk mengekspansikan

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{z-2}{2}\right)} = 1 - \left(\frac{z-2}{2}\right) + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{2}\right)^3 + \cdots.$$

Diperoleh untuk $|z-2| < 2$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{z-2}{2}\right) + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{2}\right)^3 + \left(\frac{z-2}{2}\right)^4 - \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-2) + \frac{1}{8}(z-2)^2 - \frac{1}{16}(z-2)^3 + \frac{1}{32}(z-2)^4 - \cdots.$$

(b) Karena

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z},$$

Jadi

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(z-2)^2 - \frac{1}{16}(z-2)^3 + \frac{1}{32}(z-2)^2 - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(z-2) + \frac{3}{16}(z-2)^2 - \frac{1}{8}(z-2)^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Contoh 3.2.4. Carilah deret Taylor di sekitar titik asal untuk

$$f(z) = \frac{1}{1+z-2z^2}.$$

Solusi 3.2.4. Karena $1 + z - 2z^2 = (1-z)(1+2z)$, fungsi $f(z)$ memiliki dua buah titik singular pada $z = 1$ dan $z = -1/2$. Ekspansi deret Taylor di sekitar $z = 0$ akan konvergen untuk $|z| < \frac{1}{2}$. Selanjutnya

$$\frac{1}{1+z-2z^2} = \frac{1/3}{1-z} + \frac{2/3}{1+2z}.$$

Untuk $|z| < \frac{1}{2}$ dan $|2z| < 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \\ \frac{1}{1+2z} &= 1 - 2z + 4z^2 - 8z^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{3}(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots) + \frac{2}{3}(1 - 2z + 4z^2 - 8z^3 + \cdots) \\ &= 1 - z + 3z^2 - 5z^3 + \cdots.\end{aligned}$$

Contoh 3.2.5. Carilah deret Taylor di sekitar titik asal untuk

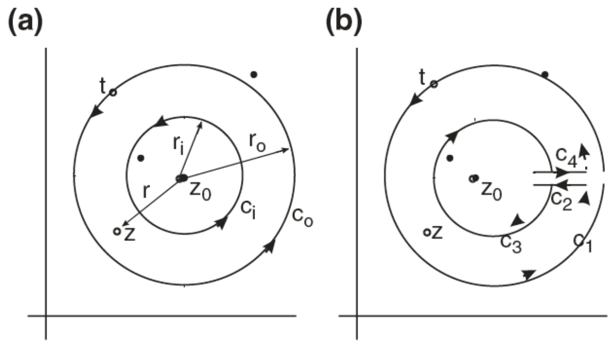
$$f(z) = \ln(1+z).$$

Solusi 3.2.5. Pertama perhatikan bahwa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(1+z) = \frac{1}{1+z},$$

dan

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots,$$



Gambar 3.3: Daerah cincin di antara dua lingkaran tempat fungsinya analitik dan deret Laurent berlaku. Di dalam lingkaran dalam dan di luar lingkaran luar, fungsi mungkin memiliki titik singular.

sehingga

$$\mathrm{d}\ln(1+z) = (1 - z + z^2 - z^3 + \cdots)\,\mathrm{d}z.$$

Integralkan kedua ruas

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots + k.$$

Konstanta integrasi $k = 0$, karena pada $z = 0$, $\ln(1) = 0$. Jadi

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \cdots,$$

Deret ini konvergen untuk $|z| < 1$, karena pada $z = -1$, $f(z)$ singular.

3.3 Deret Laurent

Dalam banyak aplikasi, perlu untuk memperluas fungsi di sekitar titik yang, atau di lingkungan yang, fungsi tidak analitik. Metode deret Taylor jelas tidak dapat diterapkan dalam kasus tersebut. Sebuah jenis deret baru dikenal sebagai ekspansi Laurent diperlukan. Deret ini melengkapi kita dengan representasi yang berlaku di cincin melingkar dibatasi oleh dua konsentris lingkaran, memberikan fungsi yang diperluas analitik di setiap tempat pada dan di antara dua lingkaran.

Perhatikan cincin yang dibatasi dua buah lingkaran C_0 dan C_i dengan pusat bersama z_0 seperti Gambar 3.3. **(a)**. Fungsi $f(z)$ analitik di dalam daerah cincin; tetapi, mungkin terdapat titik singular di dalam lingkaran kecil atau di luar lingkaran besar. Kita bisa menggunakan rumus integral Cauchy untuk menghubungkan daerah yang dipotong seperti Gambar 3.3. **(b)**. Daerah sekarang terhubung sederhana dan dibatasi kurva $C' = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. Rumus integral Cauchy adalah

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left(\int_{C_1} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t + \int_{C_2} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t + \int_{C_3} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t + \int_{C_4} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t \right), \end{aligned}$$

dengan t berada pada C' dan z merupakan sebuah titik di dalam C'. Sekarang misalkan jarak antara C_2 dan C_4 mengecil menuju nol, maka integral sepanjang C_2 dan C_4 akan saling menghilangkan, karena orientasi arahnya berbeda, jika $f(z)$ dipetakan ke satu titik (*single valued*). Lebih dari itu, kontur C_1 menjadi C_0 dan kontur C_3 identik dengan C_i berbalik ke arah berlawanan. Jadi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_0} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_i} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t, \tag{3.9}$$

dengan C_0 dan C_i keduanya berlawanan arah dengan jarum jam. Tanda negatif karena arah integrasi dibalik pada C_i.

Kita bisa memperkenalkan z_0, pusat bersama C_0 dan C_i, sebagai pusat ekspansi. Dari integral pertama pada (3.9) dengan t pada C_0, kita bisa menuliskan

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-z} &= \frac{1}{t-z_0+z_0-z} = \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)} \\ &= \frac{1}{(t-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Karena t pada C_0 dan z di dalam C_0, seperti Gambar 3.3 **(a)**

$$\left| \frac{z-z_0}{t-z_0} \right| = \frac{r}{r_0} < 1,$$

sehingga kita bisa mengekspansikan $\left(1-\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^{-1}$ dengan deret geometrik (3.2), dan (3.10) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0} \Bigg[1 &+ \frac{z-z_0}{t-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right) + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2 \\ &+ \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3 + \cdots \Bigg] \quad \text{untuk } t \text{ pada } C_0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-z} &= -\frac{1}{z-t} = -\frac{1}{z-z_0+z_0-t} \\ &= -\frac{1}{(z-z_0)-(t-z_0)} = -\frac{1}{(z-z0)\left[1-\frac{t-z_0}{z-z_0}\right]}. \end{aligned}$$

Karena
$$\left|\frac{t-z_0}{z-z_0}\right| = \frac{r_i}{r} < 1$$
seperti pada Gambar 3.3 **(a)**, kita bisa mengekspansikan lagi
$$\left(1 - \frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^{-1}$$
dengan deret geometrik dan menuliskan
$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z-z_0}\left[1 + \frac{t-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^3 + \cdots\right] \quad \text{untuk } t \text{ pada } C_0. \tag{3.12}$$

Masukkan (3.11) dan (3.12) ke dalam (3.9), kita mempunyai
$$f(z) = I_{C_0} + I_{C_i},$$
dengan
$$\begin{aligned} I_{C_0} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_0} \frac{f(t)}{t-z_0}\left[1 + \frac{t-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^3 + \cdots\right] \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_0} \frac{f(t)}{t-z_0}\,\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_0} \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}\,\mathrm{d}t\right)(z-z_0) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_0} \frac{f(t)}{(t-z_0)^3}\,\mathrm{d}t\right)(z-z_0)^2 + \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{0} \frac{f(t)}{(t-z_0)^4}\,\mathrm{d}t\right)(z-z_0)^3 + \cdots \end{aligned}$$
dan
$$\begin{aligned} I_{C_i} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_i} \frac{f(t)}{z-z_0}\left[1 + \frac{t-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^3 + \cdots\right] \mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_i} f(t)\mathrm{d}t\right)\frac{1}{z-z_0} + \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_i} f(t)(t-z_0)\mathrm{d}t\right)\frac{1}{(z-z_0)^2} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_i} f(t)(t-z_0)^2\mathrm{d}t\right)\frac{1}{(z-z_0)^3} + \cdots . \end{aligned}$$
Jadi, di dalam daerah antara C_i dan C_0, $f(z)$ bisa dinyatakan sebagai
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z-z_0)^k},$$
dengan
$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_0} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}t, \quad b_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_i} f(t)(t-z_0)^{k-1}\,\mathrm{d}t.$$
Karena prinsip deformasi kontur, kita bisa menggantikan baik C_i dan C_0 dengan kontur tertutup C antara C_i dan C_0 tanpa mengganti nilai integral. Jadi kita bisa menuliskan deret sebagai
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}t. \tag{3.13}$$

Ekspansi ini dikenal sebagai deret Laurent yang mengandung pangkat positif dan negatif dari $(z - z_0)$.

Perlu diperhatikan bahwa koefisien pangkat positif $(z - z_0)$ tidak bisa digantikan dengan ekspresi turunan, karena $f(z)$ tidak analitik di dalam C. Tetapi, jika tidak terdapat titik singular di dalam C_i, maka koefisien-koefisien dapat digantikan dengan $f^{(n)}(z_0)/n!$, pada waktu yang sama koefisien pangkat negatif dari $(z-z_0)$ identik sama dengan nol dengan teorema Cauchy, karena $f(t)(t-z_0)^{-n-1}$ untuk $n \leq -1$ analitik di dalam C. Dalam kasus tersebut, ekspansi Laurent menjadi ekspansi Taylor.

3.3.1 Keunikan Deret Laurent

Sama seperti deret Taylor, deret Laurent juga unik. Jika sebuah deret

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

konvergen untuk $f(z)$ pada semua titik di beberapa daerah cincin di sekitar z_0, kemudian tanpa memperhatikan bagaimana konstanta diperoleh, deretnya adalah ekspansi Laurent untuk $f(z)$ dalam pangkat $(z - z_0)$ untuk domain tersebut. Pernyataan ini terbukti apabila kita bisa membuktikan bahwa

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}t. \tag{3.14}$$

Misalkan $g_k(t)$ didefiniskan sebagai

$$g_k(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{1}{(t-z_0)^{k+1}},$$

dengan k sebuah bilangan bulat, bisa positif dan negatif, atau nol. Selanjutnya misalkan C merupakan sebuah lingkaran di dalam cincin berpusat pada z_0 dan diambil dalam berlawanan arah jarum jam, sehingga

$$\oint_C g_k(t) f(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}t. \tag{3.15}$$

Sekarang jika $f(t)$ bisa dinyatakan sebagai

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (t-z_0)^n,$$

maka

$$\oint_C gk(t)f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{1}{(t-z_0)^{k+1}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (t-z_0)^n \right) \mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{1}{(t-z_0)^{k-n+1}}\, \mathrm{d}t.$$

Integral terakhir bisa dengan mudah dihitung dengan memilih $t - z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, jadi $\mathrm{d}t = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ dan

$$\oint_C \frac{1}{(t-z_0)^{k-n+1}}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{r^{k-n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n+1)}}\, \mathrm{d}\theta \tag{3.16}$$
$$= \frac{\mathrm{i}}{r^{k+n}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)}\, \mathrm{d}\theta = 2\pi\mathrm{i}\delta_{nk} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 2\pi\mathrm{i}, & n = k. \end{cases}$$

Jadi

$$\oint_C g_k(t)f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} 2\pi\mathrm{i}\delta_{nk} = a_k. \tag{3.17}$$

Dari (3.15)

$$a_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t)}{(t-t_0)k+1}\, \mathrm{d}t. \tag{3.18}$$

Karena k sebarang, (3.14) pastilah berlaku.

Sehingga tidak masalah bagaimana ekspansi diperoleh, sepanjang berlaku pada domain cincin yang ditentukan, merupakan deret Laurent. Ini memungkinkan kita menentukan koefisien Laurent dengan teknik dasar, seperti diilustrasikan dalam contoh berikut. Representasi integral dari koefisien Laurent (3.18) penting, tidak berarti seperti mencari koefisien, tetapi dengan menggunakan koefisien untuk menghitung integral ini. Kita akan mengelaborasi aspek deret Laurent dalam subab berikutnya dengan teori residu.

Contoh 3.3.1. Carilah deret Laurent di sekitar $z = 0$ untuk fungsi

$$f(z) = \mathrm{e}^{1/z}.$$

Solusi 3.3.1. Karena $f(z)$ analitik untuk semua z, kecuali untuk $z = 0$, ekspansi untuk $f(z)$ di sekitar $z = 0$ akan berupa deret Laurent di dalam cincin $0 < z < \infty$. Untuk memperoleh ekspansinya, misalkan $1/z = t$, dan perhatikan

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots.$$

Jadi

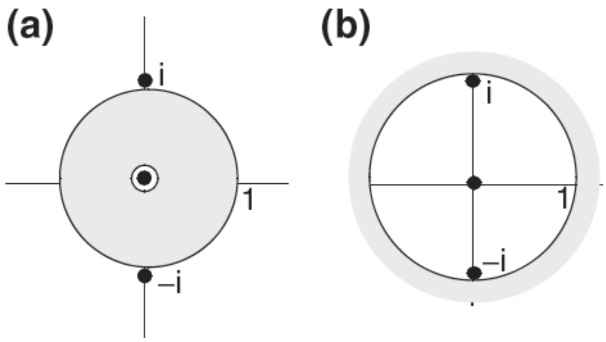
$$\mathrm{e}^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{Z}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{Z}\right)^3 + \cdots.$$

Contoh 3.3.2. Carilah semua deret Laurent yang mungkin untuk

$$f(z) = \frac{1 + 2Zz^2}{z^3 + z^5},$$

dann nyatakan daerah berlakunya.

Solusi 3.3.2. Dengan memilih penyebutnya nol $z^3 + z^5 = z^3(1 + z^2) = 0$, kita memperoleh tiga buah titik singular, $z = 0$, dan $z = \pm\mathrm{i}$ yang ditunjukkan Gambar 3.4. Jadi kita bisa mengekspansikan fungsi di sekitar $z = 0$ dalam dua buah deret Laurent, satunya berlaku untuk $0 < |z| < 1$ yang ditunjukkan **(a)** dan satu lagi untuk $|z| > 1$ **(b)**.



Gambar 3.4: Jika fungsi memiliki tiga buah titik singular pada $z = 0$ dan $z = \pm\mathrm{i}$, maka fungsinya bisa diekspansikan dalam dua buah deret Laurent di sekitar $z = 0$. **(a)** Satu deret berlaku di dalam daerah $0 < |z| < 1$,**(b)** deret lain berlaku pada daerah $1 < |z|$.

Fungsinya bisa dituliskan sebagai

$$f(z) = \frac{1 + 2z^2}{z^3 + z^5} = \frac{1 + 2z^2}{z^3(1 + z^2)} = \frac{2(1 + z^2) - 1}{z^3(1 + z^2)} = \frac{1}{z^3}\left(2 - \frac{1}{1 + z^2}\right).$$

Dalam kasus **(a)**, $|z| < 1$ sehingga $|z^2| < 1$. Kita bisa menggunakan deret geometri untuk menyatakan

$$\frac{1}{1 + z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots .$$

Jadi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3}(2 - [1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots]) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - z + z^3 + \cdots \quad \text{untuk} \quad 0 < |z| < 1. \end{aligned}$$

Dalam kasus **(b)** $|z^2| > 1$, pertama kita menuliskan

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{z^2(1 + \frac{1}{z^2})}.$$

Karena $|\frac{1}{z^2}| < 1$, kita bisa menggunakan deret geometrik lagi

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} + \cdots .$$

Jadi

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3}\left(2 - \frac{1}{z^2}\left[1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^6} + \cdots\right]\right) \\ &= \frac{2}{z^3} - \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7} - \frac{1}{z^9} + \cdots, \quad \text{dari} \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

Contoh 3.3.3. Carilah ekspansi deret Laurent dari

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

berlaku untuk tiap daerah diarsir dari Gambar 3.5.

Solusi 3.3.3. Pertama kita perhatikan bahwa $z^2 - 3z + 2 = (z-2)(z-1)$, jadi fungsinya memiliki dua buah titik singular pada $z = 2$ dan $z = 1$. Ambil pecahan parsial, kita mempunyai

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-2)(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}. \end{aligned}$$

(a) Dalam kasus ini, kita harus mengekspansikan di sekitar $z = 0$, jadi kita mencari sebuah deret dalam bentuk

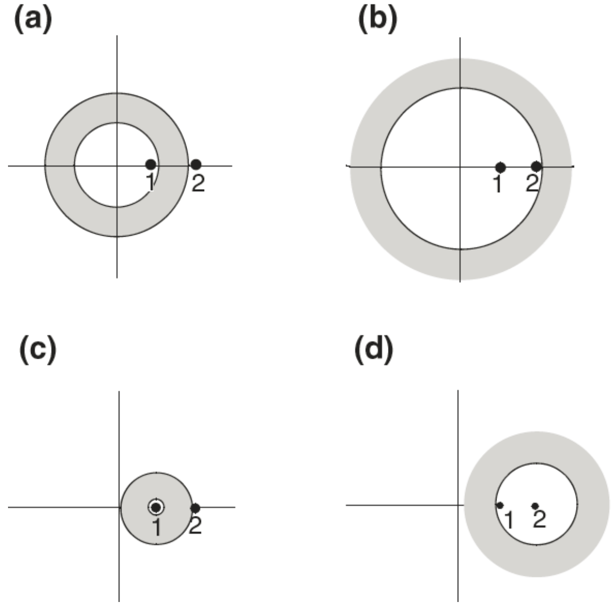
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Nilai $|z|$ antara dua buah lingkaran sedemikian rupa yaitu $1 < |z| < 2$. Untuk menggunakan deret geometrik dasar, kita menuliskan

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2(1-\frac{z}{2})}.$$

Karena $|z|/2 < 1$, jadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} - \cdots . \end{aligned}$$



Gambar 3.5: Fungsi dengan dua buah titik singular pada $z = 1$ dan $z = 2$ bisa diekspansikan ke dalam deret Laurent berbeda dalam daerah yang berbeda: **(a)** ekspansi di sekitar $z = 0$ berlaku di daerah $1 < |z| < 2$, **(b)** ekspansi di sekitar $z = 0$ berlaku di daerah $2 < |z|$, **(c)** ekspansi sekitar $z = 1$ berlaku pada daerah $0 < |z-1| < 1$, **(d)** ekspansi sekitar $z = 2$ berlaku di daerah $1 < |z-2|$.

Seperti pecahan kedua, kita perhatikan bahwa $|z| > 1$, jadi $|1/z| < 1$. Jadi kita menuliskan

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} \\
&= -\frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\cdots\right] \\
&= -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}-\cdots.
\end{aligned}$$

Jadi deret Laurent pada (a) adalah

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{8} - \frac{z63}{16} - \cdots.$$

(b) Pusat ekspansi berada di titik asal, tetapi dalam daerah (b) $|z| > 2$. Jadi kita mengekspansikan pecahan pertama sebagai

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} \\
&= \frac{1}{z}\left[1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\left(\frac{2}{z}\right)^3+\cdots\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{8}{z^4} + \cdots .$$

Perhatikan bahwa ekspansi dalam pecahan kedua yang kita kerjakan dalam bagian (a) tetap berlaku dalam kasus ini

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \cdots .$$

Jadi deret Laurent di dalam (b) adalah jumlah kedua ekspresi ini

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots . \end{aligned}$$

(c) Dalam daerah ini, kita mengekspansikan $z = 1$, jadi kita mencari sebuah deret dalam bentuk

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-1)^n.$$

Karena di dalam daerah $0 < |z-1| < 1$, jadi kita menuliskan fungsinya sebagai

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(z-1)[(z-1)-1]} = -\frac{1}{(z-1)[1-(z-1)]},$$

dan gunakan deret geometrik untuk

$$\frac{1}{1-(z-1)} = 1 + (z-1) + (z-1)^2 + (z-1)^3 + \cdots .$$

Jadi deret Laurent yang berlaku pada (c) adalah

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{(z-1)} \left(1 + (1 + (z-1)) + (z-1)^2\right) + (z-1)^3 + \cdots \\ &= -\frac{1}{(z-1)} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots . \end{aligned}$$

(d) Dalam daerah ini, kita mengekspansikan $z = 1$, jadi kita mencari sebuah deret dalam bentuk

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-2)^2.$$

yang berlaku untuk $|z-2| > 1$. Jadi kita memilih untuk menuliskan fungsinya sebagai

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{[(z-2)+1](z-2)} = \frac{1}{(z-2)^2\left[1 + \frac{1}{z-2}\right]}.$$

Karena $|\frac{1}{z-2}| < 1$, kita bisa menggunakan deret geometrik untuk

$$\left[1 + \frac{1}{z-2}\right]^{-1} = 1 - \frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \cdots .$$

Jadi deret Laurent yang berlaku pada daerah (d) adalah

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)^2}\left(1 - \frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \frac{1}{(z-2)^4} - \frac{1}{(z-2)^5} + \cdots . \end{aligned}$$

3.4 Teori Residu

3.4.1 Nol dan Kutub

Nol

Jika $f(z_0) = 0$, maka titik z_0 dikatakan nol dari fungsi $f(z)$. Jika $f(z)$ analitik pada z_0, maka kita bisa mengekspansikannya dalam deret Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Karena z_0 merupakan nol dari fungsi, jelaslah $a_0 = 0$. Jika $a_1 \neq 0$, maka z_0 dikatakan sebagai nol sederhana. Jika a_0 dan a_1 nol dan $a_2 \neq 0$, maka z_0 adalah nol orde dua, dan seterusnya.

Jika $f(z)$ memiliki sebuah nol dengan orde m pada z_0, yaitu $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ semuanya nol dan $a_m \neq 0$, jadi $f(z)$ bisa dituliskan sebagai

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

dengan

$$g(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Jika $g(z)$ analitik (sehingga kontinu) pada z_0, dan $g(z_0) = a_m \neq 0$. Diperoleh bahwa tetangga dekat z_0, tidak terdapat nol, karena $g(z)$ tidak bisa langsung turun ke nol, karena kontinu. Jadi terdapat piringan dengan jari-jari berhingga δ mengelilingi z_0, sehingga $g(z) \neq 0$. Dengan kata lain

$$f(z) \neq 0 \quad \text{untuk} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Dengan pemahaman ini, z_0 disebut nol terisolasi dari $f(z)$.

Singularits Terisolasi

Seperti yang kita ingat, singularitas sebuah fungsi $f(z)$ merupakan sebuah titik sehingga $f(z)$ tidak analitik. Sebuah titik sehingga $f(z)$ analitik dikatakan sebagai titik regular. Sebuah titik z_0 dikatakan sebagai sebuah singularitas terisolasi dari $f(z)$ jika terdapat tetangga z_0 sehingga z_0 merupakan satu-satunya titik singular $f(z)$. Sebagai contoh, fungsi pecahan $P(z)/Q(z)$, (perbandingan dua buah polinomial) analitik di setiap titik kecuali pada nol dari $Q(z)$. Jika semua nol $Q(z)$ terisolasi, maka semua singularitas $P(z)/Q(z)$ terisolasi.

Kutub

Jika $f(z)$ memiliki sebuah titik singular terisolasi pada z_0, maka pada tetangga dekat z_0, $f(z)$ bisa diekspansikan dalam deret Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{a-1}{(z-z_0)} + \frac{a-2}{(z-z_0)^2} + \frac{a-3}{(z-z_0)^3} + \cdots .$$

Bagian deret yang mengandung pangkat negatif dari $(z-z_0)$ dikenal sebagai bagian utama dari $f(z)$ pada z_0. Jika bagian utama mengandung paling tidak sebuah suku tak nol tetapi jumlah suku-sukunya berhingga, maka terdapat bilangan bulat m sedemikian rupa sehingga

$$a_m \neq 0 \quad \text{dan} \quad a_{-(m+1)} = a_{-(m+2)} = \cdots = 0.$$

Ekspansinya berbentuk

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m},$$

dengan $a_{-m} \neq 0$. Dalam kasus ini, titik singular terisolasi z_0 dikenal sebagai kuutub dengan orde m. Sebuah kutub dengan orde satu dikenal sebagai kutub sederhana.

Jika koefisien pangkat negatif tak hingga banyaknya tidak nol, maka z_0 dikenal sebagai sebuah titik singular esensial.

3.4.2 Definisi Residu

Jika z_0 merupakan titik singular dari $f(z)$, maka fungsi $f(z)$ analitik pada tetangga $z = z_0$ dengan pengecualian pada titik $z = z_0$. Dalam tetangga dekat z_0, $f(z)$ bisa diekspansikan dalam deret Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{3.19}$$

Koefisien a_n dinyatakan dalam integral kontur (3.13). Di antara koefisien-koefisien, a_{-1} yang menarik

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\, \mathrm{d}z, \tag{3.20}$$

dengan C adalah kontur tertutup dalam arah berlawanan jarum jam di sekitar z_0. Ini adalah koefisien suku $(z - z_0)^{-1}$ dalam ekspansi, dan dinamakan residu dari $f(z)$ pada titik singular terisolasi z_0. Kita tekankan sekali lagi, agar a_{-1} dari (3.20) disebut residu pada z_0, kontur tertutup C harus tidak mengandung singularitas selain z_0. Kita bisa menyatakan residunya sebagai

$$a_{-1} = \mathrm{Res}_{z=z_0}[f(z)].$$

Alasan nama "residu" adalah jika kita mengintegralkan deret Laurent suku per suku terhadap kontur lingkaran, suku bersisanya dalam proses integrasi adalah suku a_{-1}. Dari (3.19) bahwa

$$\oint f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint (z - z_0)^n\, \mathrm{d}z.$$

Integral ini bisa dengan mudah dihitung dengan memilih $z - z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ dan $\mathrm{d}z = \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, \mathrm{d}\theta$,

$$\oint (z - z_0)^n\, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}r^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\, \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi\mathrm{i} & n = -1 \end{cases}.$$

Jadi suku dengan $n = -1$ yang bersisa. Koefisien suku ini disebut residu

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint f(z)\, \mathrm{d}z = a_{-1}.$$

3.4.3 Metode Mencari Residu

Residu yang didefinisikan dalam (3.20). Dalam beberapa kasus, kita bisa menghitung integral ini secara langsung. Tetapi, secara umum, residu bisa dihitung dengan metode yang lebih mudah. Karena metode ini, residu sangat berguna.

Deret Laurent

Jika mudah untuk menuliskan deret Laurent untuk $f(z)$ di sekitar $z = z_0$ yang berlaku di tengah-tengah z_0, maka residu hanyalah koefisien a_{-1} pada suku $1/(z-z_0)$. Sebagai contoh

$$f(z) = \frac{3}{z - 2}$$

sudah berbentuk deret Laurent di sekitar $z = 2$ dengan $a_{-1} = 3$ dan $a_n = 0$ untuk $n \neq -1$. Jadi residu pada 2 adalah 3.

Mencari residu $\exp(1/z^2)$ pada $z = 0$ juga mudah

$$\mathrm{e}^{1/z^2} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^6} + \cdots .$$

Tidak terdapat suku $1/z$, sehingga residunya nol.

Kutub Sederhana

Anggap $f(z)$ memiliki kutub sederhana, orde satu pada $z = z_0$, jadi kita bisa menuliskan

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots .$$

Jika kita kalikan identitas ini dengan $(z - z_0)$, kita peroleh

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots .$$

Sekarang jika z mendekati z_0, kita peroleh residunya

$$a_{-1} = \lim_{z \to a}(z - z_0)f(z).$$

Sebagai contoh jika

$$f(z) = \frac{4 - 3z}{z(z-1)(z-2)},$$

residu pada $z = 0$ adalah

$$\mathrm{Res}_{z=0}[f(z)] = \lim_{z \to 0} z\frac{4 - 3z}{z(z-1)(z-2)} = \frac{4}{(-1)(-2)} = 2,$$

residu pada $z = 1$ adalah

$$\mathrm{Res}_{z=1}[f(z)] = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{4 - 3z}{z(z-1)(z-2)} = \frac{4-3}{1(-1)} = -1,$$

dan residu pada $z = 2$ adalah

$$\mathrm{Res}_{z=2}[f(z)] = \lim_{z \to 2}(z-2)\frac{4 - 3z}{z(z-1)(z-2)} = \frac{4-6}{2(1)} = -1.$$

Hasil ini bisa dipahami dengan pecahan parsial. Dapat dengan mudah diverifikasi bahwa

$$f(z) = \frac{4 - 3z}{z(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{-1}{z-2}.$$

Dalam daerah $|z| < 1$, baik $\frac{-1}{z-1}$ dan $\frac{-1}{z-2}$ analitik. Jadi keduanya bisa dinyatakan dalam deret Taylor, yang tidak memiliki suku berpangkat negatif. Jadi deret Laurent $f(z)$ sekitar $z = 0$ dalam daerah $0 < |z| < 1$ memiliki bentuk

$$f(z) = \frac{2}{z} + a_0 + a_{1z} + a_{2z^2} + \cdots .$$

Terlihat bahwa a_{-1} berasal dari suku pertama. Jadi residu pada $z = 0$ sama dengan 2.

Dengan cara yang sama, deret Laurent $f(z)$ di sekitar $z = 1$ dalam daerah $0 < |z-1| < 1$ berbentuk

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + a_0 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + \cdots .$$

Jadi a_{-1} sama dengan -1. Untuk alasan yang sama, residu pada $z = 2$ berasal dari suku $\frac{-1}{z-2}$ dan jelaslah sama dengan -1.

Kutub Orde Banyak

Jika $f(z)$ memiliki kutub orde tiga pada $z = z_0$, maka

$$f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_2}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots .$$

Untuk memperoleh residu a_{-1}, kita harus mengalikan identitas ini dengan $(z-a)^3$

$$(z-z_0)^3 f(z) = a_{-3} + a_{-2}(z-z_0) + a_{-1}(z-z_0)^2 + a_0(z-z_0)^3 + \cdots .$$

dan turunkan dua kali terhadap z

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-z_0)^3 f(z)] = a_{-2} + a_{a-1}(z-z_0) + 3_{a0}(z-z_0)^2 + \cdots ,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}[(z-z_0)^3 f(z)] = 2_{a-1} + 3.2_{a0}(z-z_0) + \cdots .$$

Jika z mendekati z_0

$$\lim_{z\to z0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}[(z-z_0)^3 f(z)] = 2a_{-1},$$

dan bagi dua

$$\frac{1}{2}\lim_{z\to z0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}[(z-z_0)^3 f(z)] = a_{-1}.$$

Maka, jika $f(z)$ memiliki sebuah kutub berorde m pada $z = z_0$, maka residu $f(z)$ pada $z = z_0$ adalah

$$\mathrm{Res}_{z=z0}[f(z)] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)].$$

Sebagai contoh

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4}$$

jelaslah memiliki kutub orde empat pada $z = 2$. Jadi

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=2}[f(z)] &= \frac{1}{3!}\lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left[(z-2)^2 \frac{1}{z(z-2)^2}\right] \\ &= \frac{1}{6}\lim_{z\to 2} \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\frac{1}{z} = \frac{1}{6}\lim_{z\to 2}\frac{(-1)(-2)(-3)}{z^4} = -\frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Untuk memeriksa hasil ini, kita bisa mengekspansikan $f(z)$ dalam deret Laurent di sekitar $z = 2$ dalam daerah $0 < |z-2| < 2$. Untuk tujuan ini, marilah kita tuliskan $f(z)$ sebagai

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{1}{(z-2)^4}\frac{1}{[2+(z-2)]} = \frac{1}{2(z-2)^4}\frac{1}{\left(1+\frac{z-2}{2}\right)}.$$

Karena $|\frac{z-2}{2}| < 1$, jadi kita memiliki

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2(z-2)^4}\left[1 - \frac{z-2}{2} + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{2}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(z-2)^4} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z-2)^3} + \frac{1}{8}\frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{32} - \cdots . \end{aligned}$$

Terlihat bahwa koefisien $(z-2)^{-1}$ adalah $-1/16$.

Turunan Penyebut

Jika $p(z)$ dan $q(z)$ merupakan fungsi analitik, dan $q(z)$ memiliki nol sederhana pada z_0 dan $p(z_0) \neq 0$, maka

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

memiliki kutub sederhana pada z_0. Karena $q(z)$ analitik, maka bisa dinyatakan dengan deret Taylor di sekitar z_0

$$q(z) = q(z_0) + q'(z_0)(z-z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots .$$

Tetapi nilai ini nol pada z_0, jadi $q(z_0) = 0$, dan

$$q(z) = q'(z_0)(z-z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots .$$

Karena $f(z)$ memiliki kutub sederhana pada z_0, residunya pada z_0 adalah

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{z=z_0}[f(z)] &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{p(z)}{q'(z_0)(z-z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots} \\ &= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \end{aligned}$$

Kadang rumus ini paling efisein untuk menghitung residu.

Sebagai contoh fungsi

$$f(z) = \frac{z}{z^4+4}$$

memiliki empat buah kutub pada nilai nol penyebut

$$z^4 + 4 = 0.$$

Empat buah akar persamaannya adalah

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} = 1 + \mathrm{i}, \\
z_2 &= \sqrt{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+\pi/2)}} = -1 + \mathrm{i}, \\
z_3 &= \sqrt{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+\pi)}} = -1 - \mathrm{i}, \\
z_4 &= \sqrt{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+3\pi/2)}} = 1 - \mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Residunya pada z_1, z_2, z_3 dan z_4 adalah

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=z_1}[f(z)] &= \lim_{z\to z_1} \frac{z}{(z^4+4)'} = \lim_{z\to z_1} \frac{z}{4z^3} = \lim_{z-z_1} \frac{1}{4z^2} \\
&= \lim_{z\to(1+\mathrm{i})} \frac{1}{4z^2} = \frac{1}{4(1+\mathrm{i})^2} = -\frac{1}{8}\,\mathrm{i}, \\
\mathrm{Res}_{z=z_2}[f(z)] &= \lim_{z\to(-1+\mathrm{i})} \frac{1}{4z^2} = \frac{1}{4(-1+\mathrm{i})^2} = \frac{1}{8}\,\mathrm{i}, \\
\mathrm{Res}_{z=z_3}[f(z)] &= \lim_{z\to(-1-\mathrm{i})} \frac{1}{4z^2} = \frac{1}{4(-1-\mathrm{i})^2} = -\frac{1}{8}\,\mathrm{i}, \\
\mathrm{Res}_{z=z_4}[f(z)] &= \lim_{z\to(1-\mathrm{i})} \frac{1}{4z^2} = \frac{1}{4(1-\mathrm{i})^2} = \frac{1}{8}\,\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Dengan mudah diverifikasi bahwa

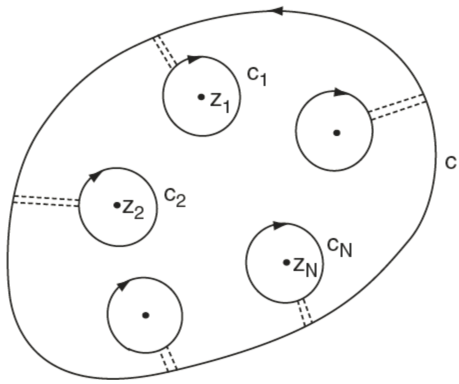
$$\frac{z}{z^4+4} = \frac{-\mathrm{i}/8}{z-(1+\mathrm{i})} + \frac{\mathrm{i}/8}{z-(-1+\mathrm{i})} + \frac{-\mathrm{i}/8}{z-(-1-\mathrm{i})} + \frac{\mathrm{i}/8}{z-(1-\mathrm{i})}.$$

Jadi residu yang dihitung pastilah benar.

3.4.4 Teorema Residu Cauchy

Perhatikan sebuah kurva tertutup sederhana yang terdapat pada interior sejumlah titik singular terisolasi $z_1, z_2, \ldots$ dari sebuah fungsi $f(z)$. Jika di sekitar titik singular, kita menggambarkan sebuah lingkaran sangat kecil sehingga melingkupi sebuah titik singular seperti pada Gambar 3.6, jadi $f(z)$ analitik dalam daerah antara C dan lingkaran-lingkaran kecil ini. Kemudian kita iris seperti bukti deret Laurent, kita menemukan dengan teorema Cauchy bahwa integral di sekitar C berlawanan arah jarum jam ditambah integral di sekitar lingkaran kecil searah jarum jam nol, karena integral sepanjang irisan meniadakan. Jadi

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$



Gambar 3.6: Lingkaran $C_1, C_2, \ldots, C_N$ masing-masing melingkupi titik singular $z_1, z_2, \ldots, z_N$ di dalam kurva tertutup.

dengan semua integral berlawanan arah jarum jam, tanda minus adalah untuk memasukkan arah jarum jam dari lingkaran kecil. Diperoleh:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Integral di kanan, dengan definisi, hanyalah residu $f(z)$ pada beberapa singularitas terisolasi di dalam C. Jadi kita telah memperoleh teorema residu yang penting:

Jika terdapat sejumlah titik singular $f(z)$ di dalam kontur C, maka

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \left\{ \mathrm{Res}_{z=z_1}[f(z)] + \mathrm{Res}_{z=z_2}[f(z)] + \cdots + \mathrm{Res}_{z=z_n}[f(z)] \right\}. \tag{3.21}$$

Ini dikenal sebagai teorema reisdu Cauchy atau sekedar teorema Cauchy.

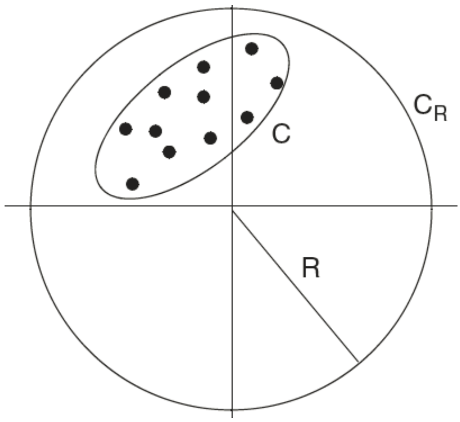
3.4.5 Teorema Residu Kedua

Jika jumlah titik singularitas di dalam kontur tertutup C sangat besar, atau terdapat titik singular tak terisolasi pada interior C, kita akan sulit melakukan integrasi kontur dengan teorema integrasi Cauchy. Untuk kasus tersebut, terdapat teorema residu yang lebih efisien.

Anggap $f(z)$ memiliki banyak titik singular di dalam C dan tidak memiliki titik singular di luar C, seperti Gambar 3.7.

Jika kita ingin menghitung integral $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$, pertama kita membuat kontur lingkaran C_R di luar C, berpusat di titik asal dengan jari-jari R. Kemudian dengan prinsip deformasi kontur

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z.$$



Gambar 3.7: Jika jumlah singularitas yang dilingkupi C sangat besar, maka akan lebih baik menggantikan kontur C dengan sebuah kontur sirkular besar C_R berpusat pada titik asal.

Sekarang jika kita ekspansikan $f(z)$ dalam deret Laurent di sekitar $z = 0$ di dalam daerah $|z| > R$

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots ,$$

koefisien a_{-1} diberikan oleh integral

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_R} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

Perhatikan bahwa a_{-1} dalam persamaan ini bukanlah residu $f(z)$ di sekitar $z = 0$, karena deretnya tidak berlaku pada tetangga dekat dari $z = 0$. Tetapi jika kita ganti z menjadi $1/z$, maka

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \cdots + a_{-3}z^3 + a_{-2}z^2 + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots ,$$

konvergen untuk $|z| < 1/R$. Terlihat bahwa a_{-1} adalah residu pada $z = 0$ dari fungsi $\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$, karena

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \cdots + a_{-3}z + a_{-2} + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z^3} + \cdots ,$$

merupakan deret Laurent berlaku untuk daerah $0 < |z|\frac{1}{R}$. Jadi kita sampai pada teorema berikut:

Jika $f(z)$ analitik di setiap titik kecuali untuk beberapa titik singular interior pada kontur tertutup berorientasi positif C, maka

$$\oint_C f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{Res}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right].$$

Contoh 3.4.1. Hitunglah integral $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ untuk

$$f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)},$$

dengan C sepanjang lingkaran $|z| = 2$ berlawanan arah jarum jam. (a) Gunakan teori residu Cauchy. (b) Gunakan teorema residu kedua.

Solusi 3.4.1. (a) Fungsi memiliki dua buah kutub pada $z = 0, z = 1$. Keduanya berada di dalam lingkaran $|z| = 2$. Jadi

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}_{z=0}[f(z)] + \mathrm{Res}_{z=1}[f(z)]\right\}.$$

Karena

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0}[f(z)] &= \lim_{z\to 0} z\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{-2}{-1} = 2,\\ \mathrm{Res}_{z=1}[f(z)] &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{3}{1} = 3,\end{aligned}$$

jadi

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(2+3) = 10\pi\mathrm{i}.$$

Jika C searah jarum jam, jawabannya $-10\pi\mathrm{i}$.

(b) Menurut teorema residu kedua

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Sekarang

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{5/z-2}{1/z(1/z-1)} = \frac{(5-2z)z}{1-z},\\ \frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{5-2z}{z(1-z)},\end{aligned}$$

yang memiliki kutub sederhana pada $z = 0$. Jadi

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right] = \lim_{z\to 0} z\frac{5-2z}{z(1-z)} = \frac{5}{1} = 5.$$

Sehingga

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot 5 = 10\pi\mathrm{i}.$$

Hasilnya sama dengan (a).

Contoh 3.4.2. Carilah nilai integral

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+4)}$$

diambil berlawanan arah jarum jam (a) $|z| = 2$, (b) $|z+2| = 3$.

Solusi 3.4.2. (a) Fungsinya memiliki kutub orde tiga pada $z = 0$ dan kutub sederhana pada $z = -4$. Hanya $z = 0$ berada di dalam ligkaran $|z| = 2$. Sehingga

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+4)} = 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}_{z=0}[f(z)].$$

Untuk kutub orde tiga

$$\mathrm{Res}_{z=0}[f(z)] = \frac{1}{2!} \lim_{z\to\to 0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} z^3 \frac{1}{z^3(z+4)} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{2}{(z+4)^3} = \frac{1}{64}.$$

Jadi

$$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+4)} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{64} = \frac{\pi}{32}\ \mathrm{i}.$$

(b) Untuk lingkaran $|z+2| = 3$, pusatnya ada pada $z = -2$ dan jari-jarinya 3. Kedua titik singular di dalam lingkaran. Jadi

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+4)} = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{z=0}[f(z)] + \mathrm{Res}_{z=-4}[f(z)].$$

Karena

$$\mathrm{Res}_{z=-4}[f(z)] = \lim_{z\to -4}(z+4)\frac{1}{z^3(z+4)} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}.$$

Sehingga

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z+4)} = 2\pi\mathrm{i}\left\{\frac{1}{64} - \frac{1}{64}\right\} = 0.$$

Contoh 3.4.3. Carilah nilai integral

$$\oint_C \tan \pi z\ \mathrm{d}z$$

diambil berlawanan jarum jam pada lingkaran satuan $|z| = 1$.

Solusi 3.4.3. Karena

$$f(z) = \tan \pi z = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z},$$

dan

$$\cos \frac{2n+1}{2}\pi = 0, \quad \text{untuk} \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots,$$

jadi $z = (2n+1)/2$ adalah nol dari $\cos \pi z$. Ekspansikan $\cos \pi z$ di sekitar nol dalam deret Taylor, kita bisa melihat bahwa $f(z)$ memiliki kutub sederhana pada masing-masing titik singular ini. Di antaranya adalah $z = 1/2$ dan $z = -1/2$ di dalam $|z| = 1$. Sehingga

$$\oint_C \tan \pi z \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}_{z=1/2}[f(z)] + \mathrm{Res}_{z=-1/2}[f(z)]\right\}.$$

Cara paling mudah mencari residunya adalah dengan metode "turunan penyebut"

$$\mathrm{Res}_{z=1/2}[f(z)] = \left[\frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\right]_{z=\frac{1}{2}} = \left[\frac{\sin \pi z}{-\pi \sin \pi z}\right]_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi},$$
$$\mathrm{Res}_{z=-1/2}[f(z)] = \left[\frac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\right]_{z=-\frac{1}{2}} = \left[\frac{\sin \pi z}{-\pi \sin \pi z}\right]_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi}.$$

Jadi

$$\oint_C \tan \pi z \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \left\{-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\right\} = -4\mathrm{i}.$$

Contoh 3.4.4. Hitunglah integral $\oint_C f(z)\, \mathrm{d}z$ untuk

$$f(z) = z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right),$$

diambil berlawanan jarum jam pada lingkaran satuan $|z| = 1$.

Solusi 3.4.4. Fungsi $f(z)$ memiliki singularitas esensial pada $z = 0$. Jadi

$$\oint_C z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \mathrm{Res}_{z=0}[fz].$$

Residunya adalah koefisien suku z^{-1} dalam deret Laurent di sekitar $z = 0$

$$z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} + \cdots\right)$$
$$= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^2} + \cdots.$$

Oleh karena itu

$$\mathrm{Res}_{z=0}[f(z)] = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Jadi

$$\oint_C z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{i}.$$

Contoh 3.4.5. Hitunglah integral $\oint_C f(z)\, \mathrm{d}z$ untuk

$$f(z) = \frac{z^{99} \exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{100} + 1},$$

diambil berlawanan jarum jam pada lingkaran satuan $|z| = 2$.

Solusi 3.4.5. Terdapat 100 titik singular yang berada pada keliling lingkaran satuan $|z| = 1$ dan sebuah titik singular esensial pada $z = 0$. Jelaslah teorema residu kedua lebih baik. Yaitu

$$\oint_C f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Sekarang

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{(1/z)^{99}\exp(z)}{(1/z)^{100}+1} = \frac{z\exp(z)}{1+z^{100}}, \\ \frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{\exp(z)}{z(1+z^{100})}. \end{aligned}$$

Jadi

$$\mathrm{Res}_{z=0}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)\right] = \lim_{z\to 0} z\frac{\exp(z)}{z(1+z^{100})} = 1.$$

Sehingga

$$\oint_C \frac{z^{99}\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{100}+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}.$$

Contoh 3.4.6. (a) Tunjukkan jika $|z| = 1$ dan $|z| = 2$ di dalam kontur tertutup C, maka

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z = 0.$$

(b) Buktikan bahwa jika semua titik singular $s_1, s_2, \ldots, s_n$ pada fungsi berikut

$$f(z) = \frac{1}{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_n)}$$

berada dalam kontur tertutup C maka

$$I = \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Solusi 3.4.6. (a) Ambil pecahan parsial, kita mempunyai

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-2)}.$$

Jadi

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{A}{(z-1)}\,\mathrm{d}z + \oint_C \frac{B}{(z-2)}\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}(A+B). \end{aligned}$$

Karena

$$\frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-2)} = \frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)} = \frac{(A+B)z-(2A+B)}{(z-1)(z-2)}$$

dan

$$\frac{(A+B)z-(2A+B)}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

diperoleh:

$$A + B = 0.$$

Maka

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,\mathrm{d}z = 0.$$

(b) Pecahan parsial $f(z)$ berbentuk

$$\frac{1}{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_n)} = \frac{r_1}{(z-s_1)} + \frac{r_2}{(z-s_2)} + \cdots + \frac{r_n}{(z-s_n)}.$$

Jadi

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \oint_C \frac{r_1}{(z-s_1)}\mathrm{d}z + \oint_C \frac{r_2}{(z-s_2)}\mathrm{d}z + \cdots + \oint_C \frac{r_n}{(z-s_n)}\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\mathrm{i}(r_1 + r_2 + \cdots + r_n).\end{aligned}$$

Sekarang

$$\frac{r_1}{(z-s_1)} + \frac{r_2}{(z-s_2)} + \cdots + \frac{r_n}{z-s_n} = \frac{(r_1+r_2+\cdots+r_n)z^{n-1}+\cdots}{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_n)}$$

dan

$$\frac{(r_1+r_2+\cdots+r_n)z^{n-1}+\cdots}{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_n)} = \frac{1}{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_n)}.$$

Karena penyebut di ruas kanan tidak memiliki suku z^{n-1}, maka

$$(r_1 + r_2 + \cdots + r_n) = 0,$$

dan

$$\oint_C \frac{1}{(z-s_1)(z-s_2)\cdots(z-s_n)}\,\mathrm{d}z = 0.$$

3.5 Penghitungan Integral Riil dengan Residu

Fakta menarik adalah kita bisa menggunakan teorema residu untuk menghitung integral variabel riil. Untuk beberapa jenis integral riil yang rumit, teorema residu menawarkan cara sederhana dan elegan dalam pengintegralan.

3.5.1 Integral Fungsi Trigonometrik

Marilah kita perhatikan integral dengan tipe

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Dengan substitusi

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{i}z,$$

maka

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

dan

$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z.$$

Integral yang diberikan berbentuk

$$I = \oint_C f(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z},$$

integrasinya dilakukan berlawanan arah jarum jam di sekitar lingkaran satuan berpusat pada $z = 0$.

Kita ilustrasikan metode ini dalam contoh berikut.

Contoh 3.5.1. Buktikan bahwa

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta} = 2\pi.$$

Solusi 3.5.1. Dengan transformasi yang baru saja dibicarakan, kita bisa menuliskan integralnya sebagai

$$I = \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\left[\sqrt{2} - \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]\mathrm{i}z} = \oint_C \frac{-2\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z^2 - 2\sqrt{2}z + 1)}$$
$$= -\frac{2}{\mathrm{i}}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}.$$

Integrannya memiliki dua buah kutub sederhana. Satunya pada $\sqrt{2}+1$ berada di luar lingkaran satuan dan tidak akan kita bahas. Satu lagi pada $\sqrt{2}-1$ yang berada pada lingkaran satuan, residu pada titik ini adalah

$$\mathrm{Res}_{z=\sqrt{2}-1}[f(z)] = \lim_{z\to\sqrt{2}-1}(z - \sqrt{2} + 1)\frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Jadi

$$I = -\frac{2}{\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi.$$

Contoh 3.5.2. Hitunglah integral

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a - b\cos\theta}, \quad a > b > 0.$$

Solusi 3.5.2. Karena integrannya simetrik pada $\theta = \pi$, kita bisa memperluas selang integrasi menjadi $[0, 2\pi]$,

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a - b\cos\theta},$$

yang bisa dituliskan sebagai sebuah integral mengelilingi sebuah lingkaran satuan dalam bidang kompleks

$$I = \frac{1}{2}\oint \frac{1}{a - b\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\mathrm{i}z} = \oint \frac{1}{2az - bz^2 - b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}}.$$

Sekarang

$$\oint \frac{1}{2az - bz^2 - b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}} = -\frac{1}{b\mathrm{i}}\oint \frac{1}{z^2 - \frac{2a}{b}z + 1}\,\mathrm{d}z,$$

mengambil ini sepertinya langkah trivial membuat koefisien z^2 menjadi satu yang sebenarnya menghindari beberapa kesulitan dari hal berikut. Titik singular integran adalah pada nilai nol penyebut

$$z^2 - \frac{2a}{b}z + 1 = 0.$$

Misalkan z_1 dan z_2 adalah akar persamaan ini yaitu

$$z_1 = \frac{1}{b}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right), \quad z_2 = \frac{1}{b}\left(a + \sqrt{a^2 - b^2}\right).$$

Karena

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 - z_2) + z_1 z_2 = z^2 - \frac{2a}{b}z + 1$$

diperoleh

$$z_1 z_2 = 1.$$

Ini berarti satu akar harus lebih besar dari 1, dan satu lagi lebih kecil dari 1. Selanjutnya, $z_1 < z_2$, z_1 harus lebih kecil dari 1 dan z_2 lebih besar dari 1. Maka hanya z_1 di dalam lingkaran satuan. Jadi

$$\begin{aligned}\oint \frac{\mathrm{d}z}{(z - z_1)(z - z_2)} &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=z_1}[f(z)] \\ &= 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to z_1}(z - z_1)\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{(z_1 - z_2)},\end{aligned}$$

dan

$$\frac{1}{(z_1 - z_2)} = -\frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Sehingga

$$I = -\frac{1}{b\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Contoh 3.5.3. Buktikan bahwa

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Solusi 3.5.3. Integralnya bisa dituliskan

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, \mathrm{d}\theta = \oint_C \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{2n} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{2^{2n}\,\mathrm{i}} \oint_C \left[\sum_{k=0}^{2n} C_k^{2n} Z^{2n-k} \frac{1}{z^k}\right] \frac{\mathrm{d}z}{z},$$

dengan C_k^{2n} merupakan koefisien binomial

$$C_k^{2n} = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}.$$

Dengan integrasi suku per suku, suku tak hilangnya hanyalah suku z^{-1}. Karena

$$\left[\sum_{k=0}^{2n} C_k^{2n} z^{2n-k} \frac{1}{z^k}\right] \frac{1}{z} = \left[\sum_{k=0}^{2n} C_k^{2n} z^{2n-2k}\right] \frac{1}{z},$$

jelas bahwa koefisien z^{-1} diberikan oleh suku dengan $k = n$. Jadi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2^{2n}\,\mathrm{i}} \oint_C \left[z^{2n-1} + 2nz^{2n-3} + \cdots + \frac{C_n^{2n}}{z} + \cdots + \frac{1}{z^{2n+1}}\right] \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2^{2n}\,\mathrm{i}} 2\pi\mathrm{i} C_n^{2n} = \frac{2\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \end{aligned}$$

3.5.2 Integral Tak Wajar I: Menutup Kontur dengan Setengah Lingkaran di Tak Hingga

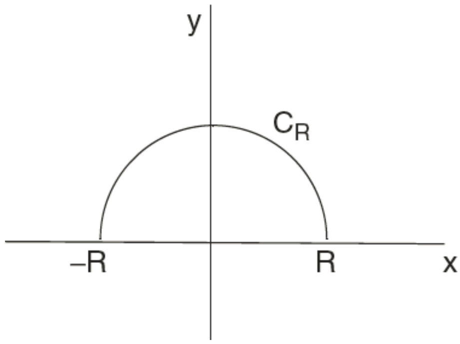
Perhatikan integral riil dengan jenis

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Integral tersebut, selang integrasinya tak berhingga, disebut sebagai integral tak wajar, dan memiliki arti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Dalam situasi tertentu, integral seperti ini bisa dihitung dengan teorema residu. Idenya adalah menutup kontur dengan beberapa bagian tambahan sepanjang integralnya nol atau beberapa perkalian integral asalnya sepanjang sumbu riil.



Gambar 3.8: Ketika $R \to \infty$, setengah lingkaran C_R pada tak hingga. Konturnya mengandung sumbu riil dan C_R melingkupi setengah bidang bagian atas.

Jika $f(x)$ merupakan fungsi pecahan (perbandingan dua buah polinomial) tanpa singularitas pada sumbu riil dan

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0,$$

maka bisa dibuktikan bahwa integral sepanjang sumbu riil dari $-\infty$ ke ∞ sama dengan integral pada kontur tertutup yang mengandung (a) garis lurus sepanjang sumbu riil dan (b) setengah lingkaran C_R pada tak hingga seperti ditunjukkan Gambar 3.8.

Hal ini demikian, karena dengan

$$z = Re^{\mathrm{i}\theta}, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{i}Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}z\ \mathrm{d}\theta,$$
$$\left|\int_{C_R} f(z)\ \mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} f(z\ \mathrm{i}z\ \mathrm{d}\theta)\right| \leq \mathrm{Max}\left|f(z)z\right|\pi,$$

yang nilainya nol ketika $R \to \infty$, karena $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Jadi

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\ \mathrm{d}z\right] = \oint_{\mathrm{u.h.p}} f(z)\ \mathrm{d}z,$$

dengan u.h.p berarti keseluruhan setengah bagian atas[1]. Ketika $R \to \infty$, semua kutub $f(z)$ pada setengah bagian atas akan berada di dalam kontur. Jadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \quad \text{(jumlah residu } f(z) \text{ pada setengah bidang bagian atas).}$$

[1] the entire upper half-plane

Dengan tanda yang sama, kita bisa menutup kontur dalam bagian bawah. Tetapi dalam kasus ini, arah integrasi searah jarum jam. Jadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \oint_{\text{l.h.p}} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$= -2\pi\mathrm{i} \quad \text{(jumlah residu } f(z) \text{ pada setengah bidang bagian bawah).}$$

Contoh 3.5.4. Hitunglah integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Solusi 3.5.4. Karena

$$\lim_{z\to\infty} z\frac{1}{1+z^2} = 0,$$

Kita bisa menghitung integral ini dengan integral kontur yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}x = \oint_{\text{u.h.p}} \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z.$$

Titik singular dari

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

adalah $z = \mathrm{i}$ dan $z = -\mathrm{i}$. Hanya $z = \mathrm{i}$ pada bagian atas bidang. Jadi

$$I = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=\mathrm{i}}[f(z)] = 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \pi.$$

Sekarng jika kita tutup kontur bagian bawah

$$I = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=-\mathrm{i}}[f(z)] = -2\pi\lim_{z\to-\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \pi,$$

hasilnya tentu saja sama.

Contoh 3.5.5. Buktikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Solusi 3.5.5. Empat buah titik singular dari

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

adalah $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}7\pi/4}$. Hanya $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$ yang berada di atas bidang. Jadi

$$\oint_{\mathrm{u.h.p}} \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left\{\mathrm{Res}_{z=\exp(\mathrm{i}\pi/4)}[f(z)]\right\}.$$

Untuk persoalan jenis ini, akan lebih mudah menghitung residu dengan metode $p(a)/q'(a)$. Jika kita menggunakan metode $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$, perhitungan akan lebih sulit. Karena

$$\mathrm{Res}_{z=\exp(\mathrm{i}\pi/4)}[f(z)] = \left[\frac{1}{(z^4+1)}\right]_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} = \left[\frac{1}{az^3}\right]_{z=\exp(\mathrm{i}\pi/4)} = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4},$$
$$\mathrm{Res}_{z=\exp(\mathrm{i}3\pi/4)}[f(z)] = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=\exp(\mathrm{i}3\pi/4)} = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}9\pi/4} = \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4},$$

jadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4+\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right]$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right] = \pi\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

3.5.3 Integral Fourier dan Lemma Jordan

Jenis lain integral yang penting berbentuk

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

bisa juga dihitung dengan teorema residu. Jenis integral ini dikenal sebagai integral Fourier dari $f(x)$. Kita akan membuktikan sepanjang $f(x)$ tidak memiliki singularitas pada sumbu riil dan

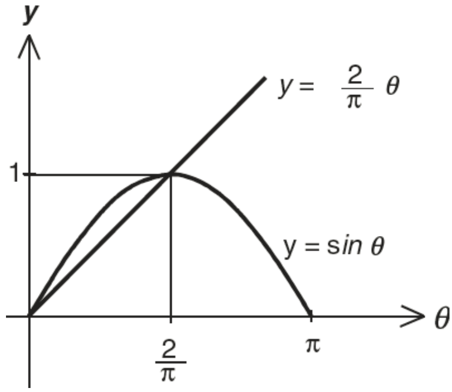
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0, \tag{3.22}$$

kontur integral ini bisa ditutup dengan setengah lingkaran yang sangat besar dalam setengah bidang atas jika k positif dan setengah bagian bawah jika k negatif. Pernyataan ini berdasarkan lemma Jordan, yang menyatakan, dengan syarat (3.22)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

dengan k bilangan positif riil dan C_R berupa setengah lingkaran di bagian atas bidang dengan jari-jari tak hingga R.

Untuk membuktikan lemma ini, pertama kita lakukan pengamatan sebagai berikut. Dalam Gambar 3.9 $y = \sin\theta$ dan $y = \frac{2}{\pi}\sin\theta$ ditunjukkan bersama. Terlihat dalam



Gambar 3.9: Ketika $R \to \infty$, setengah lingkaran C_R pada tak hingga. Konturnya mengandung sumbu riil dan C_R melingkupi setengah bidang bagian atas.

selang $[0, \frac{\pi}{2}]$, kurva $y = \sin\theta$ cekung dan selalu berada atau di atas garis $y = \frac{2}{\pi}\sin\theta$. Jadi

$$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta \quad \text{untuk} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Dengan

$$z = Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta, \quad dz = iRe^{i\theta}\, d\theta,$$

kita mempunyai

$$\left|\int_{C_R} e^{ikz} f(z)\, dz\right| = \left|\int_0^{pi} e^{ikz} f(z)\, iRe^{i\theta}\, d\theta\right| \leq \int_0^{\pi} \left|e^{ikz}\right| |f(z)| R \left|e^{i\theta}\right| d\theta.$$

Karena

$$\left|e^{ikz}\right| = \left|e^{i(R\cos\theta + \theta i R\sin\theta)}\right| = \left|e^{ikR\cos\theta}\right| \left|e^{-kR\sin\theta}\right| = e^{-kR\sin\theta},$$

maka

$$\left|\int_{C_R} e^{ikz} f(z)\, dz\right| \leq \text{Max}|f(z)| R \int_0^{\pi} e^{-kR\sin\theta}\, d\theta.$$

Gunakan $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, kita bisa menuliskan integral terakhir sebagai

$$\int_0^{\pi} e^{-kR\sin\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-kR\sin\theta}\, d\theta.$$

Sekarang $\sin\theta = \frac{2}{\pi}\theta$ dalam selang $[0, \frac{\pi}{2}]$, jadi

$$2\int_0^{\pi/2} e^{-kR\sin\theta}\, d\theta \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-kR2\theta/\pi}\, d\theta = \frac{\pi}{kR}(1 - e^{-kR}). \tag{3.23}$$

Sehingga

$$\left|\int_{C_R} e^{ikz} f(z)\, dz\right| \leq \text{Max}|f(z)| \frac{\pi}{k}(1 - e^{-kR}).$$

Ketika $z \to \infty$, $R \to \infty$ dan ruas kanan persamaan terakhir nol, karena $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Diperoleh:

$$\lim_{z\to\infty} \int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} f(z)\, \mathrm{d}z = 0,$$

dan lemma Jordan terbukti. Dengan sifat lemma ini, integral Fourier bisa dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f(x)\, \mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} f(z)\, \mathrm{d}z \right) \\ &= \oint_{\text{u.h.p}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{\text{semua}} R_{\text{u.h.p}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} f(z)\right],\end{aligned}$$

dengan $\sum_{i=1}^{\text{semua}} R_{\text{u.h.p}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} f(z)\right]$ berarti jumlah semua residu $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} f(z)$ di bagian atas bidang.

Perhatikan jika k negatif, kita tidak bisa menutup kontur di bagian atas bidang, karena (3.23) faktor e^{-kR} akan membesar. Tetapi dalam kasus ini kita bisa menutup kontur dalam bagian bawah bidang, karena mengintegralkan dari $\theta = 0$ ke $\theta = -\pi$ akan memberikan tanda negatif yang membuat integral setengah lingkaran yang besar pada bagian bawah bidang hilang. Jadi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}|k|x} f(x)\, \mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i} \sum_{i=1}^{\text{semua}} R_{1.\text{h.p}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|k|z} f(z)\right],$$

dengan $\sum_{i=1}^{\text{semua}} R_{1.\text{h.p}} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|k|z} f(z)\right]$ berarti jumlah semua residu dari $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|k|z} f(z)$ di bidang bagian bawah. Tanda negatif karena integral kontur tertutupnya searah jarum jam.

Karena $\sin kx$ dan $\cos kx$ merupakan kombinasi linier dari $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ dan $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$, integral riilnya berbentuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos kx f(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{dan} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin kx f(x)\, \mathrm{d}x$$

bisa diperoleh dengan mudah menggunakan jenis integral berikut

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos kx f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\, \mathrm{d}x \right], \tag{3.24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin kx f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f(x)\, \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\, \mathrm{d}x \right]. \tag{3.25}$$

Jika kita yakin hasil integrasinya sebuah nilai riil berhingga, kita bisa menuliskan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos kx f(x)\, \mathrm{d}x = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f(x)\, \mathrm{d}x, \tag{3.26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin kx f(x)\, \mathrm{d}x = \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} f(x)\, \mathrm{d}x. \tag{3.27}$$

Rumus ini harus digunakan dengan hati-hati (3.24) dan (3.25) selalu berlaku, (3.26) dan (3.27) hanya berlaku jika tidak ada suku imajiner pada $f(x)$.

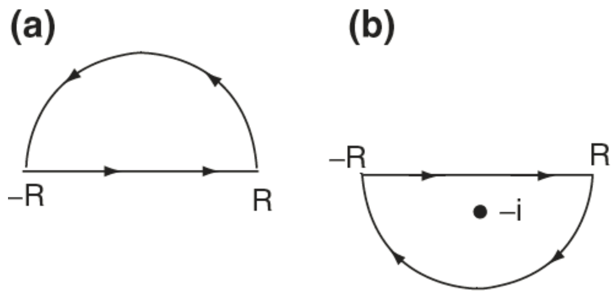
Contoh 3.5.6. Hitunglah integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x + \mathrm{i}}\,\mathrm{d}x.$$

Solusi 3.5.6. Terdapat kutub sederhana di bagian bawah bidang

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x.$$

Untuk menghitung integral pada ruas kanan, kita harus menutup kontur dalam bagian atas bidang seperti Gambar 3.10 **(a)**.



Gambar 3.10: Kontur penutup dengan setengah lingkaran sangat besar. **(a)** Kontur menutup bagian atas; **(b)** Kontur menutup bagian bawah.

Karena di bagian atas bidang fungsinya analitik di setiap titik maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x = \oint_{\text{u.h.p}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Untuk menghitung integral kedua, kita harus menutup kontur bagian bawah seperti Gambar 3.10 **(b)**. Karena terdapat kutub sederhana pada $z = -\mathrm{i}$, kita mempunyai

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x = \oint_{\text{l.h.p}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=-\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}}\right]$$
$$= -2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to-\mathrm{i}}(z+\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z+\mathrm{i}} = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Jadi

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[0 - \left(-2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-1}\right)\right] = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

Jelaslah

$$I \neq \mathrm{Im}\int_{\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x,$$

Hal ini karena terdapat bilangan imajiner i pada fungsinya.

Contoh 3.5.7. Hitunglah integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\, \mathrm{d}x, \quad \omega > 0.$$

Solusi 3.5.7.

$$I = \oint_{\mathrm{l.h.p}} \frac{1}{z^2+4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}\, \mathrm{d}z.$$

Satu-satunya titik singular di bagian bawah bidang pada $z = -2\mathrm{i}$, jadi

$$\begin{aligned} I &= -2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}_{z=-2\mathrm{i}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}}{z^2+4}\right] \\ &= -2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to-2\mathrm{i}} (z+2\mathrm{i})\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega z}}{(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})} = -2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-2\omega}}{-4\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-2\omega}. \end{aligned}$$

Integral ini tidak lain adalah transformasi Fourier dari $\frac{1}{x^2+4}$, yang akan kita lihat belakangan.

Contoh 3.5.8. Hitunglah integral

$$I(t) = \frac{A}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\omega t}{R+\mathrm{i}\omega L}\mathrm{d}\omega,$$

untuk $t > 0$ dan $t < 0$.

Solusi 3.5.8.

$$I = \frac{A}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{i}L}\omega L\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\left(\frac{R}{\mathrm{i}L}\right)+\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{A}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{i}L}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - \mathrm{i}\frac{R}{L}}\,\mathrm{d}\omega.$$

Untuk $t > 0$, kita bisa menutup integral pada bagian atas bidang

$$I = \frac{A}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{i}L}\oint_{\mathrm{u.h.p}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{z-\mathrm{i}\frac{R}{L}}\,\mathrm{d}z.$$

Satu-satunya titik singular terletak pada $z = \mathrm{i}\frac{R}{L}$ di atas bidang. Jadi

$$I = \frac{A}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{i}L}2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}\frac{R}{L}}\left(z-\mathrm{i}\frac{R}{L}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{z-\mathrm{i}\frac{R}{L}} = \frac{A}{L}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\left(\mathrm{i}\frac{R}{L}\right)} = \frac{A}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Untuk $t < 0$, kita harus menutup kontur di bagian bawah bidang. Karena tidak terdapat titik singular dalam bagian bawah bidang, integralnya nol. Jadi

$$I(t) = \begin{cases} \frac{A}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}.$$

Untuk yang biasa dengan rangkaian AC, integral $I(t)$ adalah arus dalam rangkaian dengan hambatan R dan induktansi L yang dihubungkan seri dengan tegangan impulsif V. Pulsa yang tinggi dalam selang waktu singkat bisa dinyatakan sebagai

$$V(t) = \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega,$$

dan impedansi sirkuit adalah $Z = R + \mathrm{i}\omega L$ dan arusnya diberikan oleh $\frac{V}{Z}$. Jadi arus total adalah integral yang sudah kita hitung.

Contoh 3.5.9. Hitunglah integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Solusi 3.5.9.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \oint_{\mathrm{u.h.p}} \frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$$

Satu-satunya titik singular terletak pada $z = \mathrm{i}$ di atas bidang. Jadi

$$\oint_{\mathrm{u.h.p}} \frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{z=\mathrm{i}}\left[\frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)}\right]$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z^2+1)} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}\,\mathrm{i},$$

dan

$$I = \mathrm{Im}\left(\frac{\pi}{\mathrm{e}}\,\mathrm{i}\right) = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

Contoh 3.5.10. (a) Buktikan bahwa

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\,\mathrm{e}^{-ba}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

(b) Gunakan hasil (a) untuk menghitung

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos bx}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Solusi 3.5.10. (a) Integrannya berupa fungsi genap jadi

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ibz}}{x^2+a62}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Res}\oint_{\mathrm{u.h.p}} \frac{\mathrm{e}^{ibz}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z$$

Titik singular berada di atas bidang pada $z = \mathrm{i}a$, jadi

$$\oint_{\mathrm{u.h.p}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=\mathrm{i}a}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2+a^2}\right]$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}a}(z-\mathrm{i}a)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{(z-\mathrm{i}a)(z+\mathrm{i}a)} = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b(\mathrm{i}a)}}{2a\mathrm{i}} = \frac{\pi}{a}\,\mathrm{e}^{-ba}.$$

Jadi

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{\pi}{a}\,\mathrm{e}^{-ba}\right) = \frac{\pi}{2a}\,\mathrm{e}^{-ba}.$$

(b) Lakukan turunan kedua ruas terhadap a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^\infty \frac{\cos bx}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{\pi}{2a}\,\mathrm{e}^{-ba}\right),$$

kita mempunyai

$$\int_0^\infty \frac{-2a\cos br}{(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{-\pi}{2a^2}\mathrm{e}^{-ba} + \frac{\pi(-b)}{2a}\,\mathrm{e}^{-ba}.$$

Sehingga

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3}(1+ab)\mathrm{e}^{-ba}.$$

3.5.4 Integral Tak Wajar II: Menutup Kontur dengan Kontur Persegi dan Bentuk Pie

Jika integran tidak cukup cepat bernilai nol pada kontur sangat besar C_R, maka kontur tidak bisa ditutup dengan setengah lingkaran besar, ke atas maupun ke bawah. Untuk kasus seperti ini, terdapat jenis kontur tertutup lain yang membuat kita bisa mengeliminasi semua bagian integral tetapi bagian yang diinginkan. Tetapi memilih kontur yang sesuai mensyaratkan kecerdasan yang cukup. Di sini kita menyajikan dua buah jenis kontur tambahan yang diketahui berguna.

Kontur Persegi

Jika tinggi persegi panjang bisa dipilih sedemikian rupa sehingga integral di bagian atas sisi persegi panjang adalah sama dengan kelipatan konstan integral sepanjang sumbu riil, maka kontur seperti ini mungkin berguna untuk menghitung integral yang integrannya hilang ketika nilai mutlak dari variabel riil menuju tak hingga. Umumnya, integran yang mengandung fungsi eksponensial atau fungsi hiperbolik adalah kandidat yang baik untuk metode ini. Sekali lagi metode ini paling baik diilustrasikan oleh contoh.

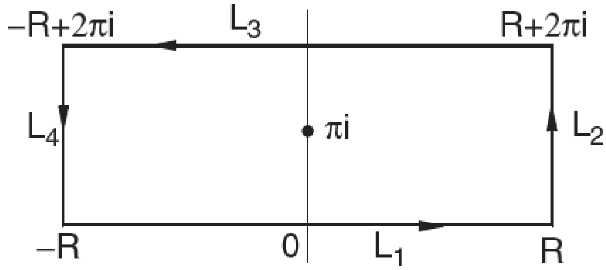
Contoh 3.5.11. Buktikan bahwa

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

Solusi 3.5.11. Pertama kita perluas integran secara analitik dalam bidang kompleks

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^{z}}.$$

Penyebut $f(z)$ tidak berubah jika z bertambah $2\pi\mathrm{i}$, sedangkan pembilang berubah



Gambar 3.11: Kontur persegi tertutup.

dengan faktor $\mathrm{e}^{a2\pi\mathrm{i}}$. Jadi kontur persegi dalam Gambar 3.11 bisa sesuai.

Integralkan sepanjang loop persegi, kita mempunyai

$$\oint f(z)\,\mathrm{d}z = J_1 + J_2 + J_3 + J_4,$$

dengan

$$J_1 = \int_{L_1} \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^{z}}\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x,$$

$$J_2 = \int_{L_2} \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^{z}}\,\mathrm{d}z = \int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{a(R+\mathrm{i}y)}}{1+\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y}}\mathrm{i}\,\mathrm{d}y,$$

$$J_3 = \int_{L_3} \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^{z}}\,\mathrm{d}z = \int_{R}^{-R} \frac{\mathrm{e}^{a(x+\mathrm{i}2\pi)}}{1+\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}2\pi}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a}\int_{R}^{-R} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x,$$

$$J_4 = \int_{L_4} \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^{z}}\,\mathrm{d}z = \int_{2\pi}^{0} \frac{\mathrm{e}^{a(-R+\mathrm{i}y)}}{1+\mathrm{e}^{-R+\mathrm{i}y}}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}y.$$

Ketika $R \to \infty$

$$\lim_{R\to\infty} J_1 = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = I,$$

$$\lim_{R\to\infty} J_3 = \lim_{R\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a}\int_{1+\mathrm{e}^{x}}^{\mathrm{e}^{ax}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a}I.$$

Selanjutnya, karena $|e^{a(R+iy)}| = e^{aR}$ dan nilai minimum dari $|1+e^{R+iy}|$ adalah $|1-e^R|$, jadi

$$\lim_{R\to\infty} |J_2| \leq \lim_{R\to\infty} \left| \frac{e^{aR}}{1-e^R} \right| 2\pi = \lim_{R\to\infty} \frac{2\pi}{e^{(1-a)}R} \to 0, \quad \text{karena} \quad a < 1.$$

dengan cara yang sama

$$\lim_{R\to\infty} |J_4| \leq \lim_{R\to\infty} \left| \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} \right| 2\pi = \lim_{R\to\infty} 2\pi e^{-aR} \to 0, \quad \text{karena} \quad a > 0.$$

Jadi

$$\lim_{R\to\infty} \oint \frac{e^{az}}{1+e^z}\, dz = \left(1 - e^{i2\pi a}\right) I.$$

Sekarang di dalam loop terdapat kutub sederhana pada $z = i\pi$, karena

$$1 + e^z = 1 + e^{i\pi} = 1 - 1 = 0.$$

Dengan teorema residu, kita mempunyai

$$\begin{aligned} \oint \frac{e^{az}}{1+e^z}\, dz &= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi} \left[\frac{e^{az}}{1+e^z} \right] = 2\pi i \left[\frac{e^{az}}{(1+e^z)'} \right]_{z=i\pi} \\ &= 2\pi i \frac{e^{i\pi a}}{e^{i\pi}} = -2\pi i\, e^{i\pi a}. \end{aligned}$$

Jadi

$$\left(1 - e^{i2\pi a}\right) I = -2\pi i\, e^{i\pi a},$$

sehingga

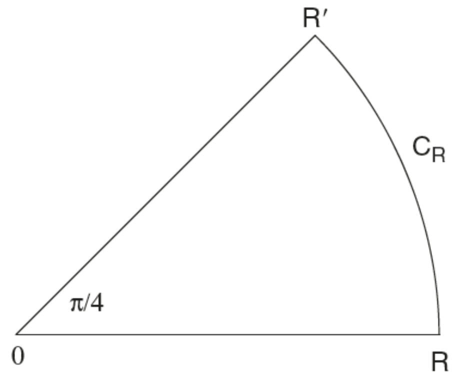
$$I = \frac{-2\pi i\, e^{i\pi a}}{1 - e^{i2\pi a}} = \frac{-2\pi i}{e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Kontur Bentuk Pie

Jika intergral dari 0 sampai ∞, bukan dari $-\infty$ sampai ∞ dan tidak satupun metode bisa digunakan, maka kontur bentuk pie mungkin bisa digunakan. Dalam contoh berikut kita akan menggunakan metode ini untuk menghitung integral Fresnel yang penting dalam difraksi dan propagasi sinyal.

Contoh 3.5.12. Hitunglah integral Fresnel

$$I_c = \int_0^\infty \cos(x^2) dx, \quad I_s = \int_0^\infty \sin(x^2) dx.$$



Gambar 3.12: Kontur bentuk pie. Dalam bidang kompleks R' terletak pada $z(R') = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

Solusi 3.5.12. Dua buah integral Fresnel merupakan bagian riil dan imajiner dari

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x = I_c + \mathrm{i}I_s.$$

Kita integralkan fungsi kompleks $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ pada kontuk bentuk pie pada Gambar 3.12. Karena fungsinya analitik di dalam kontur tertutup, integral loopnya haruslah nol,

$$\oint \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Integral loop ini secara alami membagi tiga bagian. Pertama dari 0 ke R sepanjang sumbu$-x$ riil, kemudian sepanjang lintasan dari sebuah busur C_R dari R ke R'. Terakhir kembali ke 0 sepanjang garis radial lurus dengan $\theta = \pi/4$

$$\int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z + \int_{R'}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

dalam limit $R \to \infty$, integral pertama adalah yang ingin kita cari

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x.$$

pada lintasan integral ketiga, dengan $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ dan $\theta = \pi/4$

$$z^2 = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}r^2,$$
$$\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}r = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{d}r,$$

maka integral ketiganya menjadi

$$\int_{R'}^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z = \int_R^0 \mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{d}r = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^R \mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Integral kedua sepanjang C_R sama dengan nol dalam limit $R \to \infty$. Pada C_R

$$z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \mathrm{d}z = \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,$$
$$z^2 = R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} = R^2(\cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta),$$

jadi integral keduanya bisa dituliskan

$$\int_{C_R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}R\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2(\cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$
$$\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}R\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(R^2\cos 2\theta + \theta)}\mathrm{e}^{-R^2\sin\theta}\mathrm{d}\theta,$$

Jadi

$$\left|\int_R^{R'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\,\mathrm{d}z\right| \le R\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R^2\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi$$

dengan $\phi = 2\theta$. Menurut lemma Jordan (3.23)

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R^2\sin\phi}\mathrm{d}\phi \le \frac{\pi}{2R^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-R^2}\right).$$

Jadi nilainya menuju nol ketika $1/R^2$ untuk $R \to \infty$. Dengan integral kedua sama dengan nol, kita mempunyai

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = 0. \tag{3.28}$$

Kita tahu

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Untuk memeriksa hasil ini, definisikan

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y,$$

jadi

$$I^2 = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

dalam koordinat polar

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{4},$$

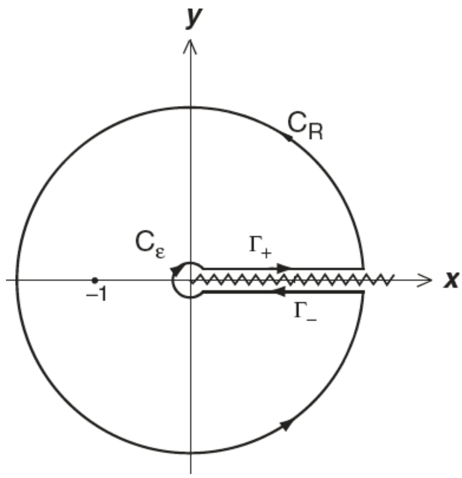
jadi $I = \sqrt{\pi}/2$.

Dari (3.28) diperoleh

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Jadi

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$



Gambar 3.13: Kontur tanpa potongan cabang sepanjang sumbu$-x$ positif.

3.5.5 Integrasi Sepanjang Potongan Cabang

Beberapa integral dari fungsi bernilai ganda bisa juga dihitung dengan teorema residu Cauchy. Sebagai contoh, integran dari integral

$$I = \int_0^\infty x^{-\alpha} f(x)\, \mathrm{d}x$$

bernilai ganda jika α bukan bilangan bulat. Dalam bidang kompleks, $z^{-\alpha}$ bernilai ganda karena dengan z dinyatakan sebagai

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + n2\pi)}$$

ketika n bilangan bulat, $z^{-\alpha}$ menjadi

$$z^{-\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha \ln z} = \mathrm{e}^{-\alpha(\ln r + \mathrm{i}\theta + \mathrm{i}n2\pi)}.$$

Terlihat bahwa $z^{-\alpha}$ adalah fungsi bernilai ganda, sebagai contoh dengan $\alpha = 1/3$,

$$z^{-\frac{1}{3}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}(\ln r + \mathrm{i}\theta)} & n = 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}(\ln r + \mathrm{i}\theta)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3} = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}(\ln r + \mathrm{i}\theta)} & n = 1, \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}(\ln r + \mathrm{i}\theta)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}4\pi/3} = \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}(\ln r + \mathrm{i}\theta)} & n = 2, \end{cases} .$$

Untuk mendefinisikan $z^{-\alpha}$ sebagai sebuah fungsi single valued, sudut θ harus dibatasi dalam sebuah selang 2π dengan sebuah potongan cabang. Jika kita memilih potongan cabang sepanjang sumbu$-x$ positif, maka integral riil kita merupakan sebuah integral pada bagian atas potongan cabang. Biasanya persoalan bisa diselesaikan dengan kontur tertutup seperti Gambar 3.13, yaitu semua potongan cabang dikeluarkan dari interior kontur. Marilah kita ilustrasikan metode ini dengan sebuah contoh.

Contoh 3.5.13. Hitunglah integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Solusi 3.5.13. Perhatikan integral kontur

$$\oint \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z$$

mengelilingi kontur tertutup pada Gambar 3.13. Karena titik cabang pada $z = 0$ dan semua potongan cabang dikeluarkan, maka hanya titik singular di dalam kontur ini pada $z = -1$. Jadi

$$\oint \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\left[\frac{z^{-\alpha}}{1+z}\right] = 2\pi\mathrm{i}(-1)^{-\alpha} = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(-\alpha)} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}}.$$

Integral ini terdiri dari empat bagian

$$\oint \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_+} \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z + \int_{C_R} \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_-} \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z + \int_{C_\epsilon} \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z.$$

Integral pertama sepanjang bagian atas potongan cabang dengan $\theta = 0$, integral kedua sepanjang bagian luar lingkaran besar dengan cari-jari R, integral ketiga sepanjang bagian bawah potongan cabang dengan $\theta = 2\pi$, dan integral keempat sepanjang lingkaran kecil dengan jari-jari ϵ.

Dengan $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, jelaslah ketika $\theta = 0$ dan $\theta = 2\pi$, r sama dengan x. Jadi

$$\int_{\Gamma_+} \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z = \int_\epsilon^R \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\Gamma_-} \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z = \int_R^\epsilon \frac{x^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(-\alpha)}}{1+x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\alpha}\int_\epsilon^R \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Pada $C_R, z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z\right| \le \left|\frac{R^{-\alpha}}{1-R}2\pi R\right|,$$

dengan $R^{-\alpha}$ adalah nilai maksimum pembilang, $1-R$ adalah nilai minimum penyebut, dan $2\pi R$ adalah panjang C_R. Ketika $R \to \infty$,

$$\left|\frac{R^{-\alpha}}{1-R}2\pi R\right| \propto R^{-\alpha} \to 0, \quad \text{karena} \quad \alpha > 0.$$

Dengan cara yang sama, $C_\epsilon, z = \epsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,

$$\left|\int_{C_\epsilon} \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{\epsilon^{-\alpha}}{1-\epsilon}2\pi\epsilon.$$

Ketika $\epsilon \to 0$

$$\frac{\epsilon^{-\alpha}}{1-\epsilon} 2\pi\epsilon \propto \epsilon^{1-\alpha} \to 0, \quad \text{karena} \quad \alpha < 1.$$

Dalam limit $R \to \infty$ dan $\epsilon \to 0$, kita mempunyai

$$\oint \frac{z^{-\alpha}}{1+z}\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\alpha} \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}}.$$

Jadi

$$\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\alpha}\right) \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}},$$

dan

$$\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi}\alpha)} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

3.5.6 Nilai Utama dan Integral Lintasan *Indented*

Kadang kita menemui integral $\int f(x)\mathrm{d}x$ dengan intrgran yang bernilai tak hingga pada titik $x = x_0$ pada selang integrasi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Agar integral ini bisa dipahami, kita mendefiniskan nilai utama integral sebagai

$$P\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-R}^{x_0-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x\right].$$

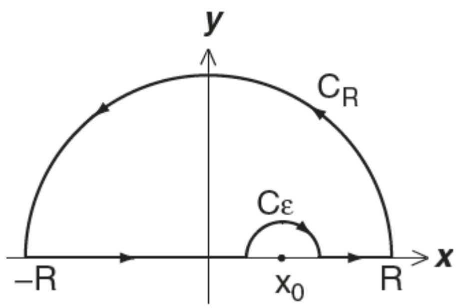
Ini adalah cara untuk menghindari singularitas. Kita mengintegralkan pada jarak yang kecil ε mendekati singularitas, melewati singularitas dan mengintegralkan lagi dari jarak ε melewati singularitas.

Ketika menghitung integral dengan teorema residu, kita tidak diperkenankan memiliki singularitas pada kontur, tetapi, dengan nilai utama integral, kita bisa mengakomodasi kutub sederhana pada kontur dengan mendoformasi kontur untuk menghindari kutub. Nilai utama integral

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

bisa dihitung dengan teorema residu untuk sebuah fungsi $f(z)$ yang memenuhi syarat asimptotik yang sudah kita bicarakan. Yaitu, baik $zf(z) \to 0$ ketika $z \to \infty$, atau $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}g(z)$ dan $g(z) \to 0$ ketika $z \to \infty$. Pertama marilah kita asumsikan $f(z)$ memiliki kutub sederhana dalam sumbu riil pada $z = x_0$ dan analitik di tempat lainnya. Dalam kasus ini, jelaslah integral kontur tertutup mengelilingi lintasan yang ditunjukkan Gambar 3.14 sama dengan nol

$$\oint f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$



Gambar 3.14: Kontur tertutup terdiri dari setengah lingkaran besar C_R pada bagian atas bidang berjari-jari R, segmen garis dari $-R$ ke $x_0-\varepsilon$ dan dari $x_0+\varepsilon$ ke R sepanjang sumbu riil, dan sebuah setengah lingkaran kecil C_ε dengan jari-jari ϵ di atas titik singular x_0.

Integralnya bisa dituliskan sebagai

$$\oint f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{x_0+\varepsilon}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

dalam limit $R\to\infty$, dengan $f(z)$ memenuhi syarat tertentu, kita telah membuktikan

$$\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Selanjutnya, dua buah integral garis sepanjang sumbu x menjadi nilai utama integral ketika $\varepsilon\to 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right] = P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Karena $f(z)$ memiliki kutub sederhana pada $z=x_0$, maka pada tetangga dekat x_0, deret Laurent $f(z)$ berbentuk

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-x_0)^n.$$

Pada setengah lingkaran C_ε di sekitar x_0

$$z-x_0 = \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

dengan ε adalah jari-jari setengah lingkaran. Integral mengelilingi C_ε bisa dituliskan sebagai

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\pi}^{0}\left(\frac{a_{-1}}{\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n\right)\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Dalam limit $\varepsilon\to 0$, semua suku hilang kecuali suku pertama. Jadi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\pi}^{0} a_{-1}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\pi a_{-1} = -\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}_{z=x_0}[f(z)].$$

Dalam limit $R \to \infty$ dan $\varepsilon \to 0$

$$\oint f(z)\ \mathrm{d}z = P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi\mathrm{Res}[f(z)] = 0.$$

Jadi

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{i}\pi\mathrm{Res}[f(z)].$$

Perhatikan untuk menghindari titik singular, kita bisa memilih bagian bawah sebaik bagian atas. Untuk setengah lingkaran di bawah sumbu$-x$, arah integrasi berlawanan arah jarum jam

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\pi}^{2\pi} a_{-1}\ \mathrm{i}\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\pi a_{-1} = \mathrm{i}\pi\mathrm{Res}_{z=x_0}[f(z)].$$

Tetapi, dalam kasus ini, titik singular di dalam kontur tertutup, dan integral loop sama dengan $2\pi\mathrm{i}$ kali residu pada $z = x_0$. Jadi kita memiliki

$$\oint f(z)\ \mathrm{d}z = P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x + \mathrm{i}\pi\mathrm{Res}_{z=x_0}[f(z)] = 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}_{z=x_0}[f(z)].$$

Tidak mengejutkan kita memperoleh hasil yang sama

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}_{z=x_0}[f(z)] - \mathrm{i}\pi\mathrm{Res}_{z=x_0}[f(z)] = \mathrm{i}\pi\mathrm{Res}_{z=x_0}[f(z)].$$

Sekarang jika $f(z)$ memiliki lebih dari satu kutub dalam sumbu riil, (semuanya orde pertama), selanjutnya, ini memiliki singularitas di bagian atas bidang, (tidak harus orde pertama), maka dengan argumen yang sama, kita bisa membuktikan

$$\begin{aligned} P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}&\left(\sum \text{residu pada sumbu } x\right) \\ &+ 2\pi\mathrm{i}\left(\sum \text{residu pada bagian atas bidang}\right). \end{aligned}$$

Contoh 3.5.14 Carilah nilai utama dari

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\ \mathrm{d}x$$

dan gunakan hasilnya untuk membuktikan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \pi.$$

Solusi 3.5.14 Satu-satunya titik singular adalah pada $x = 0$, jadi

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\ \mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\ \mathrm{Res}_{z=0}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\right] = \pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z'}\right]_{z=0} = \pi\mathrm{i}.$$

Karena

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x = P\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right],$$

jadi

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \pi.$$

Perhatikan bahwa $x = 0$ merupakan singularitas yang bisa dibuang dari $\sin x/x$, karena ketika $x \to 0$, $\sin x/x = 1$. Ini berarti ε, bukan mendekati nol, bisa dipilih sama dengan nol. Jadi nilai utama integral adalah integralnya sendiri

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Kita akan memriksa hasilnya dengan cara berikut. Karena $\sin x/x$ kontinu pada $x = 0$, jika kita memindahkan infinitesimal lintasan integrasi pada $x = 0$, nilai integral tidak akan berubah. Sekarang lintasannya melalui setengah lingkaran kecil infinitesimal C_ε pada bagian atas $x = 0$. Kita gunakan lintasan *indented* sebagai lintasan dari $-\infty$ ke ε sepanjang sumbu$-x$, diikuti C_ε dan melanjutkan dari ε ke ∞ sepanjang sumbu$-x$. Maka

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\text{Indented}}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Gunakan identitas

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right),$$

jadi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\text{Indented}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{\text{Indented}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Untuk integral pertama di ruas kanan, kita bisa menutup kontur dengan setengah lingkaran yang sangat besar C_R^+ di bagian atas bidang, seperti Gambar 3.15 **(a)**. Karena titik singular berada di luar kontur tertutup, maka integral konturnya hilang

$$\int_{\text{Indented}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = \oint_{\text{u.h.p}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

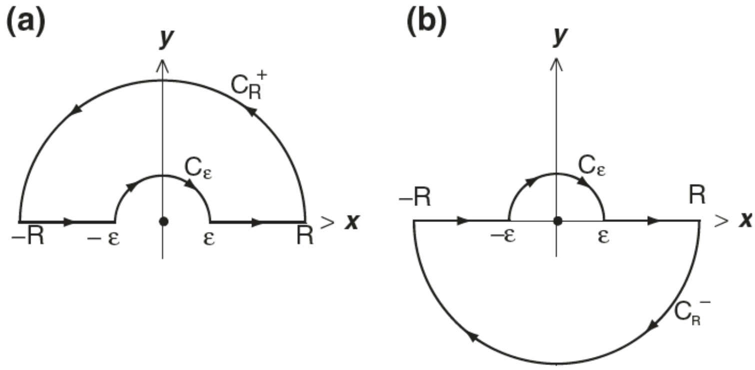
Untuk integal lintasan *indented* kedua, kita tidak bisa menutup kontur dalam bagian atas bidang karena $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$, jadi kita harus menutup kontur di bagian bawah bidang dengan C_R^- seperti Gambar 3.15 **(b)**. Dalam kasus ini, titik singular pada $z = 0$ di dalam kontur, jadi

$$\int_{\text{Indented}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = \oint_{\text{I.h.p}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z}\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z=0}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{z}\right] = -2\pi\mathrm{i}.$$

Tanda negatif untuk searah jarum jam. Diperoleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}0 - \frac{1}{2\mathrm{i}}(-2\pi\mathrm{i}) = \pi,$$

yang hasilnya sama dengan sebelumnya.



Gambar 3.15: **(a)** Lintasan *indented* dari $-R$ ke R ditutupi setengah lingkaran besar C_R^+ di bagian atas bidang. **(b)** Lintasan *indented* yang sama dari $-R$ ke R ditutupi setengah lingkaran besar C_R^- di bagian bawah bidang.

3.6 Latihan

1. Ekspansikan $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ dalam deret Taylor (a) sekitar $z = 0$ dan (b) sekitar titik $z = 1$. Tentukan jari-jari konvergensi pada tiap deret.
   Jawab:

   (a) $f(z) = -1 + 2z - 2z^2 + 2z^2 - \cdots \quad |z| < 1.$

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{2}(z-1) - \dfrac{1}{4}(z-1)^2 + \dfrac{1}{8}(z-1)^3 - \dfrac{1}{16}(z-1)^4 + \cdots |z-1| < 2.$

2. Carilah ekspansi deret Taylor di sekitar titik asal dan jari-jari konvergensi untuk

$$\text{(a) } f(z) = \sin z \quad \text{(b) } f(z) = \cos z,$$
$$\text{(c) } f(z) = \mathrm{e}^z \quad \text{(d) } f(z) = \frac{1}{(1-z)^m}.$$

   Jawab:

   (a) $\sin z = z - \dfrac{1}{3!}z^3 + \dfrac{1}{5!}z^5 - \dfrac{1}{7!}z^7 + \cdots$ untuk semua z.

   (b) $\cos z = 1 - \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{4!}z^4 - \dfrac{1}{6!}z^3 + \cdots$ untuk semua z.

   (c) $\mathrm{e}^z = 1 + z + \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{3!}z^3 + \cdots$ untuk semua z.

   (d) $\dfrac{1}{(1-z)^m} = 1 + mz + \dfrac{m(m+1)}{2}z^2 + \dfrac{m(m+1)(m+2)}{3!}z^3 + \cdots$ untuk $|z| < 1$.

3. Carilah ekspansi deret Taylor untuk

$$f(z) = \ln z$$

di sekitar $z = 1$ dengan memperhatikan bahwa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \ln z = \frac{1}{z}.$$

Jawab:

$$\ln z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \frac{1}{4}(z-1)^4 + \cdots \quad |z-1| < 1.$$

4. Ekspansikan
$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$
dalam deret Taylor (a) di sekitar $z = 0$ dan (b) di sekitar $z = 2$. Tentukan jari-jari konvergensi untuk tiap deret.
Jawab:
   (a) $f(z) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 + \cdots |z| < 1.$
   (b) $f(z) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)(z-2) + \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3}\right)(z-2)^2 - \cdots \quad |z-2| < 3.$

5. Tanpa memperoleh deretnya, tentukan jari-jari konvergensi ekspansi berikut:
   (a) $\tan^{-1} z$ di sekitar $z = 1$.
   (b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z - 1}$ di sekitar $z = 4\mathrm{i}$.
   (c) $\dfrac{x}{x^2 + 2x + 10}$ di sekitar $x = 0$.

   Jawab: (a) $\sqrt{2}$, (b) $2\pi - 4$, (c) $\sqrt{10}$.

6. Carilah deret Laurent untuk
$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$
dalam daerah
$$\text{(a) } |z| < 1, \quad \text{(b) } 1 < |z| < 2, \quad \text{(c) } 0 < |z-1| < 1,$$
$$\text{(d) } 2 < |z|, \quad \text{(e) } |z-1| > 1, \quad \text{(f) } 0 < |z-2| < 1.$$
Jawab:
   (a) $f(z) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \frac{15}{16}z^3 + \cdots.$
   (b) $f(z) = \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4z} - \frac{1}{8z^2} - \frac{1}{16z^3}.$
   (c) $f(z) = -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots.$
   (d) $f(z) = \cdots + \frac{15}{z^5} + \frac{7}{z^4} + \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z^2}.$

(e) $f(z) = \cdots + \dfrac{1}{(z-1)^4} + \dfrac{1}{(z-1)^3} + \dfrac{1}{(z-1)^2}$.

(f) $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 + (z-2)^3 - \cdots$.

7. Ekspansikan

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$$

dalam dua buah ekspansi deret Laurent di sekitar $z = \mathrm{i}$ dan di manakah konvergennya?

Jawab:

$$f(z) = -\frac{1}{z-\mathrm{i}} + 3(z-\mathrm{i}) - 4\mathrm{i}(z-\mathrm{i})^2 + \cdots \quad 0 < |z-\mathrm{i}| < 1,$$

$$f(z) = \cdots \frac{4\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^6} - \frac{3}{(z-\mathrm{i})^5} - \frac{2\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^4} + \frac{1}{(z-\mathrm{i})^3} \quad |z-\mathrm{i}| > 1.$$

8. Carilah nilai dari $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$, dengan C adalah lingkaran $|z| = 3$, untuk fungsi berikut:

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z(z+2)}$, (b) $f(z) = \dfrac{z+2}{z(z+1)}$, (c) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$,

(d) $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)^2}$, (e) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2}$, (f) $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)(z+4)}$,

dengan ekspansi deret Laurent yang sesuai $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ dan gunakan $a_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C f(z)\mathrm{d}z$.

Jawab: (a) 0, (b) $2\pi\mathrm{i}$, (c) $2\pi\mathrm{i}$, (d) 0, (e) 0, (f) $-\mathrm{i}\pi/6$.

9. Carilah residu dari

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

(a) pada $z = \mathrm{i}$ dan (b) pada $z = -\mathrm{i}$.

Jawab: (a) 1/2; dan (b) 1/2.

10. Carilah residu dari

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-2)}$$

(a) pada $z = 0$ dan (b) pada $z = 2$.

Jawab: (a) $-3/4$; dan (b) $3/4$.

11. Carilah residu dari

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-2)}$$

pada masing-masing kutubnya

Jawab: $r(-1+2\mathrm{i}) = (2+\mathrm{i})/4$, $r(-1-2\mathrm{i}) = (2-\mathrm{i})/4$.

12. Berapakah residu dari:
$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^3}$$
pada $z = -1$?
Jawab: 0.

13. Berapakah residu dari:
$$f(z) = \tan z$$
pada $z = \pi/2$?
Jawab: -1.

14. Berapakah residu dari:
$$f(z) = \frac{1}{z - \sin z}$$
pada $z = 0$?
Jawab: 3/10.

15. Gunakan teori residu untuk menghitung $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ jika C adalah lingkaran $z = 4$ untuk fungsi-fungsi berikut:
$$\text{(a) } \frac{z}{z^2-1}, \qquad \text{(b) } \frac{z+1}{z^2(z+2)}, \quad \text{(c) } \frac{1}{z(z-2)^3},$$
$$\text{(d) } \frac{1}{z^2+z+1}, \quad \text{(e) } \frac{1}{z(z^2+6z+4)}.$$
Jawab: (a) 2πi; (b) 0; (c) 0 ; (d) 0; (e) $(5 - 3\sqrt{5})\mathrm{i}\pi/20$.

16. Tunjukkan bahwa:
$$\oint_C = \frac{1}{(z^{100}+1)(z-4)}\mathrm{d}z = \frac{-2\pi\mathrm{i}}{4^{100}+1}$$
jika C adalah lingkaran $|z| = 3$.
Petunjuk: Pertama cari nilai integral sepanjang $|z| = 5$, kemudian lakukan integrasi sepanjang $|z| = 5$ dan $|z| = 3$ dengan potongan antara keduanya.

17. Gunakan teori residu untuk menghitung integral berikut:
(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}$,
(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta \, \mathrm{d}\theta}{5 - 4\cos\theta}$,
(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta \, \mathrm{d}\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$ dengan $(-1 < a < 1)$,
(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta \, \mathrm{d}\theta$ dengan $n = 1, 2, \ldots$.

Jawab: (a) $2\pi/\sqrt{3}$, (b) $\pi/12$, (c) $\pi a^2/(1-a^2)$, (d) $\pi(2n)!/(2^{2n}(n!)^2)$.

18. Buktikan bahwa:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\pi$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{ab}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2(a+b)}$

19. Hitunglah:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}}{x-2\mathrm{i}}\,\mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos kx}{x^2+1}\,\mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x,$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x$

Jawab: (a) $2\pi\mathrm{i}/\mathrm{e}^6$, (b) $\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-|k|}$, (c) $\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-mb}\cos ma$, (d) $\dfrac{\pi}{a^2-b^2}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-bm}}{b}-\dfrac{\mathrm{e}^{-am}}{a}\right)$.

20. Gunakan kontur persegi untuk membuktikan

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\mathrm{e}^{m\pi/2}+\mathrm{e}^{-m\pi/2}}.$$

21. Gunakan metode "integrasi sepanjag potongan cabang" untuk membuktikan

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

22. Gunakan kontur berbentuk pie dengan $\theta = 2\pi/3$ untuk membuktikan

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}.$$

23. Carilah nilai utama integral berikut

$$P\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x.$$

Jawab: $\sqrt{2}\pi/6$.

24. Buktikan bahwa

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z^2}$$

memiliki sebuah kutub sederhana pada $z = 0$. Carilah nilai utama dari

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Gunakan hasilnya untuk membuktikan

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Jawab: 2π.

Bagian II

Determinan dan Matriks

4

Determinan

Determinan merupakan alat yang sangat berguna untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan sangat penting dalam teori matriks. Kebanyakan pembaca mungkin sudah memiliki pengetahuan untuk menghitung determinan orde dua dan tiga. Setelah mengulang secara sistematik, kita memperkenalkan definisi formal determinan orde n dengan simbol Levi-Civita. Semua sifat-sifat determinan bisa diturunkan dari definisi ini.

4.1 Sistem Persamaan Linier

4.1.1 Solusi Dua Persamaan Linier

Anggap kita akan menyelesaikan x dan y dari sistem persamaan linier 2×2 (2 persamaan untuk 2 yang tidak diketahui)

$$a_1 x + b_1 y = d_1, \tag{4.1}$$

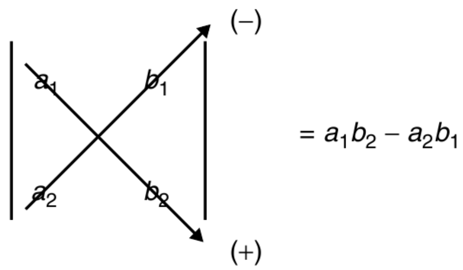
$$a_2 x + b_2 y = d_2, \tag{4.2}$$

dengan $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ d_1$ dan d_2 konstanta yang diketahui. Kita bisa mengalikan (4.1) dengan b_2 dan (4.2) dengan b_1, kemudian kita ambil selisihnya. Dengan cara ini, y kita eliminasi, dan kita memiliki

$$(b_2 a_1 - b_1 a_2)\, x = b_2 d_1 - b_1 d_2,$$

sehingga

$$x = \frac{d_1 b_2 - d_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \tag{4.3}$$



Gambar 4.1: Skema diagram untuk determinan orde dua.

di sini kita menuliskan b_2a_1 sebagai a_1b_2, karena urutan tidak penting dalam perkalian dua buah bilangan. Dari sini, jika kita menggunakan notasi berikut, jauh lebih mudah untuk mengeneralisasi proses ini menjadi sistem persamaan $n \times n$ yang lebih besar

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{4.4}$$

Susunan persegi 2×2 dari empat buah elemen pada ruas kanan persamaan ini dinamakan sebagai determinan orde dua. Artinya adalah nilainya sama dengan ruas kiri persamaan ini. Secara eksplisit, nilai dari determinan orde dua didefinisikan sebagai selisih antara perkalian dua buah elemen diagonal yang ditunjukkan Gambar 4.1.

Dengan determinan (4.3) bisa dituliskan sebagai

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{4.5}$$

dan dengan prosedur yang sama, dengan mudah kita tunjukkan bahwa

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{4.6}$$

Contoh 4.1.1. Carilah solusi dari

$$2x - 3y = -4,$$
$$6x - 2y = 2.$$

Solusi 4.1.1.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{8+6}{-4+18} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{4+24}{-4+18} = 2.$$

4.1.2 Sifat Determinan Orde Dua

Terbisa banyak sifat-sifat determinan yang akan kita bicarakan dalam subbab berikutnya. Saat ini kita akan menuliskan beberapa yang kita butuhkan dalam pembahasan determinan orde tiga. Untuk determinan orde dua, sifat-sifat ini terlihat dengan sendiri dari definisi. Meskipun secara umum sifat ini berlaku untuk determinan orde n, pada titik ini kita hanya memerlukan sifat-sifat ini berlaku untuk determinan orde dua untuk melanjutkan pembahasan kita:

1. Jika baris dan kolom kita pertukarkan, determinan tidak berubah

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

2. Jika dua buah kolom (atau dua buah baris) kita pertukarkan, determinan berubah tanda

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & 1_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{4.8}$$

3. Jika tiap elemen dalam sebuah kolom (atau baris) kita kalikan dengan m, determinan juga kita kalikan dengan m

$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 \\ ma_2 & b_2 \end{vmatrix} = ma_1b_2 - ma_2b_1 = m(a_1b_2 - a_2b_1) = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

4. Jika tiap elemen dari sebuah kolom (atau baris) merupakan jumlah dari dua buah suku, determinan sama dengan jumlah dua buah determinan yang berkaitan

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (a_1+c_1) & b_1 \\ (a_2+c_2) & b_2 \end{vmatrix} &= (a_1+c_1)b_2 - (a_2+c_2)b_1 = a_1b_2 - a_2b_1 + c_1b_2 - c_2b_1 \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

4.1.3 Solusi Tiga Persamaan Linier

Sekarang, anggap kita ingin menyelesaikan sistem tiga buah persamaan

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \tag{4.9}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \tag{4.10}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \tag{4.11}$$

Petama kita bisa mencari y dan z dalam x. Dengan menuliskan (4.10) dan (4.11) sebagai

$$b_2y + c_2z = d_2 - a_2x$$
$$b_3y + c_3z = d_3 - a_3x,$$

dengan analogi (4.5) dan (4.6), y dan z bisa dinyatakan sebagai

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (d_2 - a_2x) & c_2 \\ (d_3 - a_3x) & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \tag{4.12}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & (d_2 - a_2x) \\ b_3 & (d_3 - a_3x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \tag{4.13}$$

Subtitusikan dua buah rumus ini ke dalam (4.9) dan kalikan keseluruhan persamaan dengan

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

kita mempunyai

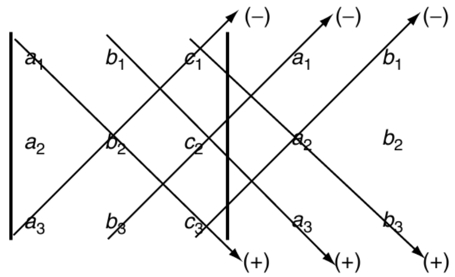
$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + b_1\begin{vmatrix} (d_2 - a_2x) & c_2 \\ (d_3 - a_3x) & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} b_2 & (d_2 - a_2x) \\ b_3 & (d_3 - a_3x) \end{vmatrix} = d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{4.14}$$

Dengan sifat 3 dan 4, persamaan ini menjadi

$$\begin{aligned} a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + b_1\left\{\begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x\right\} \\ + c_1\left\{\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} x\right\} = d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Diperoleh

$$Dx = N_x, \tag{4.16}$$



$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

Gambar 4.2: Skema diagram untuk determinan orde tiga.

dengan

$$N_x = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}, \tag{4.17}$$

dan

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{4.18}$$

Dengan mengekspansikan determinan orde dua, (4.18) menjadi

$$D = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 - c_1b_2a_3 + c_1b_3a_2. \tag{4.19}$$

Untuk menyatakan enam buah suku ini dalam cara yang lebih sistematik, kita perkenalkan determinan orde tiga sebagai notasi singkat dari (4.19)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{4.20}$$

Sebuah alat yang berguna untuk menghitung determinan orde tiga adalah sebagai berikut. Kita menuliskan determinan kolom per kolom, setelah kolom ketiga, kita menuliskan ulang kolom pertama, dan kemudian kolom kedua, membentuk barisan angka 3×5. Kita bisa membentuk perkalian dari tiga elemen sepanjang tiga buah diagonal dari kiri atas ke kanan bawah. Perkalian ini membawa tanda positif. Dengan cara serupa, tiga buah perkalian bisa kita lakukan dari kiri bawah ke kanan atas. Perkalian ini membawa tanda negatif. Nilai determinan sama dengan jumlah enam buah suku. Hal ini ditunjukkan pada diagram (Gambar 4.2). Hal ini sama persis dengan (4.19).

Dengan menggunakan notasi determinan, kita bisa membuktikan bahwa N_x dalam (4.17) sama dengan

$$N_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{4.21}$$

Sehingga

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Dengan cara yang sama, kita bisa mendefinisikan

$$N_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad N_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

dan menunjukkan

$$y = \frac{N_y}{D}, \quad z = \frac{N_z}{D}.$$

Determinan dalam penyebut D dinamakan determinan koefisien. Secara sederhana, determinan ini terbentuk dengan susunan koefisien ruas kiri persamaan (4.9) - (4.11). Untuk mencari pembilang determinan N_x, mulai dengan D, hapus semua koefisien x pada a_1, a_2 dan a_3, gantikan dengan konstanta d_1, d_2 dan d_3 dari ruas kanan persamaan. Dengan cara serupa, kita mengganti koefisien y dalam D dengan suku konstan untuk memperoleh N_y, dan koefisien z dalam D dengan konstanta untuk memperoleh N_z.

Contoh 4.1.2. Carilah solusi dari

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 11, \\ 2x + 3y + z &= 13, \\ x + y + 4z &= 12. \end{aligned}$$

Solusi 4.1.2.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 36 + 2 + 2 - 3 - 3 - 16 = 18,$$

$$N_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 13 & 3 & 1 \\ 12 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 132 + 24 + 13 - 36 - 11 - 104 = 18,$$

$$N_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 2 & 13 & 1 \\ 1 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 156 + 11 + 24 - 13 - 36 - 88 = 54,$$

$$N_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 108 + 26 + 22 - 33 - 39 - 48 = 36.$$

Sehingga

$$x = \frac{18}{18} = 1, \quad y = \frac{54}{18} = 3, \quad z = \frac{36}{18} = 2.$$

Jelaslah, dengan notasi determinan, hasilnya diberikan dalam cara yang sistematik. Prosedur ini berlaku untuk sistem dengan persamaan lebih dari tiga, yang akan kita lihat dalam pembahasan aturan Cramer, tetapi skema diagonal untuk menjabarkan determinan yang ditunjukkan di sini hanya berlaku untuk orde dua dan tiga. Untuk determinan dengan orde lebih tinggi, kita harus memperhatikan definisi formal dari determinan.

4.2 Definisi Umum Determinan

4.2.1 Notasi

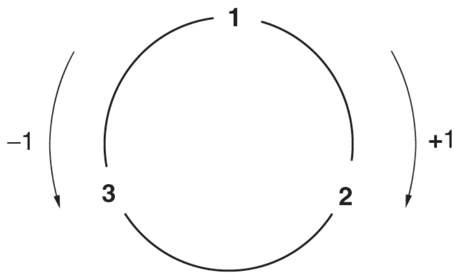
Sebelum kita mempelajari definisi determinan orde sebarang, marilah kita menuliskan determinan orde tiga dengan cara yang lebih sistematik. Persamaan (4.19) dan (4.20) bisa dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k, \tag{4.22}$$

dengan

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ &\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1, \\ &\varepsilon_{ijk} = 0 \quad \text{lainnya.} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Dengan menuliskan suku per suku ruas kanan (4.22), kita bisa dengan mudah menuliskan enam buah suku tak hilang sama persis dengan (4.19).



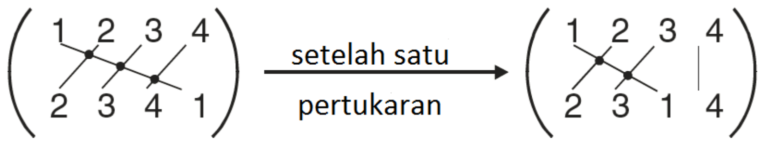
Gambar 4.3: Simbol Levi-Civita ε_{ijk} dengan i, j, k memiliki nilai 1, 2, 3. Jika indeks searah jarum jam $\varepsilon_{ijk} = 1$, jika berlawanan arah jarum jam $\varepsilon_{ijk} = -1$.

Untuk mengeneralisasi definisi ini pada determinan orde n, marilah kita memperhatikan tiga buah penjumlahan dengan lebih cermat. Pertama kita perhatikan bahwa $\varepsilon_{ijk} = 0$ jika dua dari tiga buah indeks i, j, k ada yang sama, contohnya $\varepsilon_{112} = 0$, $\varepsilon_{133} = 0$. Dengan mebuang suku-suku tersebut, (4.22) adalah kombinasi linier khusus dari enam buah perkalian, setiap perkalian mengandung satu dan hanya satu elemen dari tiap baris dan dari tiap kolom. Setiap perkalian membawa tanda positif atau tanda negatif. Urutan (i, j, k) dalam perkalian positif berasal dari urutan yang biasa (1, 2, 3) atau bisa juga berasal dari sebuah bilangan genap dari pertukaran antara dua buah bilangan berdekatan dalam urutan biasa. Sebagai contoh, kita memerlukan dua buah pertukaran untuk memperoleh (2, 3, 1) dari (1, 2, 3) [123 (menukar 12)→ 213 (menukar 13) → 231], dan $a_2b_3c_1$ positif ($\varepsilon_{231} = 1$); kita hanya memerlukan sebuah pertukaran untuk memperoleh (1, 3, 2) dari (1, 2, 3) [123 (menukarkan 23)→132], dan $a_1b_3c_2$ negatif $\varepsilon_{132} = -1$. Diagram (Gambar 4.3) bisa membantu kita untuk menemukan nilai ε_{ijk} secara cepat. Jika himpunan indeks berjalan searah jarum jam, maka nilainya positif satu (+1), dan jika berjalan berlawanan arah jarum jam, nilainya negatif satu (-1).

Sifat-sifat ini dikarakterisasi dengan simbol Levi-Civita $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$, yang didefinisikan sebagai berikut

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i_1 i_2 \cdots i_n \text{ merupakan permutasi genap} \\ -1, & \text{jika } i_1 i_2 \cdots i_n \text{ merupakan permutasi ganjil} \\ 0, & \text{jika ada indeks berulang} \end{cases}.$$

Sebuah permutasi genap berarti bahwa sebuah pertukaran genap dari pasangan bilangan yang berdekatan diperlukan untuk memperoleh permutasi yang diberikan dari urutan normal, dan permutasi ganjil adalah terkait dengan pertukaran ganjil pasangan. Seperti yang kita telah tunjukkan, (2, 3, 1) adalah permutasi genap, dan (1, 3, 2) adalah permutasi ganjil.



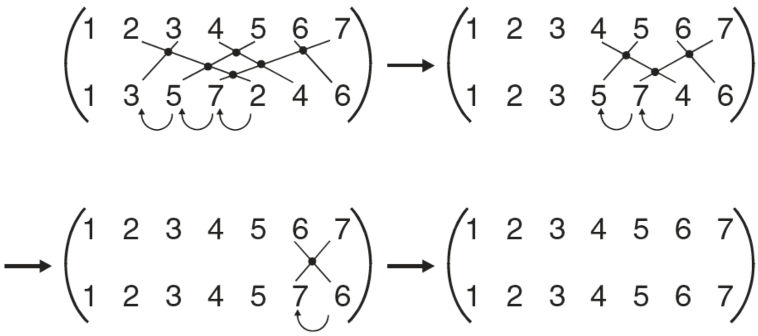
Gambar 4.4: Diagram permutasi. Permutasi ini ditulis langsung di bawah urutan normal. Jumlah perpotongan antara pasangan garis yang menghubungkan bilangan yang sesuai adalah sama dengan jumlah pertukaran yang diperlukan untuk memperoleh permutasi dari urutan normal. Diagram ini menunjukkan bahwa satu titik perpotongan merupakan salah satu pertukaran antara dua anggota yang berdekatan.

Cara mudah untuk menentukan apakah suatu permutasi yang diberikan adalah genap atau ganjil adalah untuk menulis urutan normal dan menulis permutasi langsung di bawah itu. Kemudian menghubungkan bilangan yang sesuai di kedua pengaturan dengan segmen garis, dan menghitung jumlah perpotongan antara pasangan dari garis-garis. Jika jumlah perpotongan adalah genap, maka permutasinya genap. Jika jumlah perpotongan adalah ganjil, maka permutasinya ganjil. Sebagai contoh, untuk menemukan permutasi (2, 3, 4, 1), kita menuliskan urutan normal dan permutasi dalam diagram (Gambar 4.4, kita menyebutnya "Diagram permutasi"):

Ada tiga perpotongan. Oleh karena itu permutasinya ganjil dan $\varepsilon_{2341} = -1$. Alasan skema ini berlaku adalah karena hal berikut. Kita mulai dengan bilangan terkecil yang tidak langsung di bawah bilangan yang sama, pertukaran bilangan ini dengan bilangan yang kiri akan menghilangkan salah satu perpotongan. Dalam contoh sebelumnya, setelah pertukaran antara 1 dan 4, hanya dua perpotongan tetap. Jelas dua pertukaran lagi akan menghilangkan semua perpotongan dan permutasi kembalik ke urutan normal. Jadi tiga perpotongan mengindikasikan tiga pertukaran diperlukan. Oleh karena itu permutasi ganjil.

Ketika kita menghitung jumlah perpotongan, kita menghitung perpotongan pasangan garis. Oleh karena itu kita harus menghindari untuk memiliki lebih dari dua baris berpotongan pada suatu titik. Garis bergabung dengan bilangan yang sesuai tidak perlu sebuah garis lurus.

Contoh 4.2.1. Berapakah nilai simbol Levi-Civita $\varepsilon_{1357246}$?
Solusi 4.2.1. Terbisa enam buah perpotongan pada Gambar 4.5, sehingga permutasinya genap dan $\varepsilon_{1357246} = +1$.



Gambar 4.5: Dalam diagram ini, enam buah perpotongan merepresentasikan enam buah pertukaran diperlukan untuk memperoleh 1357246 dari urutan normal 1234567.

4.2.2 Definisi Determinan Orde n

Dalam pembahasan determinan umum orde n, akan lebih mudah untuk menggunakan notasi subscript ganda. Setiap elemen dari determinan diwakili oleh simbol a_{ij}. Subscript ij menunjukkan bahwa itu adalah elemen pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-y$. Dengan notasi ini, $a_1b_2c_3$ menjadi $a_{11}a_{22}a_{33}$; $a_2b_3c_1$ menjadi $a_{21}a_{32}a_{13}$, dan $a_ib_jc_k$ menjadi $a_{i1}a_{j2}a_{k3}$. Determinan itu sendiri dilambangkan dengan berbagai simbol. Notasi berikut semuanya setara:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}| = |A| = \det|A| = D_n. \tag{4.24}$$

Nilai determinan diberikan oleh

$$D_n = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \tag{4.25}$$

Persamaan ini adalah definisi formal dari determinan orde n. Jelas, untuk $n = 3$, persamaan ini menjadi (4.22). Perhatikan bahwa untuk determinan orde n, terdapat kemungkinan perkalian sebanyak $n!$ karena i_1 bisa mengambil nilai sebanyak n, i_2 tidak bisa mengulang i_1, sehingga hanya bisa mengambil nilai sebanyak $n - 1$, begitu seterusnya. Kita bisa berpikir menghitung sebuah determinan dalam tiga langkah. (1) Ambil $n!$ perkalian dari elemen sebanyak n sehingga dalam tiap perkalian terdapat satu dan hanya satu elemen dari tiap baris dan satu dan hanya satu elemen dari tiap kolom. (2) Berilah tanda positif (+) pada perkalian jika subscript barisnya adalah permutasi genap dari subscript kolom, dan tanda negatif (-) untuk permutasi ganjil. (3) Jumlahkan semuanya dengan tanda tersebut.

Dengan menyatakannya seperti ini, jelas bahwa definisi determinan adalah bersifat simetrik antara baris dan kolom. Determinan (4.25) bisa dituliskan juga sebagai

$$D_n = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}. \tag{4.26}$$

Dari sini jika terdapat teorema determinan yang melibatkan baris maka teorema ini juga berlaku untuk kolom, begitu juga sebaliknya.

Sifat lain yang tampak dari definisi ini adalah sebagai berikut. Jika dua buah baris sebarang ditukar maka determinan berubah tanda. Pertama mudah untuk dibuktikan bahwa jika dua buah baris bersebelahan, maka ini adalah kasus yang kita tinjau. Hal ini mengikuti fakta bahwa pertukaran dua buah baris bersebelahan berkaitan dengan dua buah indeks simbol Levi-Civita yang berdekatan. Hal ini mengubah permutasi genap menjadi ganjil dan juga sebaliknya. Sehingga hal ini akan memberikan sebuah tanda minus untuk semua perkalian.

Sekarang perhatikan indeks baris i dan j tidak saling bersebelahan dan terdapat n indeks di antaranya

$$i\ a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n\ j.$$

Untuk membawa j ke kiri, terdapat $n+1$ pertukaran sehingga

$$j\ i\ a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n.$$

Sekarang jika kita membawa i ke kanan, terdapat n pertukaran

$$j\ a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n\ i.$$

Sehingga secara keseluruhan terdapat pertukaran sejumlah $2n+1$ untuk memindahkan i dan j. Karena $2n+1$ adalah bilangan ganjil, maka hal ini membawa tanda negatif.

Contoh 4.2.2. Misalkan

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

gunakan (4.25) untuk (a) ekspansi determinan orde dua ini, (b) tunjukkan secara eksplisit pertukaran dua buah baris mengubah tanda determinan.

Solusi 4.2.2. (a) Menurut (4.25)

$$D_2 = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \varepsilon_{i_1 i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2},$$

$$
\begin{aligned}
i_1 = 1,\ i_2 = 1: \quad & \varepsilon_{i_1 i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2} = \varepsilon_{11} a_{11} a_{12} \\
i_1 = 1,\ i_2 = 2: \quad & \varepsilon_{i_1 i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2} = \varepsilon_{12} a_{11} a_{22} \\
i_1 = 2,\ i_2 = 1: \quad & \varepsilon_{i_1 i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2} = \varepsilon_{21} a_{21} a_{12} \\
i_1 = 2,\ i_2 = 2: \quad & \varepsilon_{i_1 i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2} = \varepsilon_{22} a_{21} a_{22}.
\end{aligned}
$$

Karena $\varepsilon_{11} = 0,\ \varepsilon_{12} = 1,\ \varepsilon_{21} = -1,\ \varepsilon_{22} = 0$, jumlah ganda memberikan determinan orde dua sebagai

$$\sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \varepsilon_{i_1 i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

(b) Untuk menyatakan pertukaran antara dua baris, kita hanya perlu mengganti $a_{i_1 1} a_{i_2 2}$ dengan $a_{i_2 1} a_{i_1 2}$ pada penjumlahan ganda (i_1 dan i_2 dipertukarkan), sehingga

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \varepsilon_{i_1 i_2} a_{i_2 1} a_{i_1 2}.$$

Karena i_1 dan i_2 adalah indeks berjalan, kita bisa menamai ulang i_1 sebagai j_2 dan i_2 sebagai j_1, sehingga

$$\sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \varepsilon_{i_1 i_2} a_{i_2 1} a_{i_1 2} = \sum_{j_2=1}^{2} \sum_{j_1=1}^{2} \varepsilon_{j_2 j_1} a_{j_1 1} a_{j_2 2} = \sum_{j_1=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{2} \varepsilon_{j_2 j_1} a_{j_1 1} a_{j_2 2}.$$

Rumus terakhir identik dengan determinan asalnya kecuali indeks simbol Levi-Civita ditukar

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} &= \sum_{j_1=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{2} \varepsilon_{j_2 j_1} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \\
&= \varepsilon_{11} a_{11} a_{12} + \varepsilon_{21} a_{11} a_{22} + \varepsilon_{12} a_{21} a_{12} + \varepsilon_{22} a_{21} a_{22} \\
&= -a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Hasil ini juga bisa dibisakan dari inspeksi. Kita telah mengambil resiko untuk menyatakan yang sudah jelas. Harapannya, pendekatan langkah demi langkah akan membuang perasaan sulit bekerja dengan indeks.

4.2.3 Minor, Kofaktor

Marilah kita kembali pada (4.18), dengan menuliskan dalam notasi subscript ganda, persamaan ini menjadi

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

di sini kita telah menukar dua buah kolom pada determinan orde dua pada (4.18) dan mengubah tanda. Terlihat bahwa

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

adalah determinan orde dua yang diperoleh dengan menghapus baris pertama dan kolom pertama dari determinan asalnya D_3 berorde tiga. Kita menyebutnya minor pelengkap M_{11} untuk a_{11}. Secara umum, minor pelengkap M_{ij} untuk a_{ij} didefinisikan sebagai determinan orde $(n-1)$ yang diperoleh dengan menghapus baris ke i dan kolom ke j dari determinan asal D_n berorde n. Kofaktor C_{ij} didefinisikan sebagai $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Contoh 4.2.3. Carilah nilai dari minor M_{11}, M_{23} dan kofaktor C_{11} dan C_{23} dari determinan

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Solusi 4.2.3.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & 2 & 5 & 0 \\ * & 0 & 2 & 2 \\ * & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & * & 3 \\ * & * & * & * \\ 1 & 0 & * & 2 \\ 4 & 2 & * & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.2.4 Ekspansi Determinan Laplacian dengan Baris (atau Kolom)

Dengan notasi ini, (4.27) menjadi

$$D_3 = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} \tag{4.28}$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}C_{1k}. \tag{4.29}$$

Hal ini dikenal sebagai ekspansi determinan Laplace orde tiga pada elemen baris pertama. Dari sini, hal ini tidak terbatas pada determinan orde tiga. Ini adalah teorema dasar bahwa determinan orde sebarang bisa dihitung dengan sebuah ekspansi Laplace pada sebarang baris atau kolom.

$$D_n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \quad \text{untuk sebarang } i, \tag{4.30}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \quad \text{untuk sebarang } j. \tag{4.31}$$

Bukti bisa diberikan oleh induksi dan berdasar pada definisi determinan. Menurut (4.25), sebuah determinan adalah jumlah keseluruhan $n!$ perkalian yang dibentuk dengan mengambil tepat satu elemen dari tiap baris dan tiap kolom dan mengalikan dengan 1 atau -1 bersesuaian dengan aturan Levi-Civita.

Sekarang jika minor M_{ij} determinan orde n adalah determinan orde $(n-1)$. Ini adalah jumlah $(n-1)!$ perkalian. Tiap perkalian memiliki satu elemen dari tiap baris dan tiap kolom kecuali baris ke i dan kolom ke j. Jelaslah bahwa $\sum_{j=1}^{n} k_{ij}a_{ij}M_{ij}$ adalah jumlah dari $n(n-1)! = n!$ perkalian, dan tiap perkalian dibentuk oleh tepat satu elemen dari tiap baris dan tiap kolom. Mengikuti hal ini, dengan pemilihan k_{ij} yang sesuai, determinan bisa kita tuliskan dalam ekspansi baris

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}a_{ij}M_{ij}, \tag{4.32}$$

atau ekspansi kolom

$$D_n = \sum_{i=1}^{n} k_{ij}a_{ij}M_{ij}. \tag{4.33}$$

Ekspansi Laplace akan mengikuti, jika kita bisa membuktikan

$$k_{ij} = (-1)^{i+k}.$$

Pertama marilah kita perhatikan semua suku pada (4.25) yang mengandung a_{11}. Dalam suku-suku ini $i_1 = 1$. Kita perhatikan bahwa jika $(1,\ i_2,\ i_3,\ ..., i_n)$ adalah permutasi genap (atau ganjil) dari (1, 2, 3,..,n). Jumlah perpotongan dalam diagram permutasi berikut sama

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix},$$

sehingga

$$\varepsilon_{1 i_2 \cdots i_n} = \varepsilon_{i_2 \cdots i_n}.$$

Sehingga suku yang mengandung a_{11} dijumlahkan menjadi

$$\sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \varepsilon_{1 i_2 \cdots i_n} a_{11} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = a_{11} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_2 \cdots i_n} a_{11} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

yang tidak lain adalah $a_{11}M_{11}$, dengan M_{11} adalah minor dari a_{11}. Di sisi lain, menurut (4.32), semua suku yang mengandung a_{11} dijumlahkan ke $k_{11}a_{11}M_{11}$. Sehingga

$$k_{11} = +1.$$

Sekarang perhatikan suku-suku pada (4.25) yang mengandung elemen tertentu dari a_{ij}. Jika kita menukarkan baris ke i dengan satu di atasnya, determinan berubah tanda. Jika kita memindahkan baris ini ke atas dengan cara ini sebanyak $(i-1)$ kali, baris ke i akan berada di baris paling atas, dan urutan baris tidak berubah. Proses ini akan mengubah tanda determinan $(i-1)$ kali. Dengan cara yang sama, kita bisa memindahkan kolom ke j ke kolom pertama tanpa mengubah urutan kolom. Sehingga semua elemen a_{ij} akan berada pada sudut kiri atas dari determinan, di tempat a_{11}, dan tanda determinan berubah sebanyak $(i-1+j-1)$ kali. Yaitu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dalam determinan yang sudah disusun ulang, a_{ij} berada pada tempat a_{11}, sehingga jumlah semua suku yang mengandung a_{ij} sama dengan $a_{ij}M_{ij}$. Tetapi terdapat faktor $(-1)^{i+j-2}$ di depan determinan yang sudah disusun ulang. Sehingga dalam suku yang mengandung a_{ij} di ruas kanan persamaan dijumlahkan menjadi $(-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij}$. Di lain pihak, menurut (4.32), semua suku yang mengandung a_{ij} pada determinan pada ruas kiri persamaan sama dengan $k_{ij}a_{ij}M_{ij}$. Sehingga

$$k_{ij} = (-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}. \tag{4.34}$$

Hal ini melengkapi bukti ekspansi Laplace, yang sangat penting dalam teori dan penghitungan determinan. Berguna untuk mengingat bahwa k_{ij} membentuk pola

$$\begin{vmatrix} +1 & -1 & +1 & & & \\ -1 & +1 & -1 & & & \\ +1 & -1 & +1 & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & +1 & -1 \\ & & & & -1 & +1 \end{vmatrix}.$$

Contoh 4.2.4. Carilah nilai determinan

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

dengan (a) Ekspansi Laplace pada baris pertama; (b) ekspansi Laplace pada baris kedua; (c) ekspansi Laplace pada kolom pertama.

Solusi 4.2.4.

(a)

$$\begin{aligned} D_3 &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(4+3) + 2(2+12) + 2(18) = 35. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} D_3 &= -a_{21}M_{11} - a_{22}M_{22} + a_{23}M_{23} \\ &= -1\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (42) + 2(68) + 3(3+8) = 35. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} D_3 &= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} \\ &= 3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 3(4+3)(42) + 4(64) = 35. \end{aligned}$$

Contoh 4.2.5. Carilah nilai determinan segitiga

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Solusi 4.2.5.

$$D_n = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

4.3 Sifat-sifat Determinan

Dengan induksi matematika, kita sekarang bisa menunjukkan bahwa sifat 1 sampai 4 dari determinan orde dua umumnya berlaku untuk determinan orde n. Berdasarkan fakta bahwa itu benar untuk determinan orde $(n-1)$, kita akan menunjukkan bahwa juga harus benar untuk determinan orde n. Semua sifat-sifat determinan bisa diturunkan secara langsung dari definisi dari (4.25). Namun, dalam bagian ini, kita akan menunjukkannya dengan ekspansi Laplace.

1. Nilai determinan tetap jika kita menukar baris dan kolom.
   Misalkan ekspansi Laplace elemen D_n pada baris pertama adalah

   $$D_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}. \tag{4.35}$$

   Misalkan D_n^{T} (dikenal sebagai transpos dari D_n) menjadi determinan orde n yang dibentuk oleh pertukaran baris dan kolom dari determinan D_n. Ekspansi Laplace D_n^{T} pada elemen-elemen kolom pertama (yang merupakan elemen yang pertama baris D_n) kemudian diberikan oleh

   $$D_n^{\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}^{\mathrm{T}}, \tag{4.36}$$

   dengan M_{1j}^{T} adalah komplemen minor pada a_{1j} dan sama dengan determinan M_{1j} dengan menukar baris dan kolom. Dalam kasus $n = 3$, minor adalah determinan orde dua. Dengan (4.7), $M_{1j}^{\mathrm{T}} = M_{1j}$. Sehingga $D_3 = D_3^{\mathrm{T}}$. Prosedur ini bisa digunakan, satu langkah setiap waktu, untuk sebarang n. Sehingga kita menyimpulkan

   $$D_n = D_n^{\mathrm{T}}. \tag{4.37}$$

2. Determinan berubah tanda jika dua baris (kolom) sebarang dipertukarkan.
   Pertama kita akan memverifikasi sifat ini untuk determinan orde tiga D_3. Misalkan E_3 adalah determinan yang diperoleh dengan menukar dua buah kolom pada D_3. Misalkan kolom k yang tidak berubah. Dengan menggunakan ekspansi Laplace untuk kolom ke$-k$ dari D_3 dan E_3, kita mempunyai

$$D_3 = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}; \tag{4.38}$$

$$E_3 = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+k} a_{ik} M'_{ik}, \tag{4.39}$$

   dengan M'_{ik} adalah determinan orde dua dan sama dengan M_{ik} dengan dua buah kolom yang ditukar. Dengan (4.8) $M'_{ik} = -M_{ik}$. Sehingga $D_3 = -E_3$. Sekarang dengan induksi matematik, kita mengasumsikan sifat ini juga berlaku untuk determinan orde $(n-1)$. Prosedur yang sama juga membuktikan bahwa sifat ini berlaku untuk determinan orde n.

   Sifat ini disebut sifat antisimetrik. Sifat ini sering digunakan dalam mekanika kuantum dalam konstruksi fungsi gelombang partikel antisimetrik.

3. Jika tiap elemen pada kolom (atau baris) dikalikan dengan konstanta m, maka determinannya dikalikan dengan m.
   Sifat ini mengikuti langsung dari ekspansi Laplace. Jika kolom ke i dikalikan dengan m, sifat ini bisa ditunjukkan dengan cara berikut

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ma_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ma_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & ma_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum_{j=1}^{n} ma_{ji} C_{ji} = m \sum_{j=1}^{n} a_{ji} C_{ji} \\
&= m \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

4. Jika tiap elemen pada kolom (atau pada baris) merupakan jumlah dua buah suku, maka determinan sama dengan jumlah determinan yang bersesuaian.

   Jika kolom ke i adalah jumlah dua buah suku, kita bisa mengekspansikan determinan pada elemen kolom ke $-i$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ji}+b_{ji})C_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}C_{ji} + \sum_{j=1}^{n} b_{ji}C_{ji}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.41}$$

Dari empat buah sifat ini, kita bisa menurunkan sifat yang lain. Sebagai contoh:

5. Jika dua kolom (atau baris) sama, determinan nilainya nol.

   Ini mengikuti dari sifat antisimetrik. Jika kita menukar dua kolom identik, determinan jelas akan tetap sama. Namun sifat antisimetrik mensyaratkan perubahan tanda determinan. Satu-satunya bilangan yang sama dengan dirinya yang negatif adalah nol. Oleh karena itu determinan harus nol.

6. Nilai determinan tidak berubah jika sebuah perkalian pada satu kolom ditambahkan pada kolom yang lain (atau perkalian pada baris ditambahkan pada baris lain).

   Tanpa mengurangi keumuman, sifat ini bisa dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ma_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+ma_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}+ma_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ma_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ma_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ ma_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.42}$$

   Tanda sama dengan pertama dari sifat 4, tanda sama dengan kedua dari sifat 3, dan tanda sama dengan terakhir dari sifat 5.

Contoh 4.3.1. Tunjukkan bahwa

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Solusi 4.3.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & (bc+a^2) \\ 1 & b & (ac+ab) \\ 1 & c & (ab+ac) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & (bc+a^2+ba) \\ 1 & b & (ac+ab+b^2) \\ 1 & c & (ab+ac+bc) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & (bc+a^2+ba+ca) \\ 1 & b & (ac+ab+b^2+cb) \\ 1 & c & (ab+ac+bc+c^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & (bc+ba+ca) \\ 1 & b & (ac+ab+cb) \\ 1 & c & (ab+ac+bc) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Pertama kita kalikan tiap elemen pada kolom kedua dengan a dan menambahkan pada kolom ketiga. Untuk tanda sama dengan kedua, kita mengalikan kolom kedua dengan b dan menambahkan pada kolom ketiga. Lakukan hal yang sama kecuali mengalikan dengan c untuk tanda sama dengan ketiga. Tanda sama dengan keempat karena sifat 4. Tanda sama dengan kelima karena sifat 3. Terakhir, determinan dengan dua kolom identik hilang.

Contoh 4.3.2. Hitunglah determinan

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

Solusi 4.3.2. Menambahkan kolom 2, kolom 3, dan semua kolom n ke kolom 1 diperoleh

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= (1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

Kalikan baris 1 dengan -1 kemudian tambahkan dengan baris 2, selanjutnya tambahkan pada baris 3 begitu seterusnya

$$
\begin{aligned}
D_n &= (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n).
\end{aligned}
$$

Contoh 4.3.3. Hitunglah determinan berikut (dikenal sebagai determinan Vandermonde)

$$
\text{(a) } D_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}, \quad \text{(b) } D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.
$$

Solusi 4.3.3. (a) Metode I.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & (x_2 - x_1) & (x_2^2 - x_1^2) \\ 0 & (x_3 - x_1) & (x_3^2 - x_1^2) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & (x_2 + x_1) \\ 1 & (x_3 + x_1) \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).
\end{aligned}
$$

Metode II. D_3 adalah polinomial x_1 dan hilang ketika $x_1 = x_2$, karena dua buah baris pertama sama. Maka bisa dibagi dengan $(x_1 - x_2)$. Dengan cara yang sama bisa dibagi dengan $(x_2 - x_3)$ dan $(x_3 - x_1)$. Maka

$$D_3 = k(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Selanjutnya, karena D_3 berderajat tiga dalam $x_1,\ x_2,\ x_3$, k haruslah sebuah konstanta. Koefisien pada suku $x_2 x_3^2$ dalam rumus ini adalah $k(-1)(-1)^2$. Di sisi lain, perkalian diagonal dari D_3 adalah $+x_2 x_3^2$. Dengan membandingkannya diperoleh $k(-1)(-1)^2 = 1$. Sehingga $k = -1$ dan

$$D_3 = -(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

(b) Dengan alasan yang sama pada Metode II dalam (a)

$$D_n = k(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n).$$

Koefisien pada suku $x_2x_3^2\cdots x_n^{n-1}$ dalam rumus ini $k(-1)(-1)^2\cdots(-1)^{n-1}$. Membandingkannya dengan perkalian diagonal D_n, kita mempunyai

$$1 = k(-1)(-1)^2\cdots(-1)^{n-1} = k(-1)^{1+2+3+\cdots+(n-1)}.$$

Karena

$$1+2+3+\cdots(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1),$$

sehingga

$$D_n = (-1)^{n(n-1)/2}(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)\cdots \\ (x_{n-1}-x_n).$$

Contoh 4.3.4. Kondensasi Pivotal[1]. Tunjukkan bahwa

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Jelaslah a_{11} harus tidak nol. Jika nol, maka baris pertama (atau kolom pertama) harus ditukar dengan baris lain (atau kolom lain), sehingga $a_{11} \neq 0$.

Solusi 4.3.4.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{13} \\ a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & (a_{11}a_{12}-a_{11}a_{12}) & (a_{11}a_{13}-a_{11}a_{13}) \\ a_{21} & (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}) & (a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}) \\ a_{31} & (a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}) & (a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}) & (a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}) \\ a_{31} & (a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}) & (a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} (a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}) & (a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}) \\ (a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}) & (a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

[1]pivotal = sangat penting.

Metode ini bisa digunakan untuk mereduksi sebuah determinan orde n menjadi determinan orde $(n-1)$ dan dikenal sebagai kondensasi pivotal. Hal ini tidak memberikan keuntungan untuk menghitung dengan tangan, tetapi sangat berguna jika menghitung determinan dengan komputer.

4.4 Aturan Cramer

4.4.1 Sistem Tak Homogen

Anggap kita memiliki n persamaan untuk n yang tak diketahui

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= d_2 \\ \cdots\cdots &= \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= d_n \end{aligned} \tag{4.43}$$

Konstanta $d_1,\ d_2, \cdots, d_n$ pada ruas kanan dikenal sebagai suku tak homogen. Jika semuanya tidak sama dengan nol, himpunan persamaan ini dikenal sebagai sistem tak homogen. Persoalannya adalah mencari $x_1,\ x_2, \cdots, x_n$ untuk memenuhi himpunan persamaan ini. Kita akan melihat dengan menggunakan sifat-sifat determinan, himpunan persamaan ini bisa diselesaikan untuk sebarang n.

Membentuk determinan dengan koefisien dan mengalikan dengan x_1, dengan bantuan sifat 3 kita memiliki

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kita kalikan kolom kedua ruas kanan determinan dengan x_2 dan menambahkannya pada kolom pertama, dan kemudian kalikan kolom ketiga dengan x_3 dan menambahkannya pada kolom pertama dan begitu seterusnya. Menurut sifat 6, determinan tidak berubah

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Menggantikan kolom pertama determinan pada ruas kanan dengan konstanta ruas kanan pada (4.43), kita peroleh

$$x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ d_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ d_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Jelaslah jika kita mengalikan determinan koefisien dengan x_2, kita bisa menganalisa kolom kedua determinan dengan cara yang sama. Secara umum

$$x_i D_n = N_i, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{4.44}$$

dengan D_n adalah determinan dari koefisien

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dan N_i adalah determinan yang diperoleh dengan mengganti kolom D_n ke$-i$ dengan suku tak homogen

$$N_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1_i-1} & d_1 & a_{1_i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2_i-1} & d_2 & a_{2_i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n_i-1} & d_n & a_{n_i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.45}$$

Sehingga jika determinan koefisien tidak nol, sistem memiliki sebuah solusi unik

$$x_i = \frac{N_i}{D_n}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{4.46}$$

Prosedur ini dikenal sebagai aturan Cramer. Untuk kasus khusus $n = 2$ dan $n = 3$, hasilanya adalah, tentunya, identik dengan apa yang kita turunkan dalam subbab pertama. Aturan Cramer sangat penting dalam teori determinan dan matriks. Tetapi, dalam menggunakan untuk menyelesaikan himpunan persamaan dengan n besar, hal ini sering tidak praktis. Bisa dikarenakan jumlah komputasinya yang besar dan/atau karena keharusan akurasi numerik yang tinggi dengan metode ini, meski dengan komputer yang cepat hal ini mungkin tidak bisa dilakukan. Terbisa cara lain untuk menyelesaikan persoalan seperti ini, seperti metode eliminasi Gauss-Jordan yang akan kita bicarakan dalam bab tentang teori matriks.

4.4.2 Sistem Homogen

Sekarang jika $d_1,\ d_2,\ ..., d_n$ pada (4.43) semuanya nol, yaitu

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\cdots\cdots &= \cdot \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

himpunan persamaan ini dikenal sebagai sistem homogen. Dalam kasus ini, semua N_i' pada (4.45) sama dengan nol. Jika $D_n \neq 0$, maka solusi (4.46) hanyalah solusi trivial, yaitu $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Di sisi lain, jika D_n sama dengan nol, jelas dari (4.44), x_i tidak harus nol. Sehingga sebuah sistem homogen bisa memiliki solusi non trivial hanya jika determinan koefisien sama dengan nol. Sebaliknya, jika kita bisa menunjukkan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{4.47}$$

sehingga selalu terdapat solusi non trivial dari persamaan homogen. Untuk sistem 2×2, keberadaan solusi bisa ditunjukkan dengan penghitungan langsung. Kemudian dengan induksi matematik, kita bisa menunjukkan bahwa pernyataan ini juga berlaku untuk sistem $n \times n$.

Fakta sederhana ini memiliki banyak aplikasi penting.

Contoh 4.4.1. Berapakah nilai λ agar persamaan

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= \lambda x, \\ 4x + 5y &= \lambda y, \end{aligned}$$

memiliki solusi selain $x = y = \lambda = 0$.

Solusi 4.4.1. Jika kita pindahkan ruas kanan persamaan ke kiri kita peroleh sistem homogen

$$\begin{aligned} (3-\lambda)x + 2y &= 0, \\ 4x + (5-\lambda)y &= 0. \end{aligned}$$

Untuk solusi non trivial, determinan koefisien harus hilang, yaitu

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 7 = (\lambda-1)(\lambda-7) = 0.$$

Sistem ini memiliki solusi non trivial jika dan hanya jika $\lambda = 1$ atau $\lambda = 7$.

4.5 Determinan Blok Diagonal

Kita sering menemukan determinan dengan banyak elemen nol dan elemen tak nol membentuk sebuah kotak/blok persegi sepanjang diagonal. Sebagai contoh determinan orde lima berikut adalah sebuah determinan blok diagonal:

$$D_5 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ * & * & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ * & * & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Dalam subab ini, kita akan membuktikan bahwa

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

tidak bergantung nilai $*$ yang kita asumsikan.

Dengan definisi

$$D_5 = \sum_{i_1=1}^{5} \sum_{i_2=1}^{5} \sum_{i_3=1}^{5} \sum_{i_4=1}^{5} \sum_{i_5=1}^{5} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} a_{i_4 4} a_{i_5 5}.$$

Karena $a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{23} = a_{24} = a_{25} = 0$, semua suku yang mengandung elemen tersebut harus dikeluarkan dari penjumlahan. Sehingga

$$D_5 = \sum_{i_1=1}^{5} \sum_{i_2=1}^{5} \sum_{i_3=3}^{5} \sum_{i_4=3}^{5} \sum_{i_5=3}^{5} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} a_{i_4 4} a_{i_5 5}.$$

Selanjutnya, penjumlahan terhadap i_1 dan i_2 bisa dituliskan seperti dari 1 ke 2 karena 3, 4 dan 5 diambil oleh i_3, i_4 atau i_5 dan simbol Levi-Civita sama dengan nol jika ada indeks berulang. Maka

$$D_5 = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \sum_{i_3=3}^{5} \sum_{i_4=3}^{5} \sum_{i_5=3}^{5} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} a_{i_4 4} a_{i_5 5}.$$

Dengan persyaratan ini, permutasi $i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ i_5$ bisa dipisahkan menjadi dua buah permutasi yaitu

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 = 1,2 & i_2 = 1,2 & i_3 = 3,4,5 & i_4 = 3,4,5 & i_5 = 3,4,5 \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Keseluruhan permutasi adalah genap jika dua buah permutasi yang dipisahkan keduanya genap atau keduanya ganjil. Permutasinya ganjil jika salah satunya genap dan satunya lagi ganjil. Sehingga

$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = \varepsilon_{i_1 i_2} \cdot \varepsilon_{i_3 i_4 i_5}.$$

Mengikuti hal ini

$$\begin{aligned} D_5 &= \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2}\sum_{i_3=3}^{5}\sum_{i_4=3}^{5}\sum_{i_5=3}^{5} \varepsilon_{i_1 i_2} \cdot \varepsilon_{i_3 i_4 i_5} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3} a_{i_4 4} a_{i_5 5}. \\ &= \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} \varepsilon_{i_1 i_2} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdot \sum_{i_3=3}^{5}\sum_{i_4=3}^{5}\sum_{i_5=3}^{5} \varepsilon_{i_3 i_4 i_5} a_{i_3 3} a_{i_4 4} a_{i_5 5} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ketika bloknya sepanjang garis “antidiagonal”, kita bisa menghitung determinan dengan cara yang sama, kecuali kita harus berhati-hati dengan tandanya. Sebagai contoh

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & * & * \\ a_{41} & a_{42} & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{24} & a_{24} \end{vmatrix}, \tag{4.48}$$

dan

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & * & * & * \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & * & * & * \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & * & * & * \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{vmatrix}. \tag{4.49}$$

Kita bisa memperoleh hasil (4.48) dengan menggantikannya menjadi determinan blok diagonal dengan pertukaran genap antara dua baris. Tetapi, kita memerlukan sebuah bilangan ganjil untuk mengubah (4.49) menjadi determinan blok diagonal, seingga ada tanda negatif.

Contoh 4.5.1. Hitunglah

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Solusi 4.5.1.

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \text{(Baris 4 - Baris 2)} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 = -2$$

4.6 Ekspansi Laplacian dengan Minor Komplemen

(Bahasan ini bisa dilewati ketika membaca pertama kali.)

Ekspansi Laplace D_3 dengan elemen kolom ketiga adalah

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Tiga buah determinan orde dua adalah minor komplemen untuk masing-masing elemen. Penting juga untuk berpikir bahwa tiga elemen a_{13}, a_{23}, a_{33} merupakan komplemen untuk masing-masing minor. Jelaslah bahwa ekspansinya bisa dituliskan sebagai

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} a_{13} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} a_{23} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} a_{33}. \tag{4.50}$$

Dengan cara ini, terlihat bahwa determinan D_3 sama dengan jumlah perkalian semua minor orde dua yang terkandung dalam dua buah kolom pertama, masing-masing dikalikan dengan elemen komplemennya. Faktanya, determinan sebarang D_n, meski untuk $n > 3$, bisa diekspansikan dengan cara yang sama, kecuali elemenn komplemen jelaslah merupakan minor komplemen yang lain. Sebagai contoh, untuk determinan orde empat

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \tag{4.51}$$

enam buah minor orde dua bisa dibentuk dari dua buah kolom pertama. Yaitu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

Marilah kita ekspansikan D_4 dalam enam minor ini. Pertama ekspansikan D_4 dengan kolom pertama, kemudian ekspansikan empat minor dengan kolom pertamanya, kita mempunyai

$$D_4 = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} + a_{41}C_{41}, \tag{4.52}$$

dengan

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{42}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{42}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$$

$$C_{41} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

Jika kita masukkan kembali kofaktor ini pada (4.52) dan kita kumpulkan suku-sukunya, kita mempunyai

$$\begin{aligned} D_4 = {} & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ & + (a_{11}a_{41} - a_{41}a_{12})\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ & - (a_{21}a_{42} - a_{41}a_{22})\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + (a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Jelaslah

$$\begin{aligned} D_4 = {} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Jika D_4 adalah determinan blok diagonal

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

maka hanya suku pertama pada (4.54) tak bernilai nol, sehingga

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

hasilnya sesuai dengan yang diperoleh pada subbab terakhir.

Jika kita menggunakan notasi berikut

$$A_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{vmatrix}$$

dan $M_{i_1 i_2, j_1 j_2}$ sebagai minor komplemen untuk $A_{i_1 i_2, j_1 j_2}$, determinan D_4 dalam (4.51) bisa diekspansikan dalam suku minor yang dibentuk oleh elemen dua buah kolom

$$D_4 = \sum_{i_1=1}^{3} \sum_{i_2>i_1}^{4} (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} A_{i_1 i_2, j_1 j_2} M_{i_1 i_2, j_1 j_2}. \tag{4.55}$$

Dengan $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, bisa dengan mudah kita buktikan bahwa (4.55) adalah, suku per suku, sama dengan (4.54). Bukti (4.54) sama dengan ekspansi Laplacian dengan baris. Pertama (4.55) adalah kombinasi linier dari 4! perkalian, tiap perkalian memiliki satu elemen dari tiap baris dan tiap kolom. Koefisien bisa berupa +1 atau -1, bergantung apakah bilangan genap atau ganjil yang diperlukan untuk memindahkan i_1 ke baris pertama, i_2 ke baris kedua, dan j_1 ke kolom pertama, j_2 ke kolom kedua, tanpa mengubah urutan elemen sisanya. Jelas bahwa determinan bisa juga diekspansikan dalam suku minor dari baris sebarang.

Untuk determinan D_n orde n, kita bisa mengekspansikannya dengan cara yang sama, bukan hanya dalam suku minor orde dua, tetapi juga dalam minor orde k dengan $k < n$. Jelas, untuk $k = n-1$, hal ini sama dengan ekspansi Laplacian dengan sebuah kolom. Mengikuti prosedur yang sama dengan mengekspansikan D_4, kita bisa membuktikan

$$D_n = \sum_{(i)} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} A_{i_1 i_2 \cdots i_k, j_1 j_2 \cdots j_k} M_{i_1 i_2 \cdots i_k, j_1 j_2 \cdots j_k},$$

dengan simbol $\sum_{(i)}$ mengindikasikan penjumlahan terhadap semua permutasi yang mungkin dengan cara sebagai berikut. Himpunan subscript pertama $i_1 i_2 \cdots i_k$ berasal dari n buah indeks $12...n$ diambil k sekali dengan batasan $i_1 < i_2 \cdots < i_k$. Himpunan subscript kedua $j_1 j_2 \cdots j_k$ dipilih sebarang tetapi tidak berubah untuk tiap suku pada ekspansi. Rumus ini berlaku umum, tetapi jarang digunakan untuk menghitung determinan.

Contoh 4.6.1. Hitunglah

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

dengan (a) ekspansi minor yang dibentuk dari dua kolom pertama, (b) ekspansi minor yang dibentuk dari baris kedua dan keempat.

Solusi 4.6.1. (a)

$$\begin{aligned} D_4 = & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ & = -2 - 0 + 5 + 6 - 24 + 65 = 50. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} D_4 = & (-1)^{2+4+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{2+4+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+2+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{2+4+2+4} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+3+4} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ & = -24 - 4 - 6 + 24 + 60 - 0 = 50. \end{aligned}$$

4.7 Perkalian Determinan Berorde Sama

Jika $|A|$ dan $|B|$ adalah determinan berorde yang sama n, maka perkalian

$$|A| \cdot |B| = |C|$$

adalah determinan dengan orde yang sama. Elemennya diberikan

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Untuk determinan orde dua, hubungan ini diberikan oleh

$$|A|\cdot|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{vmatrix}.$$

Untuk membuktikan ini, kita gunakan sifat determinan blok diagonal

$$|A|\cdot|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Kalikan elemen kolom pertama dengan b_{11} dan elemen pada kolom kedua dengan b_{21} dan jumlahkan keduanya pada elemen yang bersesuaian pada kolom ketiga, kita peroleh

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & 0 \\ a_{21} & a_{22} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{vmatrix}$$

Dengan cara yang sama, kita kalikan elemen pada kolom pertama dengan b_{12} dan elemen pada kolom kedua dengan b_{22} dan kemudian jumlahkan dengan elemen yang bersesuaian pada kolom keempat, ini menjadi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ a_{21} & a_{22} & (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dengan (4.48)

$$\begin{aligned} |A|\cdot|B| &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

yang merupakan hasil yang diinginkan. Prosedur ini bisa digunakan untuk determinan orde sebarang.

Contoh 4.7.1. Tunjukkan bahwa

$$\begin{vmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & a^2 + b^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

Solusi 4.7.1.

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & a^2+b^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

4.8 Diferensiasi Determinan

Kadang, kita memerlukan sebuah rumus untuk turunan sebuah deteminan. Jika turunan terhadap elemen tertentu a_{ij}, maka

$$\frac{\partial D_n}{\partial a_{ij}} = C_{ij},$$

dengan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, karena

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \quad \text{untuk} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Anggap bahwa elemennya berupa fungsi sebuah parameter s, turunan D_n terhadap s diberikan oleh

$$\frac{\mathrm{d}D_n}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial D_n}{\partial a_{ij}} \frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}s}.$$

Sebagai contoh

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}C_{1j} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}C_{2j} = \sum_{j=1}^{3} a_{3j}C_{3j},$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}D_3}{\mathrm{d}s} &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathrm{d}a_{1j}}{\mathrm{d}s}C_{1j} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathrm{d}a_{2j}}{\mathrm{d}s}C_{2j} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathrm{d}a_{3j}}{\mathrm{d}s}C_{3j} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}a_{12}}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}a_{13}}{\mathrm{d}s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{\mathrm{d}a_{21}}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}a_{22}}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}a_{23}}{\mathrm{d}s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{\mathrm{d}a_{31}}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}a_{32}}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}a_{33}}{\mathrm{d}s} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Contoh 4.8.1. Jika $D_2 = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$, carilah $\dfrac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}s}$.

Solusi 4.8.1.

$$\frac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}s} = \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 0.$$

Hasil ini jelas, karena $D_2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

4.9 Determinan dalam Geometri

Dalam geometri analitik kita tahu bahwa sebuah garis lurus dalam bidang xy dinyatakan dengan persamaan

$$ax + by + c = 0. \tag{4.56}$$

Garis ini didefinsikan secara unik oleh dua buah titik. Jika garis tersebut melalui $(x_1,\ y_1)$ dan $(x_2,\ y_2)$, maka keduanya haruslah memenuhi persamaan

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \tag{4.57}$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0. \tag{4.58}$$

Pers. (4.56)-(4.58) bisa dianggap sebagai sebuah sistem dengan $a,\ b,\ c$ tidak diketahui yang tidak bisa bernilai nol jika (4.56) merepresentasikan sebuah garis. Sehingga determinan koefisien harus hilang:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.59}$$

Dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa (4.59) adalah persamaan garis yang sudah kita kenal. Dengan mengekspansikan (4.59) pada kolom ketiga, kita mempunyai

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = (x_1y_2 - x_2y_1) - (xy_2 - x_2y) + (xy_1 - x_1y) = 0.$$

Persamaan ini bisa dengan mudah ditransformasikan ke dalam (4.56) dengan $a = y_1 - y_2,\ b = x_2 - x_1,\ c = x_1y_2 - x_2y_1$. Atau bisa dituliskan dalam bentuk

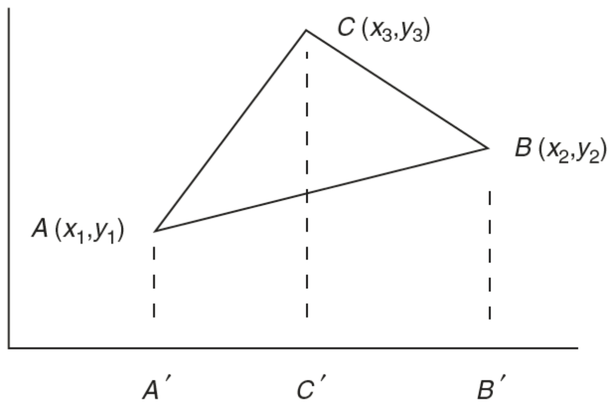
$$y = mx + y_0,$$

dengan $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ adalah kemiringan dan $y_0 = y_1 - mx_1$ adalah titik potong sumbu$-y$.

Dari (4.59) syarat penting dan cukup agar tiga buah titik $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$ dan (x_3, y_3) terletak pada sebuah garis adalah

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.60}$$

Sekarang jika tiga buah titik tidak berada pada satu garis, maka titik tersebut membentuk sebuah segitiga dan determinan (4.60) tidak sama dengan nol. Dalam kasus tersebut terdapat sebuah pertanyaan menarik tentang apa yang direpresentasikan



Gambar 4.6: Luas ABC sama dengan jumlah jajaran genjang $AA'C'C$ dan $CC'B'B$ dikurangi jajaran genjang $AA'B'B$. Sebagai konsekuensinya luas ABC bisa dinyatakan dengan determinan.

oleh determinan. Karena determinan memiliki dimensi sebuah luas, hal ini menyarankan bahwa determinan memiliki hubungan dengan luas sebuah segitiga.

Luas segitiga yang dibentuk tiga titik $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dan $C(x_3, y_3)$ yang ditunjukkan Gambar 4.6 adalah

$$\text{Luas } ABC = \text{Luas } AA'C'C + \text{Luas } CC'B'B - \text{Luas } AA'B'B$$

Luas jajaran genjang sama dengan setengah hasil kali tinggi dengan jumlah sisi sejajar:

$$\begin{aligned}
\text{Luas } AA'C'C &= \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3), \\
\text{Luas } CC'B'B &= \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_2 + y_3), \\
\text{Luas } AA'B'B &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2).
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\text{Luas } ABC &= \frac{1}{2}[(x_3 - x_1)(y_1 + y_3) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) - (x_2 - x_1)(y_1 + y_2)] \\
&= \frac{1}{2}[(x_2y_3 - x_3y_2) - (x_1y_3 - x_3y_1) + (x_1y_2 - x_2y_1)] \\
&= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (4.61)
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa urutan titik ABC pada gambar berlawanan arah jarum jam. Jika searah jarum jam, posisi B dan C bertukar. Hal ini akan mengakibatkan pertukaran baris 2 dan baris 3 pada determinan. Sebagai konsekuensinya, tanda negatif akan muncul. Sehingga kita simpulkan jika tiga puncak segitiga adalah $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$,

maka

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm 2 \times \text{Luas } ABC, \tag{4.62}$$

dengan tanda + atau − dipilih berdasarkan penamaan puncak segitiga searah atau berlawanan arah jarum jam.

Contoh 4.9.1. Carilah lingkaran yang melewati (2,6), (6,4), (7,1) dengan determinan.
Solusi 4.9.1. Rumus umum lingkaran adalah

$$a\left(x^2 + y^2\right) + bx + cy + d = 0.$$

Tiga buah titik harus memenuhi persamaan ini

$$\begin{aligned} a\left(x_1^2 + y_1^2\right) + bx_1 + cy_1 + d &= 0, \\ a\left(x_2^2 + y_2^2\right) + bx_2 + cy_2 + d &= 0, \\ a\left(x_3^2 + y_3^2\right) + bx_3 + cy_3 + d &= 0. \end{aligned}$$

Persamaan ini bisa dianggap sebagai persamaan dengan a, b, c, d yang tak diketahui dan tidak bisa bernilai nol. Sehingga determinan koefisien harus hilang

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 = 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Jika kita masukkan nilainya

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 = 0 \\ 40 & 2 & 6 & 1 = 0 \\ 52 & 6 & 4 & 1 = 0 \\ 50 & 7 & 1 & 1 = 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ganti baris pertama dengan (baris 1 - baris 2), dan baris ketiga dengan (baris 3 - baris 2) dan baris keempat dengan (baris 4 - baris 2), kita peroleh

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 = 0 \\ 40 & 2 & 6 & 1 = 0 \\ 52 & 6 & 4 & 1 = 0 \\ 50 & 7 & 1 & 1 = 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} (x^2 + y^2 - 40) & (x-2) & (y-6) & 1 = 0 \\ 40 & 2 & 6 & 1 = 0 \\ 12 & 4 & -2 & 0 = 0 \\ 10 & 5 & -5 & 0 = 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (x^2 + y^2 - 40) & (x-2) & (y-6) = 0 \\ 12 & 4 & -2 = 0 \\ 10 & 5 & -5 = 0 \end{vmatrix} \\ &= -10(x^2 + y^2 - 40) + 40(x-2) + 20(y-6) = 0, \end{aligned}$$

atau

$$x^2 + y^2 - 40 - 4(x-2) - 2(y-6) = 0,$$

yang bisa dituliskan sebagai

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Lingkaran ini berpusat pada $x = 2$ dan $y = 1$ dengan jari-jari 5.

Contoh 4.9.2. Berapakah luas segitiga yang puncaknya (−2,1), (4,3), (0,0)?
Solusi 4.9.2.

$$\text{Luas} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -10.$$

Luas segitiga 10 dan urutan puncaknya searah jarum jam.

4.10 Latihan

1. Gunakan metode determinan untuk menyelesaikan sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} 3x + 6z &= 51, \\ 12y - 6z &= -6, \\ x - y - z &= 0. \end{aligned}$$

   Jawab: $x = 7,\ y = 2,\ z = 5.$

2. Dengan menggunakan hukum Kirchhoff pada rangkaian listrik, persamaan berikut dibisakan untuk arus i_1, i_2, i_3 pada percabangan

$$\begin{aligned} i_1 R_1 + i_3 R_3 &= V_A, \\ i_2 R_2 + i_3 R_3 &= V_C \\ i_1 + i_2 - i_3 &= 0. \end{aligned}$$

   Nyatakan i_1, i_2, i_3 dalam hambatan $R_1,\ R_2,\ R_3$ dan tegangan sumber $V_A,\ V_C$.
   Jawab:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{(R_2 + R_3)V_A - R_3 V_C}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}, \\ i_2 &= \frac{(R_1 + R_3)V_C - R_3 V_A}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}, \\ i_3 &= \frac{R_2 V_A + R_1 V_C}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}. \end{aligned}$$

3. Carilah determinan orde empat berikut (yang berasal dari persamaan Dirac tentang elektron).

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

   Jawab: 1.

4. Tanpa menghitung, tunjukkan bahwa determinan skew simetrik orde ganjil sama dengan nol.

$$D_{\text{ss}} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

   Petunjuk: $D^{\text{T}} = D$ dan $(-1)^n D_{\text{ss}} = D_{\text{ss}}^{\text{T}}$.

5. Tunjukkan bahwa

$$\begin{vmatrix} a & d & 2a-3d \\ b & e & 2b-3e \\ c & f & 2c-3f \end{vmatrix} = 0.$$

6. Tentukan x sehingga

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -x & 1+3x & 3-x \\ 0 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 36.$$

   Jawab: 13.

7. Ekspansi determinan D_n pada baris ke$-i$ elemen a_{ik} adalah $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}$ dengan C_{ik} kofaktor dari a_{ik}. Tunjukkan bahwa

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}C_{ik} = 0 \quad \text{untuk} \quad j \neq i.$$

   Petunjuk: Ekspansinya adalah determinan lain dengan baris yang identik.

8. Hitung determinan berikut dengan ekspansi pada (a) kolom pertama; (b) baris kedua

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

   Jawab: 1.

9. Gunakan sifat determinan untuk mentransformasikan determinan pada soal 6 menjadi bentuk segitiga dan hitunglah hasilnya sebagai perkalian elemen diagonal.

10. Hitunglah determinan pada soal 6 dengan ekspansi minor 2×2 oleh dua buah kolom pertama.

11. Hitunglah determinan

$$D_5 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Jawab: 3080.
[Petunjuk: Cara paling cepat adalah dengan ekspansi minor 2×2 oleh dua buah kolom pertama.]

12. Tanpa ekspansi, tunjukkan bahwa

$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

[Petunjuk: Tambah baris 1 dan baris 2, keluarkan faktor $(x+y+z)$.]

13. Tunjukkan bahwa (a)

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (xy+yz+zx) \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

[Petunjuk: Gantikan baris 3 berturut-turut dengan x·baris 1 + baris 3, kemudian dengan y·baris 1 + baris 3, kemudian dengan z·baris 1 + baris 3. Nyatakan hasilnya sebagai jumlah dua determinan, salah satunya sama dengan nol.]

(b) Gunakan hasil determinan Vandermonde untuk menunjukkan

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (xy+yz+zx)(x-y)(y-z)(z-x).$$

14. Nyatakan alasan langkah per langkah untuk identitas berikut

$$\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & -2b & -a & b \\ 2b & 2a & -b & -a \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 2a & -2b \\ 2b & 2a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = 4\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

15. Nyatakan alasan langkah per langkah untuk identitas berikut

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b) & b & (c+d) & d \\ (b+a) & a & (d+c) & c \\ (c+d) & d & (a+b) & b \\ (d+c) & c & (b+a) & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a+b) & b & (c+d) & d \\ 0 & a-b & 0 & c-d \\ (c+d) & d & (a+b) & b \\ 0 & c-d & 0 & a-b \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} (a+b) & (c+d) & b & d \\ (c+d) & (a+b) & d & b \\ 0 & 0 & a-b & c-d \\ 0 & 0 & c-d & a-b \end{vmatrix}$$
$$= \left[(a+b)^2-(c+d)^2\right]\left[(a-b)^2-(c-d)^2\right].$$

16. Tunjukkan alasan tiap langkah untuk identitas berikut

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = -(-2)^{n-2}(n-1).$$

[Petunjuk: 1. Gantikan kolom 1 dengan kolom 1 + kolom terakhir. 2. Keluarkan faktor $(n-1)$. 3. Ganti baris i dengan baris $i-$ baris $(i-1)$, mulai dengan baris terakhir. 3. Ganti baris i dengan baris i + baris 2. 4. Hitung determinan segitiga.]

17. Hitung determinan berikut

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ . & . & . & \cdots & . \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \cdots & n^2 \end{vmatrix}.$$

Jawab: Untuk $n = 1,\ D_1 = 1;\ n = 2,\ D_2 = -2;\ n \geq 3,\ D_n = 0.$
[Petunjuk: untuk $n \geq 3$, ganti baris i dengan baris $i-$ baris $(i-1)$.]

18. Gunakan aturan perkalian determinan berorde sama untuk membuktikan

$$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & a^2+b^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+ac & bc & c^2 \\ ab & 2ac & bc \\ a^2 & ab & b^2+ac \end{vmatrix}.$$

Petunjuk:

$$\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{vmatrix}.$$

19. Jika $f(x)$ diberikan oleh determinan berikut, tanpa ekspansi $f(x)$, carilah $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

$$(a)\ f(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} & 1 \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} & 0 \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} & x \end{vmatrix}; \quad (b)\ f(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & \ln|x| \\ \sin x & \cos x & \frac{1}{x} \\ \cos x & \sin x & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix}.$$

Jawab: (a) -2; (b) $1/x + 2/x^3$.

20. Carilah luas segitiga dengan puncak $(0, t)$, $(3t, 0)$, $(t, 2t)$.
Jawab: $2t$.

21. Persamaan sebuah bidang dinyatakan dengan $ax + by + cz + d = 0$. Carilah bidang yang melalui (1, 1, 1), (5, 0, 5), (3, 2, 6).
Jawab: $3x + 4y - 2z - 5 = 0$.

5

Aljabar Matriks

Matriks diperkenalkan oleh matematikawan Inggris Arthur Cayley $(1821-1895)$. Metode aljabar matriks telah diperluas jauh melampaui matematika ke dalam hampir semua disiplin pembelajaran. Dalam ilmu fisika, matriks tidak hanya berguna, tetapi juga penting dalam menangani banyak persoalan rumit. Persoalan ini terutama dijumpai dalam tiga kategori. Pertama dalam teori transformasi, kedua solusi dari sistem persamaan linear, dan ketiga dalam solusi persoalan nilai eigen. Dalam bab ini, kita akan membahas berbagai operasi matriks dan situasi yang berbeda pada saat matriks bisa diterapkan.

5.1 Notasi Matriks

Dalam subbab ini, kita akan membicarakan operasi sederhana dari dua buah matriks atau lebih yang bisa dikombinasikan.

5.1.1 Definisi

Matriks

Susunan elemen segi empat disebut sebagai sebuah matriks. Susunan tersebut biasanya ditutup dengan kurung melengkung atau kurung persegi. Maka susunan segi empat

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 6 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x+\mathrm{i}y \\ x-\mathrm{i}y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

merupakan contoh sebuah matriks. Kita mudah untuk memikirkan bahwa setiap elemen dari matriks sebagai baris dan kolom tertentu dari sebuah matriks. Jika suatu matriks memiliki m baris dan n kolom, matriks dikatakan berorde m dan n, atau $m \times n$. Setiap elemen matriks bisa ditandai secara unik dengan indeks baris dan indeks kolom. Hal ini mudah untuk menulis matriks $m \times n$ sebagai

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

dengan a_{ij} adalah elemen baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$, yang bisa berupa bilangan riil atau kompleks atau fungsi. Bahkan elemennya bisa berupa matriks itu sendiri, dalam kasus ini elemennya disebut sebagai submatriks dan matriks keseluruhan disebut terpartisi.

Sehingga, jika matriks pertama pada (5.1) dinamakan matriks A, maka A merupakan matriks 3×2, matriks ini memiliki 3 baris $(4 \ \ 7)$, $(12 \ \ 6)$, $(-9 \ \ 3)$ dan dua kolom, $\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Elemennya adalah $a_{11} = 4$, $a_{12} = 7$, $a_{21} = 12$, $a_{22} = 6$, $a_{13} = -9$, $a_{32} = 3$.

Kadang kita biasa menggunakan notasi

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

untuk menyatakan A adalah matriks $m \times n$. Elemen a_{ij} bisa juga dinyatakan sebagai

$$a_{ij} = (A)_{ij}.$$

5.1.2 Matriks Khusus

Terdapat beberapa matriks khusus yang diberi nama setelah kemunculannya.

Matriks Nol

Sebuah matriks berorde sebarang dinamakan matriks nol jika dan hanya jika keseluruhan elemennya sama dengan nol. Matriks nol ini kadang dinamakan matriks null.

Matriks Baris

Sebuah matriks baris hanya memiliki satu baris, seperti $(1 \ \ 0 \ \ 3)$. Sebuah matriks baris juga disebut vektor baris. Jika disebut sebagai vektor baris, elemennya dinamakan sebagai komponen.

Matriks Kolom

Sebuah matriks kolom hanya memiliki satu buah kolom, seperti $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Sebuah matriks kolom juga disebut sebagai vektor kolom. Jika disebut sebagai vektor kolom, maka elemennya juga disebut sebagai komponen.

Matriks Persegi

Matriks A dikatakan matriks persegi jika jumlah baris sama dengan jumlah kolom. Sebuah matriks persegi berorde n berarti memiliki n baris dan n kolom. Matriks persegi ini sangat penting. Kita akan menemui sebagian besar persoalan dengan matriks persegi bersama-sama dengan matriks kolom dan baris.

Untuk sebuah matriks persegi A, kita bisa menghitung determinan

$$\det(A) = |A|,$$

seperti yang sudah kita pelajari. Matriks bukanlah determinan. Matriks adalah susunan angka, determinan adalah sebuah bilangan. Determinan dari matriks hanya didefinisikan untuk matriks persegi.

Misalkan $A = (a_{ij})_n$ suatu matriks persegi berorde n. Diagonal dari pojok kiri atas ke pojok kanan bawah dari matriks,elemennya $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ disebut elemen-elemen diagonal. Semua elemen a_{ij} yang tersisa untuk $i = j$ disebut elemen off-diagonal.

Terdapat beberapa matriks persegi khusus yang menarik.

Matriks Diagonal

Sebuah matriks diagonal adalah matriks persegi yang elemen diagonalnya ada yang tidak sama dengan nol, tapi elemen off-diagonalnya semuanya nol. Sebagai contoh,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

adalah matriks diagonal. Sehingga untuk sebuah matriks diagonal

$$(A)_{ij} = a_{ii}\delta_{ij},$$

dengan

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Notasi seperti ini tampaknya berlebihan karena matriks diagonal bisa dengan mudah divisualisasikan. Tetapi notasi ini akan sangat berguna dalam manipulasi matriks yang akan kita lihat belakangan.

Matriks Konstan

Jika semua elemen sebuah matiks diagonal sama semuanya, matriks ini dinamakan matriks konstan atau matriks skalar.

Matriks Satuan

Jika elemen sebuah matriks konstan sama dengan satuan, maka dianamakan matriks satuan. Sebuah matriks satuan disebut sebagai matriks identitas, disimbolkan dengan I, yaitu

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriks Segitiga

Sebuah matriks persegi yang hanya memiliki elemen nol pada salah satu sisi diagonal utama dinamakan matriks segitiga. Maka

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

adalah contoh dari matriks segitiga. Sebuah matriks yang $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$ disebut matriks segitiga kanan atau matriks segitiga atas, seperti matriks A di atas. Sedangkan matriks dengan $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$ disebut matriks segitiga kiri atau matriks segitiga bawah, seperti matriks B. Jika semua elemen-elemen diagonal utama adalah nol, matriks adalah matriks segitiga sempurna[1], seperti matriks C. Matriks diagonal, matriks identitas serta matriks nol semua adalah matriks segitiga.

5.1.3 Persamaan Matriks

Dua buah matriks A dan B sama jika dan hanya jika, tiap elemen A sama dengan elemen B yang bersesuaian. Jelas bahwa A dan B harus berorde sama, dengan kata lain dua matriks tersebut haris memiliki jumlah baris dan kolom yang sama. Sehingga jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

[1]diterjemahkan dari *strictly triangular matrix.*

kita melihat bahwa

$$A \neq B, \quad B \neq C, \quad C \neq A.$$

Sehingga sebuah persamaan matriks $A = B$ berarti bahwa A dan B berorde sama dan elemen yang bersesuaian juga sama, yaitu $a_{ij} = b_{ij}$. Sebagai contoh, persamaan

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t & 1+2t \\ 4t^2 & 0 \end{pmatrix}$$

berarti $x_1 = 3t,\ x_2 = 1 + 2t,\ y_1 = 4t^2,\ y_2 = 0$.

Dengan pemahaman seperti ini, kita bisa menggunakan sebuah persamaan matriks untuk menggantikan sebuah himpunan persamaan. Hal ini tidak hanya menyederhanakan penulisan tetapi akan memudahkan kita menyelesaikan persamaan tersebut secara sistematik.

Penjumlahan dan Pengurangan

Kita sekarang bisa mendefinisikan penjumlahan dan pengurangan dua buah matriks berorde sama. Jumlah dua buah matriks A dan B adalah matriks lain C. Dari definisi

$$A + B = C$$

berarti

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Sebagai contoh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -6 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

maka

$$A + B = \begin{pmatrix} (1-10) & (3+5) & (126) \\ (2+7) & (4+3) & (6+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 8 & 6 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} (1+10) & (3-5) & (12+6) \\ (2-7) & (4-3) & (6-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 18 \\ -9 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Penjumlahan beberapa matriks diperoleh dari penjumlahan berulang. Karena penjumlahan matriks tidak lain adalah penjumlahan elemen yang bersesuaian, tidak menjadi masalah urutan matriks yang kita jumlahkan. Agar eksplisit, jika $A,\ B,\ C$ adalah matriks $m \times n$, maka hukum komutatatif dan asosiatif berlaku

$$A + B = B + A,$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Perkalian dengan Skalar

Kita mungkin mengkombinasikan matriks orde sebarang dengan sebuah skalar melalui perkalian skalar. Jika A matriks berorde $m \times n$

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

dan c adalah sebuah skalar, kita mendefinsikan cA adalah matriks berorde $m \times n$ lain yaitu

$$cA = (ca_{ij})_{m\times n}.$$

Sebagai contoh, jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

maka

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -10 \\ 4 & -8 & 12 \end{pmatrix},$$

Skalar di sini bisa berupa bilangan riil atau kompleks, bisa juga berupa fungsi tetapi tidak bisa berupa kuantitas matriks.

Perhatikan bahwa perbedaan antara perkalian skalar matriks persegi cA dan perkalian skalar dengan determinannya $c|A|$. Untuk cA, c dikalikan pada tiap elemen A, sedangkan untuk $c|A|$, c hanya dikalikan pada elemen sebuah kolom atau sebuah baris. Sehingga, jika A adalah matriks persegi berorde n, maka

$$\det(cA) = c^n|A|.$$

5.1.4 Transpos Matriks

Jika baris dan kolom dipertukarkan, matriks hasilnya dinamakan matriks transpos. Matriks transpos dinotasikan dengan $\widetilde{A}$, disebut A tilde, atau A^{T}. Biasanya, tetapi tidak selalu, transpos sebuah matriks dinotasikan dengan tilde dan transpos perkalian sejumlah matriks dengan superscript T.

Sehingga, jika

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

maka

$$\widetilde{A} = A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dari definisi, jika kita mentransposkan sebuah matriks dua kali, kita memperoleh matriks asalnya

$$\widetilde{A}^{\mathrm{T}} = A.$$

Dengan menggunakan notasi indeks, hal ini berarti

$$\left(\widetilde{A}\right)_{ij} = (A)_{ji}, \quad \left(\widetilde{A}^{\mathrm{T}}\right)_{ij} = A_{ij}.$$

Terlihat jelas di sini transpos sebuah matriks $m \times n$ adalah matriks $n \times m$. Transpos sebuah matriks persegi adalah matriks persegi yang lain. Transpos sebuah matriks kolom adalah matriks baris, dan transpos matriks baris adalah sebuah matriks kolom.

Matriks Simetrik

Sebuah matriks simetrik adalah matriks yang sama dengan transposnya

$$A = \widetilde{A},$$

yang berarti

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Matriks ini simetrik terhadap diagonalnya. Sebuah matriks simetrik haruslah berupa matriks persegi.

Matriks Antisimetrik

Sebuah matriks antisimetrik adalah matriks yang sama dengan negatif transposnya, yaitu

$$A = -\widetilde{A},$$

yang berarti

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Sehingga elemen diagonal matriks antisimetrik sama dengan nol. Sebuah matriks antisimetrik juga berupa matriks persegi. Matriks antisimetrik juga dikenal sebagai matriks skew simetrik.

Dekomposisi Matriks Persegi

Sebuah matriks persegi bisa dituliskan sebagai penjumlahan matriks simetrik dan matriks antisimetrik. Jelaslah

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \widetilde{A}\right) + \frac{1}{2}\left(A - \widetilde{A}\right)$$

merupakan sebuah identitas. Selanjutnya, misalkan

$$A_{\rm s} = \frac{1}{2}\left(A + \widetilde{A}\right), \quad A_{\rm a} = \frac{1}{2}\left(A - \widetilde{A}\right),$$

maka $A_{\rm s}$ adalah matriks simetrik karena

$$A_{\rm s}^{\rm T} = \frac{1}{2}\left(A^{\rm T} + \widetilde{A}^{\rm T}\right) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{A} + A\right) = A_{\rm s}$$

dan $A_{\rm a}$ matriks antisimetrik karena

$$A_{\rm a}^{\rm T} = \frac{1}{2}\left(A^{\rm T} - \widetilde{A}^{\rm T}\right) = \frac{1}{2}\left(\widetilde{A} - A\right) = -A_{\rm a}.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} A &= A_{\rm s} + A_{\rm a}, \\ \widetilde{A} &= A_{\rm s} - A_{\rm a}. \end{aligned}$$

Contoh 5.1.1. Nyatakan matriks

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

sebagai jumlah matriks simetrik dan matriks antisimetrik.

Solusi 5.1.1.

$$A = A_{\rm s} + A_{\rm a},$$

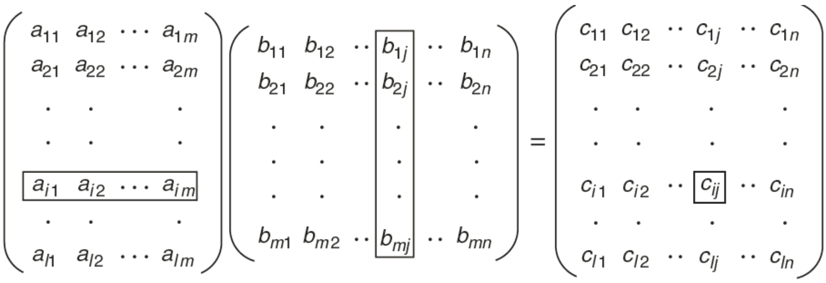
$$A_{\rm s} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_{\rm a} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2 Perkalian Matriks

5.2.1 Perkalian Dua Buah Matriks

Perkalian, atau produk, dua matriks bukan merupakan ekstensi sederhana dari konsep perkalian dua buah bilangan. Definisi perkalian matriks dimotivasi oleh teori transformasi linier yang akan kita pelajari pada Subbab 5.3.



Gambar 5.1: Ilustrasi perkalian matriks. Jumlah kolom A harus sama dengan jumlah baris B untuk perkalian $AB = C$ terdefinisi. Elemen baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dari C diberikan oleh $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$.

Dua buah matriks A dan B bisa dikalikan bersama-sama jika jumlah kolom A sama dengan jumlah baris B. Perkalian matriks bergantung pada urutan kemunculan matriks dalam perkalian. Sebagai contoh jika A memiliki orde $l \times m$, dan B berorde $m \times n$, maka perkalian matriks AB terdefinisi tetapi perkalian BA, dalam perkalian tersebut tidak terdefinisi kecuali $m = l$. Perkalian didefinisikan sebagai berikut. Jika

$$A = (a_{ij})_{l\times m}, \quad B = (b_{ij})_{m\times n},$$

kemuadian $AB = C$ yang berarti C adalah matriks berorde $l \times n$ dan

$$C = (c_{ij})_{l\times n},$$
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

Sehingga elemen matriks C pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ adalah jumlah semua perkalian elemen matriks A baris ke$-i$ dan elemen matriks B kolom ke$-j$. Sehingga, jika

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \end{pmatrix}, \quad C = AB,$$

maka

$$C = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) & (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) & (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}) \end{pmatrix}.$$

Ilustrasi perkalian matriks ada pada Gambar 5.1.

Jika perkalian AB terdefinisi, A dan B dikatakan *comformable* (atau *compatible*). Jika perkalian AB terdefinisi, perkalian BA tidak harus terdefinisi. Diberikan dua matriks A dan B, perkalian AB dan BA akan mungkin jika, A berorde $m \times n$ dan B berorde $n \times m$. AB akan berorde $m \times m$ dan BA akan berorde $n \times n$. Jelaslah jika $m \neq n$, AB tidak bisa sama dengan BA, karena ordenya berbeda. Meskipun jika $n = m$, AB tidak harus sama dengan BA. Contoh berikut akan membuat jelas.

Contoh 5.2.1. Carilah perkalian AB jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solusi 5.2.1.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 \times 3 + 2 \times 4) & (1 \times 2 + 2 \times 5) & (1 \times 1 + 2 \times 6) \\ (3 \times 3 + 4 \times 4) & (3 \times 2 + 4 \times 5) & (3 \times 1 + 4 \times 6) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 25 & 26 & 27 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Di sini A berorde 2×2 dan orde B adalah 2×3, sehingga AB berorde 2×3 dan BA tidak terdefinisi.

Contoh 5.2.2. Carilah perkalian AB jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Contoh 5.2.2.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 12 \\ 15 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Di sini AB adalah matriks kolom dan BA tidak terdefinisi.

Contoh 5.2.3. Carilah AB dan BA jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Solusi 5.2.3.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (2 + 6 + 12) = 20,$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Contoh ini secara dramatis menunjukkan $AB \neq BA$.

Contoh 5.2.4. Carilah perkalian AB dan BA jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solusi 5.2.4.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 29 & 36 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}.$$

Jelaslah

$$AB \neq BA.$$

Contoh 5.2.5. Carilah perkalian AB dan BA jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solusi 5.2.5.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tidak hanya $AB \neq BA$, tetapi juga $AB = 0$ tidak mengimplikasikan $A = 0$ atau $B = 0$ atau $BA = 0$.

Contoh 5.2.6. Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Buktikan bahwa $AB = AC$.

Solusi 5.2.6.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Contoh ini menunjukkan bahwa $AB = AC$ bisa terpenuhi tanpa $B = C$ atau $A = 0$.

5.2.2 Motivasi Perkalian Matriks

Sebagian besar kegunaan aljabar matriks adalah sifat perkaliannya. Definisi perkalian matriks, seperti yang sudah kita lihat, kelihatan "tidak alami" dan rumit. Motivasi definisi ini berasal dari "transformasi linier." Perkalian matriks memberikan mekanisme sederhana untuk mengubah variabel. Sebagai contoh, anggap

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \tag{5.2a}$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \tag{5.2b}$$

dan selanjutnya

$$z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \tag{5.3a}$$

$$z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2. \tag{5.3b}$$

Dalam persamaan ini x dan y adalah variabel, sedangkan a dan b merupakan konstanta. x dan y dihubungkan oleh himpunan persamaan peratama, sedangkan y berhubungan dengan z melalui himpunan persamaan kedua. Untuk mencari hubungan antara x dengan z, kita harus mengganti nilai y yang diberikan pada himpunan persamaan pertama ke dalam himpunan persamaan kedua

$$z_1 = b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \tag{5.4a}$$

$$z_2 = b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3). \tag{5.4b}$$

Persamaan ini bisa kita tuliskan sebagai

$$\begin{aligned} z_1 &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 \\ &\quad + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2 + (b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23})x_3, \end{aligned} \tag{5.5a}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 \\ &\quad + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})x_2 + (b_{21}a_{13} + b_{22}a_{23})x_3. \end{aligned} \tag{5.5b}$$

Sekarang dengan menggunakan notasi matriks (5.2) bisa dituliskan

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

dan (5.3) sebagai

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Tidak hanya koefisien x_1, x_2, x_3 dalam (5.5) adalah elemen dari perkalian matriks

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \end{pmatrix}$$

tetapi juga berada pada tempat yang seharusnya. Dengan kata lain, (5.5) bisa diperoleh dengan mengganti $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dari (5.6) ke (5.7)

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Apa yang sudah kita tunjukkan di sini adalah dua buah hal penting. Pertama, perkalian matriks didefinisikan sedemikian rupa sehingga transformasi linier bisa dituliskan dalam bentuk kompak. Kedua, jika kita mensubstitusi transformasi linier ke yang lain, kita bisa memperoleh transformasi komposit dengan mengalikan matriks koefisien dengan urutan yang benar. Transformasi jenis ini tidak hanya sering dijumpai dalam matematika, tetapi sangat penting dalam fisika. Kita akan membicarakannya belakangan.

5.2.3 Sifat-sifat Perkalian Matriks

Salah satu hasil penting dalam aljabar matriks adalah transpos perkalian dua buah matriks sama dengan perkalian matriks transpos dengan urutan yang dibalik,

$$(AB)^{\mathrm{T}} = \widetilde{B}\widetilde{A}. \tag{5.9}$$

Untuk membuktikan ini kita harus menunjukkan bahwa tiap elemen ruas kiri sama dengan elemen yang bersesuaian pada ruas kanan. Elemen ke$-ij$ pada ruas kiri (5.9) diberikan oleh

$$\left((AB)^{\mathrm{T}}\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k (A)_{jk}(B)_{ki}. \tag{5.10}$$

Elemen ke$-ij$ ruas kanan (5.9) diberikan oleh

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{B}\widetilde{A}\right)_{ij} &= \sum_k \left(\widetilde{B}\right)_{ik} \left(\widetilde{A}\right)_{kj} = \sum_k (B)_{ki}(A)_{jk} \\ &= \sum_k (A)_{jk}(B)_{ki} \end{aligned} \tag{5.11}$$

dalam langkah terakhir kita menukar $(B)_{ki}$ dengan $(A)_{jk}$, karena hanya bilangan. Sehingga (5.9) terbukti.

Contoh 5.2.7. Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

buktikan bahwa

$$(AB)^{\mathrm{T}} = \widetilde{B}\widetilde{A}.$$

Solusi 5.2.7.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 22 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad (AB)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 22 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 22 & -4 \end{pmatrix}.$$

Sehingga $(AB)^{\mathrm{T}} = \widetilde{B}\widetilde{A}$.

Trace Matriks

Trace dari matriks persegi $A = (a)_{ij}$ didefinisikan sebagai jumlah elemen diagonalnya dan dinotasikan dengan TrA

$$\mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Teorema trace yang penting adalah trace dari perkalian matriks yang berhingga invarian terhadap permutasi siklik matriks. Kita pertama akan membuktikan teorema ini untuk perkalian dua matriks dan sisanya mengikuti.

Misalkan A adalah matriks $n \times m$ dan B matriks $m \times n$ maka

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji},$$
$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_{ji} a_{ij}.$$

Karena a_{ij} dan b_{ji} hanyalah bilangan urutannya bisa dibalik, maka

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

Perhatikan bahwa trace hanya didefinisikan untuk matriks persegi, tetapi A dan B tidak harus berupa matriks persegi sepanjang hasil perkaliannya adalah matriks persegi. Orde AB bisa berbeda dengan orde BA, tetapi tracenya sama.

Sekarang

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(ABC) &= \mathrm{Tr}(A(BC)) = \mathrm{Tr}((BC)A) \\ &= \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Perlu diperhatikan di sini bahwa trace perkalian sejumlah matriks tidak invarian terhadap permutasi sebarang, tetapi hanya pada permutasi siklik dari perkalian matriks.

Contoh 5.2.8. Misalkan

$$A=\begin{pmatrix}4&0&6\\5&2&1\\7&8&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&1\\9&1&2\\0&4&1\end{pmatrix},$$

buktikan bahwa (a) $\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$, dan (b) $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$.
Solusi 5.2.8.
(a)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A+B)&=\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix}4&0&6\\5&2&1\\7&8&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\9&1&2\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}5&0&7\\14&3&3\\7&12&4\end{pmatrix}\\&=5+3+4=12,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)&=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}4&0&6\\5&2&1\\7&8&3\end{pmatrix}+\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}1&0&1\\9&1&2\\0&4&1\end{pmatrix}\\&=(4+2+3)+(1+1+1)=12.\end{aligned}$$

(b)

$$\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}4&0&6\\5&2&1\\7&8&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\9&1&2\\0&4&1\end{pmatrix}=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}4&24&10\\23&6&10\\79&20&26\end{pmatrix}=36,$$

$$\mathrm{Tr}(BA)=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}1&0&1\\9&1&2\\0&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&6\\5&2&1\\7&8&3\end{pmatrix}=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix}11&8&9\\55&18&61\\27&16&7\end{pmatrix}=36.$$

Hukum Asosiatif Perkalian Matriks

Jika A, B dan C tiga buah matriks dan perkalian AB dan BC terdefinisi, maka

$$(AB)C=A(BC).\tag{5.13}$$

Dengan kata lain, urutan perkalian matriks yang dikalikan pertama tidak penting. Untuk membuktikannya misalkan

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\quad B=(b_{ij})_{n\times o},\quad C=(c_{ij})_{o\times p}.$$

Elemen ke$-ij$ ruas kiri (5.13) adalah

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{o}(AB)_{ik}(C)_{kj} = \sum_{k=1}^{o}\left(\sum_{l=1}^{n}(A)_{il}B_{lk}\right)(C)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{o}\sum_{k=1}^{o} a_{il}b_{lk}c_{kj},\end{aligned}$$

sedangkan elemen ke$-ij$ ruas kanan (5.13) adalah

$$\begin{aligned}(A(BC))_{ij} &= \sum_{l=1}^{n}(A)_{il}(BC)_{lj} = \sum_{l=1}^{n}(A)_{il}\sum_{k=1}^{o}B_{lk}(C)_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{o} a_{il}b_{lk}c_{kj}.\end{aligned}$$

Jelaslah $((AB)C)_{ij} = (A(BC))_{ij}$.

Contoh 5.2.9. Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

tunjukkan bahwa

$$A(BC) = (AB)C.$$

Solusi 5.2.9.

$$\begin{aligned}(A(BC)) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}, \\ (AB)C &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Jelaslah $A(BC) = (AB)C$. Hal ini adalah salah satu sifat penting dalam aljabar matriks.

Hukum Distributif Perkalian Matriks

Jika A, B dan C adalah tiga buah matriks sehingga $B+C$ dan perkalian AB dan BC terdefinisi maka

$$A(B+C) = AB + BC. \tag{5.14}$$

Untuk membuktikan ini, misalkan

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad B = (b_{ij})_{n\times p}, \quad C = (c_{ij})_{n\times p} \tag{5.15}$$

sehingga penjumlahan $B+C$ dan perkalian AB dan AC terdefinisi. Elemen ke$-ij$ ruas kiri (5.14) adalah

$$\begin{aligned}(A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj}+C_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}).\end{aligned}$$

Elemen ke$-ij$ ruas kanan (5.14) adalah

$$\begin{aligned}(AB+AC)_{ij} &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(B)_{kj} + \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik}(C)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}).\end{aligned}$$

Sehingga (5.14) terbukti.

Contoh 5.2.10. Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},$$

tunjukkan bahwa

$$C(A+B) = CA + CB.$$

Solusi 5.2.10.

$$\begin{aligned}C(A+B) &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 21 & 13 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$CA + CB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 10 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 11 & 11 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 21 & 13 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sehingga $C(A + B) = CA + CB$.

5.2.4 Determinan Perkalian Matriks

Dalam bab tentang determinan, kita telah mempelajari nilai determinan perkalian dua buah matriks sama dengan perkalian dua buah determinan. Sehingga, jika A dan B merupakan matriks persegi dengan orde sama, maka

$$|AB| = |A||B|.$$

Hubungan ini menarik. Kita bisa membuktikan dengan sifat perkalian matriks. Kita akan menggunakan matriks 2×2 untuk mengilustrasikan langkah pembuktian, tetapi jelas bahwa proses ini berlaku untuk semua orde.

1. Jika D adalah sebuah matriks diagonal, mudah dibuktikan bahwa $|DA| = |D||A|$. Sebagai contoh, jika $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$, maka

$$DA = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}a_{11} & d_{11}a_{12} \\ d_{22}a_{21} & d_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{vmatrix} = d_{11}d_{22}$$

$$|DA| = \begin{vmatrix} d_{11}a_{11} & d_{11}a_{12} \\ d_{22}a_{21} & d_{22}a_{22} \end{vmatrix} = d_{11}d_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |D||A|.$$

2. Matriks persegi sebarang bisa didiagonalkan dengan beberapa operasi yang menjumlahkan sejumlah baris ke baris lain.

   Sebagai contoh, misalkan $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Kalikan baris 1 dengan -3 dan jumlahkan pada baris 3 matriksnya menjadi $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Jumlahkan baris 2 ke baris 1 kita mempunyai matriks diagonal $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Tiap operasi baris ekivalen dengan mengalikan matriks dengan matriks elementer yang diperoleh dengan melakukan operasi yang sama dengan matriks identitas. Sebagai contoh kita kalikan baris 1 dengan -3 pada $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kita peroleh matriks elementer $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Kalikan matriks ini dari kiri B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} (B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

kita memperoleh hasil yang sama dengan operasi langsung pada B. Matriks elementer yang diperoleh dengan menambahkan baris dua dengan baris satu adalah $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Kalikan matriks ini dari kiri pada $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, kita memperoleh matriks diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Kombinasikan persamaan terakhir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Misalkan

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

kita bisa menuliskan persamaannya sebagai

$$EB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = D.$$

Persamaan ini mengatakan bahwa matriks B didiagonalkan oleh matriks E yang merupakan hasil perkalian beberapa matriks elementer.

5. Karena cara pembuatan matriks E, mengalikan E dari kiri matriks M sebarang ekivalen dengan penjumlahan berulang sebuah baris ke baris lain dari M. Dari teori determinan, kita tahu operasi ini tidak mengubah nilai determinan. Sebagai contoh

$$|EB| = |D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

Sehingga determinan matriks yang terdiagonalkan D, sama dengan diagonal matriks asalnya B,

$$|D| = |B|.$$

Di sini M bisa berupa matiks sebarang yang kompatibel

$$|EM| = |M|.$$

6. Sekarang misalkan $M = BA$

$$|E(BA)| = |BA|.$$

Tetapi

$$|E(BA)| = |(EB)A| = |DA| = |D||A|,$$

karena D matriks diagonal. Di lain pihak $|D| = |B|$, maka

$$|BA| = |B||A|.$$

Karena $|B||A| = |A||B|$, diperoleh $|BA| = |AB|$, meskipun AB tidak sama dengan BA.

5.2.5 Komutator

Selisih hasil perkalian AB dengan BA dikenal sebagai komutator

$$[A, B] = AB - BA.$$

Kasus khusus ketika $AB = BA$, maka

$$[A, B] = 0,$$

maka matriks A dan B dikatakan saling komut.

Dari definisi kita bisa memperoleh

- $[A, A] = 0$
- $[A, I] = [I, A] = 0$
- $[A, B] = -[B, A]$
- $[A, (B + C)] = [A, B] + [A, C]$
- $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

Contoh 5.2.11. Misalkan

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

yang dikenal sebagai matriks Pauli. Buktikan bahwa

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2\mathrm{i}\sigma_z, \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2\mathrm{i}\sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2\mathrm{i}\sigma_y.$$

Solusi 5.2.11.

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_y\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$[\sigma_x, \sigma_y] = \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2\mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\mathrm{i}\sigma_z.$$

Dengan cara yang sama $[\sigma_y, \sigma_z] = 2\mathrm{i}\sigma_x$ dan $[\sigma_z, \sigma_x] = 2\mathrm{i}\sigma_y$.

Contoh 5.2.12. Buktikan jika sebuah matriks B komut dengan matriks diagonal tanpa dua buah elemen yang sama, maka B haruslah sebuah matriks diagonal.

Solusi 5.2.12. Untuk membuktikan ini, misalkan B komut dengan matriks diagonal A berorde n yang elemennya

$$\begin{aligned} (A)_{ij} &= a_i\delta_{ij}, \\ a_i &\neq a_j \quad \text{jika} \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Kita diberikan

$$AB = BA.$$

Misalkan elemen B adalah b_{ij}, kita akan menunjukkan bahwa $b_{ij} = 0$ kecuali $i = j$. Elemen ke$-ij$ dua buah ruas adalah

$$\sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}(B)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (B)_{ik}(A)_{kj}.$$

Dengan (5.16), hal ini menjadi

$$\sum_{k=1}^{n} a_i\delta ikb_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_k\delta_{kj},$$

dengan definisi fungsi delta

$$a_ib_{ij} = b_{ij}a_j.$$

Hal ini menunjukkan

$$(a_i - a_j)b_{ij} = 0.$$

Sehingga b_{ij} haruslah nol untuk $i \neq j$, karena untuk kasus ini $a_i \neq a_j$. Elemen tak nol B hanyalah elemen diagonal b_{ii}, membuktikan bahwa B adalah matriks diagonal.

5.3 Sistem Persamaan Linier

Metode aljabar matriks sangat berguna dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Misalkan $x_1,\ x_2, ..., x_n$ adalah n himpunan variabel yang tidak diketahui. Sebuah persamaan yang terdiri dari x_i derajat pertama dan tanpa adanya perkalian dari dua variabel atau lebih disebut sebagai persamaan linier. Sistem paling umum dari m persamaan linier dalam n variabel tak diketahui bisa dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= d_m. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Di sini koefisien a_{ij} dan suku ruas kanan d_i dianggap sebagai konstanta yang diketahui.

Kita bisa menganggap variabel $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ sebagai komponen vektor kolom $\mathbf{x}$ berorde $n \times 1$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

dan konstanta $d_1,\ d_2, \ldots, d_n$ sebagai komponen vektor kolom $\mathbf{d}$ berorde $m \times 1$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}.$$

Koefisien a_{ij} adalah matriks A berorde $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dengan perkalian matriks yang didefinisikan pada Subbab 5.2, maka (5.17) bisa ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}.$$

Jika semua komponen d sama dengan nol, sistem dikatakan homogen. Jika paling tidak terdapat satu komponen d yang tidak nol, sistemnya dikatakan tak homogen. Jika sistem persamaan linier sedemikian rupa sehingga semua persamaannya terpenuhi simultan dengan paling tidak satu himpunan nilai x_i, maka dikatakan konsisten. Sistem dikatakan inkonsisten jika sistemnya tidak terpenuhi secara simultan oleh himpunan nilai sebarang. Sebuah sistem konsisten mungkin memiliki solusi unik, atau sebuah solusi tak hingga jumlahnya. Kita akan membicarakannya secara praktis bagaimana mencari solusi tersebut, sekaligus menjawab pertanyaan tentang keberadaan dan juga keunikan solusinya.

5.3.1 Metode Eliminasi Gauss

Dua buah sistem linier ekivalen jika tiap solusi kedua sistem merupakan solusi sistem yang lain. Terdapat tiga operasi dasar yang mentransformasikan sebuah sistem linier menjadi sistem liner lain yang ekivalen:

1. Menukar dua buah persamaan.
2. Mengalikan sebuah persamaan dengan suatu bilangan tak nol.
3. Menambahkan pada sebuah persamaan sebuah perkalian dari persamaan lain.

Operasi pertama cukup jelas yaitu mentransformasikan sebuah sistem menjadi sistem lain yang ekivalen. Alasan operasi kedua dan ketiga memiliki efek yang sama adalah ketika operasi yang sama dilakukan pada kedua ruas dengan tanda yang sama, persamaan harus tetap berlaku. Sebenarnya, hal ini adalah teknik yang kita pelajari dalam aljabar elementer untuk menyelesaikan himpunan persamaan simultan. Tujuannya adalah untuk mentransformasikan himpunan persamaan menjadi bentuk sederhana sehingga solusinya jelas. Prosedur praktisnya diberikan oleh pengamatan bahwa sebuah sistem linier, yang matriks koefisiennya bisa berupa matriks segitiga atas atau matriks diagonal, mudah untuk diselesaikan.

Sebagai contoh

$$\begin{aligned} -2x_2 + x_3 &= 8, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2, \end{aligned} \tag{5.18}$$

bisa dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dengan menukar persamaan 1 dan 3, sistem menjadi

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= -3, \\ -2x_2 + x_3 &= 8, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

di sini kita telah meletakkan persamaan matriks yang merepresentasikan sistem di sebelah kanan. Kalikan persamaan 1 dengan sistem yang ditata ulang dengan -2 dan tambahkan pada persamaan 2, kita memiliki

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -2, \\ x_2 + 2x_3 &= 1, \\ -2x_2 + x_3 &= 8, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Kalikan persamaan 2 sistem ini dengan 2 dan tambahkan pada persamaan 3

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -2, \\ x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 5x_3 &= 10, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Empat buah sistem persamaan ini ekivalen karena semuanya memiliki solusi yang sama. Dari himpunan persamaan terakhir, jelaslah bahwa $x_3 = 2, x_2 = 1 - 2x_3 = -3$ dan $x_1 = -2 + x_2 - x_3 = 7$.

Prosedur ini dikenal sebagai metode eliminasi Gauss, metode barisan atau segitiga.

Matriks Tambahan

Untuk menyederhanakan penulisan, kita perkenalkan matriks tambahan[2]. Matriks terdiri dari matriks koefisien ditambah dengan kolom tambahan yang elemennya adalah konstanta tak homogen d_i disebut sebagai matriks tambahan dari sistem. Maka

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & d_m \end{array}\right)$$

[2] *augmented matrix*

merupakan matriks tambahan dari (5.17). Bagian di depan garis vertikal adalah matriks koefisien. Matriks keseluruhan, tanpa menganggap garis vertikal, adalah matriks tambahan sistem. Jelaslah matriks tambahan hanyalah pernyataan ringkas sistem linier.

Di sini kita bisa langsung melakukan operasi pada matriks tambahan, bukan pada sistem persamaan, dengan tiga buah operasi baris yang terdiri dari

1. Menukar dua buah baris.
2. Mengalikan sebarang baris dengan skalar tak nol.
3. Menambahkan sebuah perkalian baris ke baris lain.

Sehingga kita bisa meringkas metode eliminasi Gauss seperti menggunakan operasi baris dasar untuk mengurangi matriks tambahan m sistem asalnya menjadi bentuk barisan. Sebuah matriks berbentuk barisan jika:

1. Elemen pertama pada baris pertama tak nol.
2. Elemen $(n-1)$ pertama dari baris ke n adalah nol, elemen sisanya bisa nol atau tidak nol.
3. Elemen tak nol pertama dari baris sebarang muncul di sebelah kanan dari elemen tak nol pertama di baris atas..
4. Sebagai konsekuensi, jika terdapat baris yang semua elemennya nol, maka letaknya berada di dasar matriks.

Sehingga kita bisa menyelesaikan sistem linier (5.18) pada contoh di atas dengan mereduksi matriks tambahan dari

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

ke dalam bentuk barisan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

sehingga solusinya mudah diperoleh.

Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Untuk himpunan persamaan linier yang besar, kadang lebih menguntungkan untuk melanjutkan proses untuk mereduksi matriks koefisien dari bentuk segitiga menjadi bentuk diagonal. Sebagai contoh, jika kita kalikan baris ketiga dari matriks terakhir dengan 1/5

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right). \tag{5.20}$$

Kalikan baris 3 dengan -2 dan tambahkan pada baris 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 3 dengan -1 dan tambahkan pada baris 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Tambahkan baris 2 ke baris 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

sehingga $x_1 = 7$, $x_2 = -3$ dan $x_3 = 2$. Proses ini dikenal sebagai metode eliminasi Gauss-Jordan.

5.3.2 Eksistensi dan Keunikan Solusi Sistem Linier

Untuk sebuah sistem linier dengan m persamaan dan n tak diketahui, orde matriks koefisiennya adalah $m \times n$ dan matriks tambahannya $m \times (n+1)$. Jika $m < n$, sistemnya *underdetermined*. Jika $m > n$ sistemnya *overdetermined*. Kasus paling menarik adalah $m = n$. Dalam tiga buah kasus, kita bisa menggunakan metode eliminasi Gauss untuk mereduksi matriks tambahan menjadi bentuk barisan. Ketika berada pada bentuk barisan, persoalan bisa terselesaikan, bisa juga terlihat tidak konsisten. Beberapa contoh berikut akan membuat hal ini menjadi jelas.

Contoh 5.3.1. Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Solusi 5.3.1. Matriks tambahannya adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 1 dengan -2 dan tambahkan pada baris 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 1 dengan -3 dan tambahkan pada baris 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 2 dengan $-1/3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 2 dengan 4 dan tambahkan pada baris 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Hal ini merepresentasikan sistem persamaan

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ x_2 - x_3 &= 1, \\ 0 &= 2. \end{aligned}$$

Karena tidak terdapat x_1, x_2 maupun x_3 yang membuat $0 = 2$ maka sistemnya tidak konsisten dan tidak memiliki solusi.

Contoh 5.3.2. Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - 8x_3 &= 7, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= 17. \end{aligned}$$

Solusi 5.3.2. Matriks tambahannya adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & -3 & 17 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 1 dengan -3 dan tambahkan pada baris 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -11 & -11 \\ 4 & 5 & -3 & 17 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 1 dengan -4 dan tambahkan pada baris 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -11 & -11 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 2 dengan $-1/11$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 2 dengan 7 dan tambahkan pada baris 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Hal ini merepresentasikan sistem persamaan:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6, \\ x_2 + x_3 &= 1, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Diperoleh $x_2 = 1 - x_3$ dan $x_1 = 6 - 3x_2 - x_3 = 3 + 2x_3$. Nilai x_3 bisa dipilih sebarang, sehingga sistem memiliki solusi yang jumlahnya tak hingga.

Contoh 5.3.3. Selesaikan sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

Solusi 5.3.3. Matriks tambahannya adalah

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 1 dengan -1 dan tambahkan pada baris 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Kalikan baris 1 dengan -1 dan tambahkan pada baris 3:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Tambahkan baris 2 ke baris 3

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Matriks tambahan terakhir mengatakan

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ x_2 &= 1, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

jelaslah $x_2 = 1$ dan $x_1 = 1$. Sehingga sistem ini memiliki solusi unik.

Untuk menjawab pertanyaan eksistensi dan keunikan solusi sistem linier, maka kita akan memperkenalkan konsep tentang rank matriks.

Rank Matriks

Terdapat beberapa definisi yang ekivalen untuk rank matriks. Untuk tujuan kita, yang paling sesuai untuk mendefinsikan rank matriks sebagai jumlah baris tak nol dalam matriks setelah ditransformasikan ke dalam bentuk barisan dengan operasi baris dasar.

Di dalam Contoh 5.3.1, bentuk barisan matriks koefisien C_e dan matriks tambahan A_e adalah

$$C_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Di dalam C_e, terdapat dua buah baris tak nol, sehingga rank matriks koefisien adalah 2. Dalam A_e, terdapat tiga buah baris tak nol, sehingga rank matriks tambahan adalah 3. Seperti yang sudah kita tunjukkan, sistem ini tidak memiliki solusi.

Di dalam Contoh 5.3.2, bentuk dua buah matriks barisnyanya adalah

$$C_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Keduanya hanya memiliki dua buah baris tak nol. Sehingga rank matriks koefisien sama dengan rank matriks tambahan. rank keduanya sama dengan 2. Seperti yang sudah kita lihat, sistem ini memiliki solusi yang tak hingga.

Di dalam Contoh 5.3.3, bentuk dua buah matriks barisnyanya adalah

$$C_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

kedua matriks ini memiliki dua baris tak nol, sehingga rank matriks koefisien dan matriks tambahan adalah 2. Seperti yang sudah kita tunjukkan, sistem ini memiliki solusi unik.

Dari hasil pada contoh di atas, kita bisa membuat pengamatan sebagai berikut:

1. Sebuah sistem linier dengan m persamaan dan n tak diketahui memiliki solusi jika dan hanya jika matriks koefisien dan matriks tambahan memiliki rank yang sama.

2. Jika rank dua buah matriks adalah r dan $r < n$, sistem memiliki solusi tak hingga.

3. Jika $r = n$, sistem hanya memiliki satu buah solusi.

Pernyataan ini secara umum berlaku untuk semua sistem linier tanpa memperhatikan apakah $m < n$, $m = n$ atau $m > n$.

Kasus paling menarik adalah ketika $m = n = r$. Pada kasus ini, matriks koefisien adalah matriks persegi. Solusi sistem seperti ini bisa dieproleh dari (1) aturan Cramer yang dibahas dalam bab determinan, (2) metode eliminasi Gauss yang dibicarakan dalam subbab ini, dan (3) invers matriks yang akan kita bicarakan pada Subbab 5.4.

5.4 Invers Matriks

5.4.1 Matriks Tak Singular

Sebuah matriks A dikatakan tak singular jika terdapat sebuah matriks B sedemikian rupa sehingga

$$BA = I,$$

dengan I berupa matriks identitas (satuan). Jika matriks B tidak ada, maka A dikatakan matriks singular. Matriks B adalah invers dari A begitu juga sebaliknya. Matriks invers dinyatakan dengan A^{-1}

$$A^{-1} = B.$$

Hubungan ini timbal balik. Jika B adalah invers dari A, maka A adalah invers dari B. Karena

$$BA = A^{-1}A = I, \tag{5.21}$$

kalikan dengan B^{-1} dari kiri

$$B^{-1}BA = B^{-1}I.$$

Kita peroleh

$$A = B^{-1}. \tag{5.22}$$

Eksistensi

Jika A matriks tak singular, maka determinan $|A| \neq 0$.
Bukti. Jika A matriks tak singular, maka A^{-1} ada dan $AA^{-1} = I$. Sehingga

$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = I.$$

Karena $|I| = 1$, maka $|A|$ maupun $|A^{-1}|$ tidak boleh nol.

Jika $|A| \neq 0$, kita akan membuktikan bahwa A^{-1} selalu bisa dicari.

Keunikan

Invers sebuah matriks, jika ada, adalah unik. Yaitu, jika

$$AB = I,$$
$$AC = I,$$

maka

$$B = C.$$

Hal ini bisa dilihat sebagai berikut. Karena $AC = I$, dengan definisi $C = A^{-1}$. Diperoleh

$$CA = AC = I.$$

Kalikan persaman ini dari kanan dengan B, kita peroleh

$$(CA)B = IB = B.$$

Tetapi

$$(CA)B = C(AB) = CI = C.$$

Jelas dari dua persamaan terakhir bahwa $B = C$.

Invers Perkalian Matriks

Invers perkalian beberapa matriks, tanpa matriks singular, sama dengan perkalian invers dilakukan secara terbalik.

Bukti. Perhatikan tiga buah matriks tak singular A, B, C. Kita akan membuktikan

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

Dengan definisi

$$ABC(ABC)^{-1} = I.$$

Sekarang

$$\begin{aligned} ABC(C^{-1}B^{-1}A^{-1}) &= AB(CC^{-1})B^{-1}A^{-1} \\ &= ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I. \end{aligned}$$

Karena invres unik, maka

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

5.4.2 Invers Matriks dengan Aturan Cramer

Untuk mencari A^{-1}, marilah kita perhatikan himpuan persamaan linier tak homogen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

dituliskan sebagai

$$(A)(x) = (d). \tag{5.24}$$

Menurut aturan Cramer yang dibahas pada bab determinan

$$x_i = \frac{N_i}{|A|},$$

dengan $|A|$ adalah determinan A dan N_i adalah determinan

$$N_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1_i 1} & d_1 & a_{1_i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2_i 1} & d_2 & a_{2_i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n_i 1} & d_n & a_{n_i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ekspansikan N_i pada kolom ke$-i$, kita mempunyai

$$x_i = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} d_j C_{ji}, \tag{5.25}$$

dengan C_{ji} adalah kofaktor baris ke$-j$ dan kolom ke$-i$ dari A.

Sekarang jika $A^{-1} = B$, yaitu

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kalikan A^{-1} pada (5.24) dari kiri

$$(A^{-1})(A)(x) = (A^{-1})(d)$$

sehingga

$$(x) = (A^{-1})(d),$$

atau

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} d_j. \tag{5.26}$$

Bandingkan (5.25) dan (5.26), jelaslah

$$b_{ij} = \frac{1}{|A|} C_{ji} = \frac{1}{|A|} \widetilde{C}_{ij}.$$

Sehingga proses memperoleh invers matriks tak singular terdiri dari langkah berikut:

1. Dapatkan kofaktor untuk setiap elemen matriks A dan tuliskan matriks kofaktor dalam bentuk

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Transposkan kofaktor tersebut untuk memperoleh

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Kalikan dengan $1/\det A$ untuk memeperoleh inversnya

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Contoh 5.4.1. Carilah invers matriks berikut dengan aturan Cramer

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 15 & -6 & 5 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solusi 5.4.1. Sembilan buah kofaktor A adalah

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} -15 & 5 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 5, \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 15 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -6 \end{vmatrix} = 3.$$

Nilai determinan A bisa diperoleh dari ekspansi Laplace pada baris dan kolom sebarang. Sebagai contoh, terhadap kolom pertama

$$|A| = -3C_{11} + 15C_{21} - 5C_{31} = -6 + 0 + 5 = -1.$$

Sehingga inversnya ada. Matriks kofaktor C-nya adalah

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inversnya bisa diperoleh dengan mentransposkan C dan membagi dengan $\det A$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{C} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{5.27}$$

Dapat dengan mudah diverifikasi bahwa

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 15 & -6 & 5 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalam literatur, transpos matriks kofaktor A kadang dituliskan sebagai adjoin A, yaitu adj$A = \widetilde{A}$. Tetapi nama adjoin memiliki arti yang berbeda, terutama dalam mekanika kuantum. Biasanya didefinisikan sebagai konjugat Hermitian, $A^\dagger$, yakni adj$A = A^\dagger$.

Untuk matriks yang besar, terdapat cara yang lebih efisien untuk mencari invers matriks. Tetapi untuk matriks 2×2 tak singular

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dengan metode yang kita pelajari ini, kita peroleh

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Hasil ini sederhana, sangat berguna untuk diingat.

Contoh 5.4.2. Carilah invers matriks berikut

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Solusi 5.4.2.

$$A^{-1} = \frac{1}{(4-6)} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$R^{-1} = \frac{1}{cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Mudah untuk diperiksa bahwa

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.4.3 Invers Matriks Elementer

Matriks Elementer

Sebuah matriks elementer adalah matriks yang bisa diperoleh dari matriks identitas I dengan sebuah operasi elementer. Sebagai contoh, matriks elementer E_1 diperoleh dengan menukar baris 1 dan baris 2 dari matriks identitas orde 3 adalah

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Di sisi lain, operasi baris elementer dengan menukar baris 1 dan baris 2 sebuah matriks A sebarang dengan orde $3 \times n$ bisa dilakukan dengan mengalikan A dengan matriks elementer E_1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Operasi elementer kedua, yaitu mengalikan sebuah baris, katakanlah baris 2, dengan sebuah skalar k bisa dilakukan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Terakhir, untuk menambahkan baris ketiga k dikalikan baris kedua, kita bisa melakukannya sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Sehingga, untuk memperoleh efek operasi elementer pada matriks A, kita perlu melakukan operasi elementer pada matriks identitas untuk memperoleh matriks elementer yang diperlukan. Kemudian kalikan A dengan matriks elementer.

Invers Matriks Elementer

Karena matriks elementer diperoleh dari operasi elementer pada matriks identitas, inversnya secara sederhana merepresentasikan operasi sebaliknya. Sebagai contoh E_1 diperoleh dengan menukar baris 1 dan baris 2 dari matriks identitas I

$$E_1 I = E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Karena

$$E_1^{-1} E_1 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

E_1^{-1} merepresentasikan penukaran baris 1 dan baris 2 dari E_1. Sehingga E_1^{-1} juga diberikan oleh

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1.$$

Invers dua buah matriks elementer lainnya bisa diperoleh dengan cara yang sama, yaitu

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dapat juga mudah ditunjukkan dari operasi elementer berulang

$$E_4 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

dan

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n & -m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.4.4 Invers Matriks dengan Eliminasi Gauss-Jordan

Untuk sebuah matriks yang ordenya besar, aturan Cramer sulit digunakan. Salah satu yang paling sering digunakan untuk mencari invers matriks besar adalah metode Gauss-Jordan.

Persamaan (5.23) bisa dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

atau secara simbolik sebagai

$$(A)(x) = (I)(d). \tag{5.29}$$

Jika kedua ruas persamaan ini dilakukan operasi yang sama, persamaannya akan tetap berlaku. Kita akan mengoperasikannya dengan prosedur Gauss-Jordan. Tiap langkah berupa operasi baris elementer yang bisa dianggap sebagai perkalian dari kiri kedua ruas dengan matriks elementer yang merepresentasikan operasi tersebut. Sehingga proses Gauss-Jordan keseluruhan ekivalen dengan mengalikan (5.29) dengan sebuah matriks B yang merupakan perkalian semua matriks elementer yang merepresentasikan langkah prosedur Gauss-Jordan

$$(B)(A)(x) = (B)(I)(d). \tag{5.30}$$

Karena proses ini mereduksi matriks koefisien A menjadi matriks identitas I, maka

$$BA = I.$$

Kalikan kedua ruas dengan A^{-1} dari kanan

$$BAA^{-1} = IA^{-1},$$

kita mempunyai

$$B = A^{-1}.$$

Sehingga ketika ruas kiri (5.30) menjadi matriks satuan dikalikan matriks kolom x, ruas kanan persamaan harus sama dengan matriks inversnya dikalikan d.

Sehingga jika kita ingin mencari invers dari A, pertama kita bisa menambah A dengan matriks identitas I, kemudian gunakan operasi elementer untuk mentransformasikan matriks ini. Ketika sub matriks A berbentuk I, bentuk yang diasumsikan matriks identitas awal haruslah A^{-1}.

Kita telah memperoleh invers

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 15 & -6 & 5 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

pada Contoh 5.4.1 dengan aturan Cramer. Sekarang marilah kita kerjakan soal yang sama dengan eliminasi Gauss-Jordan. Pertama kita tambah matriksnya dengan matriks identitas I

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 15 & -6 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bagi baris pertama dengan -3, baris kedua dengan 15 dan baris ketiga dengan -5

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{6}{15} & \frac{5}{15} & | & 0 & \frac{1}{15} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & | & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

biarkan baris pertama seperti itu, kurangkan baris pertama dengan baris kedua, letakkan pada baris kedua, dan kurangkan baris pertama dengan baris ketiga, letakkan pada baris ketiga

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{15} & 0 & | & \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} & | & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

kalikan baris kedua dan ketiga dengan -15

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

biarkan baris kedua seperti adanya, kurangkan dengan baris ketiga dan letakkan hasilnya pada baris ketiga, kemudian tambahkan 1/3 pada baris kedua dan letakkan pada baris pertama

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & | & -2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kalikan baris ketiga dengan -1 dan kurangkan 1/3 dari baris pertama

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Terakhir kita telah mengubah matriks A menjadi matriks satuan I, matriks satuan awalnya pada ruas kanan tentu telah berubah menjadi $A{-}1$, maka

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

yang sama dengan (5.27) yang diperoleh pada Subbab 5.3.

Cara ini yang digunakan dalam komputer untuk perhitungan numerik. Kode komputer untuk metode eliminasi Gauss-Jordan bisa dilihat pada W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes*,2nd edn. (Cambridge University Press, Cambridge 1992).

5.5 Latihan

1. Diberikan dua buah matriks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   hitunglah $B - 5A$.
   Jawab:

$$\begin{pmatrix} -8 & -25 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Jika A dan B matriks 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

   carilah AB dan BA.
   Jawab: $AB = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ dan $BA = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ 2 & 18 \end{pmatrix}$.

3. Jika

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

carilah AB dan BA jika ada.

Jawab: $AB = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ dan $BA = \begin{pmatrix} 14 & 9 & 0 \\ 12 & -7 & 10 \\ -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Jika

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

carilah AB dan BA jika ada.

Jawab: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 10 \\ 1 & -7 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ dan BA tidak ada.

5. Diberikan dua buah matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

buktikan hukum asosiatif dengan menunjukkan bahwa

$$(AB)C = A(BC).$$

6. Tunjukkan jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

maka

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Petunjuk: $A^n = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^n$.

7. Diberikan

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Carilah semua perkalian dua buah matriks yang mungkin dari A, B, C dan I termasuk kuadrat.

(Perhatikan bahwa perkalian dua matriks sebarang adalah matriks lain dalam grup ini. Empat buah matriks membentuk sebuah grup matematik yang dikenal sebagai viergruppe (vier adalah bahasa Jerman untuk empat).)

8. Jika
$$A = \begin{pmatrix} ab & b^2 \\ -a^2 & -ab \end{pmatrix}$$
buktikan bahwa $A^2 = 0$.

9. Carilah nilai dari
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Jawab: 8.

10. Tunjukkan secara eksplisit $(AB)^{\mathrm{T}} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ jika
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Tunjukkan bahwa matriks A simetrik jika
$$A = B\widetilde{B}.$$
Petunjuk: $a_{ij} = \sum_k b_{ik}\widetilde{b}_{kj}$.

12. Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$, carilah matriks E sehingga A diagonal dan $|EA| = |A|$.
Jawab: $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

13. Misalkan
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
tunjukkan secara eksplisit bahwa
$$AB \neq BA \quad \text{tetapi} \quad |AB| = |BA|.$$

14. Tunjukkan jika
$$[A, B] \neq 0,$$
maka
$$(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2,$$
$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

15. Tunjukkan bahwa
$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

16. Buktikan bahwa
$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$
Petunjuk: $AA^{-1} = I$, $|AB| = |A||B|$.

17. Misalkan
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$
carilah A^{-1}, B^{-1} dan $(AB)^{-1}$ dengan aturan Cramer dan buktikan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

18. Reduksi matriks tambahan sistem berikut menjadi bentuk barisan dan tunjukkan sistemnya tidak memiliki solusi
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 7. \end{aligned}$$
Jawab: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$.

19. Selesaikan sistem persamaan berikut dengan eliminasi Gauss
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 10, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$
Jawab: $x_3 = -1$, $x_2 = -3$, $x_1 = 2$.

20. Misalkan
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
carilah A^{-1} dengan eliminasi Gauss-Jordan. Carilah x_1, x_2, x_3 dari
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$
dan tunjukkan bahwa
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

21. Tentukan rank matriks berikut

$$\text{(a)}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 12 & -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 12 & -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Jawab: (a) 2, (b) 2.

22. Tentukan apakah sistem berikut konsisten. Jika konsisten apakah solusinya unik

(a)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= -5, \\ -x_1 + 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Jawab: (a) Solusi unik, (b) solusi tak hingga.

23. Tentukan λ sehingga sistem linier berikut memiliki solusi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda. \end{aligned}$$

Jawab: $\lambda = 0.5$.

24. Misalkan

$$L^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\text{null}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Buktikan bahwa

$$\begin{aligned} L^+|-1\rangle &= |0\rangle, \quad L^+|0\rangle = |1\rangle, \quad L^+|1\rangle = |\text{null}\rangle, \\ L^-|1\rangle &= |0\rangle, \quad L^-|0\rangle = |-1\rangle, \quad L^-|-1\rangle = |\text{null}\rangle. \end{aligned}$$

6

Nilai Eigen Matriks

Diberikan sebuah matriks A, untuk menentukan sebuah skalar λ dan matriks kolom tak nol $\mathbf{x}$ yang secara simultan memenuhi persamaan

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{6.1}$$

disebut sebagai persamaan nilai eigen (eigen dalam bahasa Jerman yang berarti *proper*-Inggris atau sebenarnya). Solusi dari persamaan ini berkaitan erat dengan pertanyaan apakah matriks tersebut bisa ditransformasikan dalam bentuk diagonal.

Persamaan nilai eigen banyak sekali dijumpai dalam aplikasi di bidang teknik seperti vibrasi mekanik, arus bolak-balik, dan dinamika benda tegar. Hal ini juga sangat penting dalam fisika modern. Semua struktur dalam mekanika kuantum berdasarkan pada diagonalisasi dari beberapa jenis matriks.

6.1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

6.1.1 Persamaan Sekular

Dalam persamaan nilai eigen, nilai λ disebut sebagai nilai eigen (nilai karakteristik) dan matriks kolom $\mathbf{x}$ yang berkaitan dengan ini disebut sebagai vektor eigen (vektor karakteristik). Jika A adalah matriks $n \times n$ (6.1) diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Karena

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda I \mathbf{x},$$

dengan I adalah matriks satuan, kita bisa menuliskan (6.1) sebagai

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0. \tag{6.2}$$

Persamaan ini memiliki solusi nontrivial jika dan hanya jika determinan dari matriks koefisien hilang (bernilai nol):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6.3}$$

Ekspansi dari determinan ini menghasilkan polinomial λ berderajat n, yang disebut sebagai polinomial karakteristik $P(\lambda)$. Persamaan

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \tag{6.4}$$

disebut sebagai persamaan karakteristik (persamaan sekular). Akar-akarnya sejumlah n adalah nilai eigen dan akan dinyatakan dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Nilainya bisa berupa bilangan riil dan juga kompleks. Ketika salah satu nilai eigen dimasukkan ulang pada (6.2), vektor eigen $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bisa dicari. Perhatikan bahwa vektor eigen bisa dikalikan dengan konstanta dan akan tetap menjadi solusi dari persamaan.

Kita akan menuliskan $\mathbf{x}_i$ sebagai vektor eigen untuk nilai eigen λ_i. Yaitu, jika

$$P(\lambda_i) = 0,$$

maka

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i.$$

Jika nilai eigen yang berjumlah n semuanya berbeda, maka kita akan memiliki n vektor eigen yang berbeda. Jika dua atau lebih nilai eigen sama, kita menyebutnya berdegenerasi. Dalam persoalan yang sama, sebuah nilai eigen yang berdegenerasi bisa memiliki satu buah vektor eigen. Di lain pihak, sebuah nilai eigen yang berdegenerasi juga bisa memiliki vektor eigen yang berbeda.

Contoh 6.1.1. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari A, jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solusi 6.1.1. Polinomial karakteristik dari A adalah

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3,$$

dan persamaan sekularnya

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Sehingga nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Jika kita pilih vektor eigen $\mathbf{x}_1$ berkaitan dengan nilai eigen $\lambda_1 = -1$ adalah $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{x}_1$ haruslah memenuhi:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = 0.$$

Sehingga bisa direduksi menjadi

$$2x_{11} + 2x_{12} = 0.$$

Sehingga vektor eigennya $x_{11} = -x_{12}$, yaitu $x_{11} : x_{12} = -1 : 1$. Sehingga vektor eigennya bisa dituliskan

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sebuah konstanta, baik positif atau negatif, yang dikalikan dengan vektor eigen ini akan tetap merupakan solusi, namun kita tidak akan menganggapnya sebagai vektor eigen yang berbeda. Dengan prosedur yang serupa, kita bisa menghitung vektor eigen untuk $\lambda_2 = 3$ yaitu

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Contoh 6.1.2. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari A, jika

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solusi 6.1.2. Polinomial karakteristik dari A adalah

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

dan persamaan sekularnya

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Nilai eigennya adalah

$$\lambda = 1 \pm \mathrm{i}.$$

Jika $\lambda_1 = 1 + \mathrm{i}$ dan vektor eigennya $\mathbf{x}_1$ adalah $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{x}_1$ harus memenuhi

$$\begin{pmatrix} 3-(1+\mathrm{i}) & -5 \\ 1 & -1-(1+\mathrm{i}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

yang memberikan

$$\begin{aligned} (2-\mathrm{i})x_{11} - 5x_{12} &= 0, \\ x_{11} - (2+\mathrm{i})x_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Persamaan pertama memberikan

$$x_{11} = \frac{5}{2-\mathrm{i}}x_{12} = \frac{5(2+\mathrm{i})}{4+1}x_{12} = \frac{2+\mathrm{i}}{1}x_{12},$$

hasil yang sama juga dibisakan dari persamaan kedua. Sehingga $\mathbf{x}_1$ bisa ditulis sebagai

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan cara yang sama, untuk $\lambda = \lambda_2 = 1 - \mathrm{i}$ vektor eigen $\mathbf{x}_2$ diberikan oleh

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga kita telah memiliki sebuah contoh untuk matriks riil dengan nilai eigen dan vektor eigen kompleks.

Contoh 6.1.3. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari A, jika

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solusi 6.1.3. Polinomial karakteristik dari A adalah

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda & -6 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45,$$

dan persamaan sekularnya

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45 = (\lambda - 5)(\lambda + 3)^2 = 0.$$

Persamaan ini memiliki sebuah akar 5 dan dua akar yang sama -3

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -3.$$

Vektor eigen yang dimiliki oleh nilai eigen λ_1 haruslah memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} -2-5 & 2 & -3 \\ 2 & 1-5 & -6 \\ -1 & -2 & 0-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan metode eliminasi Gauss, persamaan ini bisa dituliskan

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0,$$

yang berarti

$$\begin{aligned} -7x_{11} + 2x_{12} - 3x_{13} &= 0, \\ x_{12} + 2x_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Dengan memilih $x_{13} = 1$ maka $x_{12} = -2$ dan $x_{11} = -1$. Sehingga untuk nilai eigen $\lambda_1 = 5$, vektor eigennya $\mathbf{x}_1$ adalah

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Karena nilai eigen -3 berdegenerasi sebanyak 2, maka vektor eigen yang kita punyai bisa atau dua buah. Marilah kita nyatakan vektor eigennya sebagai $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Vektor eigen ini haruslah memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} -2+3 & 2 & -3 \\ 2 & 1+3 & -6 \\ -1 & -2 & 0+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan metode eliminasi Gauss, persamaan ini bisa dituliskan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

yang berarti

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0.$$

Kita bisa menyatakan x_1 dalam x_2 dan x_3 dan tidak terdapat batasan untuk x_2 dan x_3. Ambil $x_2 = c_2$ dan $x_3 = c_3$ sehingga $x_1 = -2c_2 + 3c_3$, sehingga kita bisa menuliskan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 + 3c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Karena c_2 dan c_3 sebarang, pertama kita bisa memilih $c_3 = 0$ dan memperoleh satu vektor eigen, kemudian yang kedua, kita memilih $c_2 = 0$ untuk memperoleh vektor eigen yang lain. Sehingga berkaitan dengan nilai eigen $\lambda = -3$ yang berdegenerasi ini, terdapat dua buah vektor eigen

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dalam contoh ini, kita hanya memiliki dua buah nilai eigen berbeda, tetapi kita tetap memiliki tiga buah vektor eigen yang berbeda.

Contoh 6.1.4. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari A, jika

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solusi 6.1.4. Polinomial karakteristik dari A adalah

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4,$$

dan persamaan sekularnya

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Tiga buah nilai eigennya

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Dari persamaan untuk vektor eigen $\mathbf{x}_1$ yang dimiliki oleh nilai eigen λ_1

$$\begin{pmatrix} 4-1 & 6 & 6 \\ 1 & 3-1 & 2 \\ -1 & -5 & -2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0,$$

kita memperoleh solusi

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Vektor eigen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ yang dimiliki oleh dua buah nilai eigen berdegenerasi, memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 6 & 6 \\ 1 & 3-2 & 2 \\ -1 & -5 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, kita bisa menunjukkan bahwa persamaan ini ekivalen dengan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

yang berarti

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Jika kita memilih $x_3 = -2$, maka $x_2 = 1$ dan $x_1 = 3$, sehingga

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dua buah persamaan di atas tidak mengijinkan adanya vektor eigen yang merupakan perkalian dengan sebuah konstanta dikalikan $\mathbf{x}_2$. Sehingga untuk matriks 3×3 ini, hanya terdapat dua buah vektor eigen yang berbeda.

6.1.2 Sifat-sifat dari Polinomial Karakteristik

Polinomial karakteristik memiliki banyak sifat yang berguna. Untuk mengelaborasinya, pertama kita perhatikan kasus $n = 3$.

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & -\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & -\lambda & 0 \\ a_{31} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & -\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= |A| + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) (-\lambda) \\
&\quad + (a_{11} + a_{22} + a_{33})(-\lambda)^2 + (-\lambda)^3. \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

Sekarang jika λ_1, λ_2 dan λ_3 adalah nilai eigen, maka $P(\lambda_1) = P(\lambda_2) = P(\lambda_3) = 0$. Karena $P(\lambda)$ adalah polinomial orde 3, maka

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = 0.$$

Dengan mengekspansikan polinomial karakteristik

$$P(\lambda) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)(-\lambda) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(-\lambda)^2 + (-\lambda)^3.$$

Bandingkan dengan (6.5)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{Tr } A.$$

Hal ini berarti jumlah nilai eigen sama dengan *trace* dari A. Hubungan ini sangat berguna untuk memeriksa apakah nilai eigen yang kita hitung benar. Selanjutnya

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

yang merupakan jumlah dari minor utama (*principal minor*) atau minor dari elemen diagonal, dan

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A|.$$

Hal ini berarti perkalian semua nilai eigen tidak lain adalah determinan dari A yang juga merupakan hubungan yang sangat berguna. Jika A adalah matriks singular $|A| = 0$, maka paling tidak salah satu nilai eigen adalah nol. Dari sini berarti jika matriks tersebut memiliki invers, maka tidak ada nilai eigen yang nol.

Perhitungan yang sama bisa digunakan untuk mengeneralisasi hubungan-hubungan ini untuk matriks dengan orde yang lebih tinggi.

Contoh 6.1.5. Carilah nilai eigen dan matriks eigen dari matriks A jika

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solusi 6.1.5.

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix} - \left(\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \right) \lambda + (5+4-3)\lambda^2 - \lambda^3 \\
&= 6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0.
\end{aligned}$$

Sehingga tiga buah nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Sebagai pemeriksaan, jumlah nilai eigen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 3 = 6,$$

yang sama dengan trace A

$$\mathrm{Tr}\, A = 5 + 4 - 3 = 6.$$

Selanjutnya hasil kali nilai eigen

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 6,$$

yang juga determinan dari A

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

Misalkan $\mathbf{x}_1$ adalah $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}$ vektor eigen berkaitan dengan nilai eigen λ_1 maka

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda_1 & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = 0.$$

Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, dengan mudah bisa ditunjukkan

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4.5 & -1.5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sehingga kita memiliki

$$\begin{aligned} 4x_{11} + 7x_{12} - 5x_{13} &= 0, \\ 3x_{12} - x_{13} &= 0. \end{aligned}$$

Hanya satu dari tiga buah bilangan yang tak diketahui bisa kita pilih sebarang. Sebagai contoh, pilih $x_{13} = 3$ maka $x_{12} = 1$ dan $x_{11} = 2$. Sehingga untuk nilai eigen $\lambda_1 = 1$, vektor eigennya

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dengan cara yang sama, untuk $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 3$, vektor eigen yang bersesuaian adalah

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{dan} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.1.3 Sifat-sifat Nilai Eigen

Terbisa beberapa sifat nilai eigen yang sangat berguna dalam aplikasi matriks. Sifat-sifat ini berdiri sendiri tetapi bisa digunakan secara bersamaan

- Matriks transpos $\tilde{A}$ atau (A^{T}) memiliki nilai eigen yang sama dengan A. Nilai eigen A dan A^{T} adalah solusi dari $|A-\lambda I|=0$ dan $|A^{\mathrm{T}}-\lambda I|=0$. Karena $A^{\mathrm{T}}-\lambda I=(A-\lambda I)^{\mathrm{T}}$ dan determinan sebuah matriks sama dengan determinan transposnya

$$|A-\lambda I| = |(A-\lambda I)^{\mathrm{T}}| = |A^{\mathrm{T}}-\lambda I|,$$

  persamaan sekular untuk A dan $(A)^{\mathrm{T}}$ identik. Maka A dan $(A)^{\mathrm{T}}$ memiliki nilai eigen yang sama.

- Jika A adalah matriks segitiga baik yang atas maupun bawah, maka nilai eigen-nya adalah elemen diagonal. Jika $|A-\lambda I|=0$ adalah

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)=0,$$

  jelas bahwa $\lambda=a_{11}, \lambda=a_{22}, \ldots, \lambda=a_{nn}$.

- Jika $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks A, maka nilai eigen dari matriks invers A^{-1} adalah $1/\lambda_1,\ 1/\lambda_2,\ 1/\lambda_3,\ \ldots,1/\lambda_n$. Kalikan persamaan $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ dari kiri dengan A^{-1}

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x},$$

  dan menggunakan $A^{-1}A\mathbf{x}=I\mathbf{x}=\mathbf{x}$, kita memiliki $\mathbf{x}=\lambda A^{-1}\mathbf{x}$. Maka

$$A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}.$$

- Jika $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks A, maka nilai eigen dari matriks A^m adalah $\lambda_1^m,\ \lambda_2^m,\ \lambda_3^m,\ \ldots,\lambda_n^m$. Karena $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, maka

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A\lambda\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}.$$

  Dengan cara yang sama

$$A^3\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}, \ldots, A^m\mathbf{x} = \lambda^m\mathbf{x}.$$

6.2 Beberapa Terminologi

Telah kita lihat untuk matriks persegi $n\times n$, nilai eigennya bisa berupa bilangan riil maupun imajiner. Jika nilai eigennya berdegenerasi, kita bisa memiliki atau tidak sejumlah n vektor eigen yang berbeda.

Bagaimanapun, terdapat jenis matriks yang disebut sebagai matriks hermitian, nilai eigennya selalu riil. Sebuah matriks hermitian $n \times n$ akan selalu memiliki n buah vektor eigen yang berbeda.

Untuk memfasilitasi pembahasan kita tentang matriks ini dan juga sifat-sifatnya. Pertama marilah kita perkenalkan beberapa terminologi berikut.

6.2.1 Konjugasi Hermitian

Konjugasi Kompleks

Jika $A = (a_{ij})_{m\times n}$ merupakan sebuah matriks sebarang, yang elemennya bisa berupa bilangan kompleks, konjugasi kompleks matriks tersebut dinotasikan dengan A^* juga berupa sebuah matriks dengan orde $m \times n$ dengan tiap elemennya adalah kompleks konjugat dari elemen pada matriks A dalam artian

$$(A^*)_{ij} = a_{ij}^*.$$

Jelaslah bahwa

$$(cA)^* = c^* A^*.$$

Konjugasi Hermitian

Ketika dua buah operasi dari konjugasi kompleks dan transpos dikerjakan berurutan satu dengan yang lainnya pada sebuah matriks, hasil matriksnya disebut sebagai konjugasi hermitian dari matriks asalnya dan dinotasikan sebagai $A^\dagger$, dinamakan A dagger. Orang matematik menyebut $A^\dagger$ sebagai matriks adjoin. Urutan operasi tidak penting dalam artian

$$A^\dagger = (A^*)^{\mathrm{T}} = (\tilde{A})^*. \tag{6.6}$$

Sebagai contoh, jika

$$A = \begin{pmatrix} (6+\mathrm{i}) & (1-6\mathrm{i}) & 1 \\ (3+\mathrm{i}) & 4 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

maka

$$A^\dagger = (A^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} (6-\mathrm{i}) & (1+6\mathrm{i}) & 1 \\ (3-\mathrm{i}) & 4 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} (6-\mathrm{i}) & (3-\mathrm{i}) \\ (1+6\mathrm{i}) & 4 \\ 1 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

$$A^\dagger = (\tilde{A})^* = \begin{pmatrix} (6+\mathrm{i}) & (3+\mathrm{i}) \\ (1-6\mathrm{i}) & 4 \\ 1 & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} (6-\mathrm{i}) & (3-\mathrm{i}) \\ (1+6\mathrm{i}) & 4 \\ 1 & -3\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Konjugasi Hermitian dari Perkalian Matriks

Seperti yang telah dipelajari sebelumnya bahwa transpos dari hasil kali dua matriks adalah sama dengan perkalian dua buah transpos matriks dengan urutan yang dibalik. Dari sini kita bisa memperoleh

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger,$$

karena

$$(AB)^\dagger = (A^* B^*)^{\mathrm{T}} = \tilde{B}^* \tilde{A}^* = B^\dagger A^\dagger. \tag{6.10}$$

6.2.2 Ortogonalitas

Inner Product

Jika **a** dan **b** merupakan vektor kolom dengan orde yang sama n, *inner product* atau perkalian skalar didefinisikan $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}$. Konjugasi hermitian sebuah vektor kolom adalah vektor baris

$$\mathbf{a}^\dagger = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^\dagger = (a_1^* \; a_2^* \; \cdots a_n^*),$$

sehingga hasil *inner product* adalah sebuah bilangan

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = (a_1^* \; a_2^* \; \cdots a_n^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_k.$$

Terbisa dua buah lagi notasi yang biasa digunakan untuk *inner product.* Notasi yang paling sering digunakan dalam mekanika kuantum adalah notasi bracket yang diperkenalkan Dirac. Vektor baris dinyatakan sebagai bra, sedangkan vektor kolom dinyatakan sebagi ket. Kita bisa menuliskan vektor kolom sebagai

$$\mathbf{b} = |\mathbf{b}\rangle,$$

sebagai vektor ket dan vektor baris

$$\mathbf{a}^\dagger = \langle \mathbf{a}|$$

sebagai vektor bra. *Inner product* dari dua vektor ini biasanya dinyatakan sebagai

$$\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}.$$

Perhatikan untuk sebarang skalar, c,

$$\langle \mathbf{a}|c\mathbf{b}\rangle = c\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle,$$

sedangkan

$$\langle c\mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle = c^*\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle.$$

Notasi lain yang digunakan adalah tanda kurung:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{a}^\dagger\mathbf{b} = \langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle.$$

Jika A adalah sebuah matriks

$$(\mathbf{a}, A\mathbf{b}) = \left(A^\dagger\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$$

merupakan sebuah identitas, karena

$$\left(A^\dagger\mathbf{a},\mathbf{b}\right) = \left(A^\dagger\mathbf{a}\right)^\dagger\mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger\left(A^\dagger\right)^\dagger\mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger A\mathbf{b} = (\mathbf{a}, A\mathbf{b}).$$

Sehingga jika

$$(\mathbf{a}, A\mathbf{b}) = (A\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

maka A hermitian. Orang matematika menyebut hubungan $A^\dagger = A$ sebagai *self-adjoint*.

Ortogonalitas

Dua buah vektor $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$ dikatakan ortogonal jika dan hanya jika

$$\mathbf{a}^\dagger\mathbf{b} = 0.$$

Perhatikan bahwa dalam ruang riil 3 dimensi

$$\mathbf{a}^\dagger\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k^* b_k = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

hanyalah perkalian dot (titik) dari $\mathbf{a}$ dan $\mathbf{b}$. Dalam analisis vektor, jika perkalian dot dari dua buah vektor sama dengan nol, maka dua vektor tersebut tegak lurus.

Panjang sebuah Vektor Kompleks

Jika kita mengadopsi definisi ini untuk perkalian skalar dua buah vektor kompleks, maka kita mempunyai definisi alami panjang sebuah vektor kompleks dalam ruang berdimensi$-n$. Panjang sebuah vektor kompleks $\|\mathbf{x}\|$ dari sebuah vektor $\mathbf{x}$ adalah

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} a_k^* a_k = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

6.2.3 Proses Gram-Schmidt

Bebas Linier

Himpunan vektor $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ dikatakan bebas linier jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i = 0,$$

yang mengimplikasikan $a_i = 0$. Jika tidak maka himpunan tersebut saling bergantung linier.

Pertama marilah kita uji tiga buah vektor

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

untuk bebas linier. Pertanyaannya apakah kita bisa mencari himpunan a_i yang tidak nol semua sehingga

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{x}_i = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jelas ini mensyaratkan $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ dan $a_3 = 0$. Sehingga tiga buah vektor ini bebas linier.

Perhatikan bahwa bebas atau bergantung linier adalah sifat dari semua anggota, bukan hanya masing-masing vektor.

Jelas jika $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ merepresentasikan vektor tiga dimensi yang *noncoplannar* (tak sebidang), maka vektor tersebut bebas linier.

Proses Gram-Schmidt

Diberikan sejumlah n vektor bebas linier, kita bisa membangun dari kombinasi liniernya sebuah himpunan dari n buah vektor satuan yang saling ortogonal.

Misalkan vektor yang bebas linier $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Definisikan

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|},$$

sebagai vektor satuan pertama. Sekarang definisikan

$$\mathbf{u}_2' = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1.$$

Perkalian skalar $\mathbf{u}_2'$ dan $\mathbf{u}_1$ sama dengan nol

$$(\mathbf{u}_2', \mathbf{u}_1) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1) - (\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 0,$$

karena $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = 1$. Hal ini menunjukkan $\mathbf{u}_2'$ ortogonal terhadap $\mathbf{u}_1$.

Kita bisa menormalisasi $\mathbf{u}_2'$:

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_2'}{\|\mathbf{u}_2'\|},$$

untuk memperoleh vektor satuan kedua $\mathbf{u}_2$ yang ortogonal terhadap $\mathbf{u}_1$.

Kita bisa melanjutkan proses ini secara berulang dengan mendefinsikan

$$\mathbf{u}_k' = \mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_i,$$

dan

$$\mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{u}_k'}{\|\mathbf{u}_k'\|}.$$

Ketika semua $\mathbf{x}_k$ telah digunakan, kita memiliki sejumlah n vektor satuan $u_1,\ u_2, \ldots, u_k$ yang saling ortogonal. Himpunan ini dinamakan himpunan ortonormal. Prosedur ini disebut sebagai proses Gram-Schmidt.

6.3 Matriks Uniter dan Matriks Ortogonal

6.3.1 Matriks Uniter

Jika sebuah matriks persegi U memenuhi kondisi

$$U^\dagger U = I,$$

maka matriks U dikatakan matriks uniter (satuan). Sejumlah n kolom dalam matriks uniter bisa dianggap sebagai vektor kolom sejumlah n dalam sebuah himpunan ortonormal.

Dengan kata lain, jika

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix},$$

dan

$$\mathbf{u}_i^\dagger \mathbf{u}_j = (u_{i1}^*, u_{i2}^*, \ldots, u_{in}^*) \begin{pmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ \vdots \\ u_{jn} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases},$$

maka

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

adalah uniter. Hal ini karena

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & \cdots & u_{1n}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & \cdots & u_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n1}^* & u_{n2}^* & \cdots & u_{nn}^* \end{pmatrix},$$

sehingga

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & \cdots & u_{1n}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & \cdots & u_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n1}^* & u_{n2}^* & \cdots & u_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan mengalikan U^{-1} dari kanan, kita memiliki

$$U^\dagger U U^{-1} = I U^{-1}.$$

Dari sini kita memperoleh bahwa hermitian konjugat dari sebuah matriks uniter adalah inversnya

$$U^\dagger = U^{-1}.$$

6.3.2 Sifat-sifat Matriks Uniter

- Transformasi uniter tidak mengubah panjang vektor (invarian).

Misalkan

$$\mathbf{a} = U\mathbf{b}, \quad \text{jadi} \quad \mathbf{a}^\dagger = \mathbf{b}^\dagger U^\dagger,$$

dan

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = \mathbf{b}^\dagger U^\dagger U \mathbf{b}.$$

Karena

$$U^\dagger U = U^{-1} U = I,$$

maka

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} = \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} = \|\mathbf{b}\|^2.$$

Sehingga panjang vektor mula-mula sama dengan panjang vektor setelah ditransformasikan.

- Nilai eigen mutlak sebuah matriks uniter sama dengan satu.

Misalkan $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen non-trivial dari sebuah matriks uniter U untuk sebuah nilai eigen λ.

$$U\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Lakukan konjugasi hermitian dua sisi

$$\mathbf{x}^\dagger U^\dagger = \lambda^*\mathbf{x}^\dagger.$$

Kalikan dua buah persamaan terakhir

$$\mathbf{x}^\dagger U^\dagger U\mathbf{x} = \lambda^*\mathbf{x}^\dagger\lambda\mathbf{x}.$$

Karena $U^\dagger U = I$ dan $\lambda^*\lambda = |\lambda|^2$, maka

$$\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} = |\lambda|^2\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}.$$

Sehingga

$$|\lambda|^2 = 1.$$

Dengan kata lain, nilai eigen sebuah matriks uniter haruslah berada pada lingkaran satuan sebuah bidang kompleks berpusat di titik asal.

6.3.3 Matriks Ortogonal

Jika semua elemen matriks uniter riil, matriks tersebut dikenal sebagai matriks ortogonal. Sehingga sifat-sifat matriks uniter juga merupakan sifat dari matriks ortogonal. Sebagai tambahan

- Determinan sebuah matriks ortogonal sama dengan satu dan minus satu.

Jika A adalah matriks persegi riil, maka dengan definisi

$$A^\dagger = \tilde{A}^* = \tilde{A}.$$

Sebagai tambahan jika A matriks uniter $A^\dagger = A^{-1}$ maka

$$\tilde{A} = A^{-1}.$$

Sehingga

$$A\tilde{A} = I. \tag{6.11}$$

Karena determinan A sama dengan determinan $\tilde{A}$, sehingga

$$|A\tilde{A}| = |A||\tilde{A}| = |A|^2.$$

Tetapi

$$|A\tilde{A}| = |I| = 1,$$

sehingga

$$|A|^2 = 1.$$

Maka determinan dari matriks ortogonal adalah $+1$ dan -1.

Sering sekali (6.11) digunakan untuk mendefinisikan sebuah matriks ortogonal. Yaitu sebuah matriks persegi riil A yang memenuhi (6.11) disebut sebagai matriks ortogonal. Hal ini sama dengan sebuah pernyataan "invers sebuah matriks ortogonal sama dengan transposnya."

Jika kita tuliskan dalam elemennya, (6.11) diberikan oleh

$$\sum_{j=1} a_{ij}\tilde{a}_{jk} = \sum_{j=1} a_{ij}a_{kj} = \delta_{ik}, \tag{6.12}$$

untuk semua i dan j. Dengan cara yang sama $\tilde{A}A = I$ dituliskan

$$\sum_{j=1} \tilde{a}_{ij}a_{jk} = \sum_{j=1} a_{ji}a_{jk} = \delta_{ik}. \tag{6.13}$$

Bagaimanapun (6.13) tidak bebas terhadap (6.12), karena $A\tilde{A} = \tilde{A}A$. Jika salah satu kondisi terpenuhi (valid), maka kondisi yang lainnya juga harus terpenuhi.

Dengan kata-kata, kondisi ini berarti jumlah dari perkalian elemen dua buah kolom (baris) yang berbeda dari sebuah matriks ortogonal adalah nol, sedangkan jumlah dari kuadrat dari elemen kolom (baris) sama dengan satuan. Jika kita menganggap sejumlah n kolom dari matriks sebagai n vektor riil, hal ini berarti n vektor kolom ini ortogonal dan ternormalisasi. Dengan cara yang sama, semua baris dari sebuah matriks ortogonal adalah ortonormal.

6.3.4 Elemen Bebas dari Matriks Ortogonal

Sebuah matriks persegi berorde n memiliki elemen sejumlah n^2. Untuk sebuah matriks ortogonal, tidak semua elemennya bebas satu dengan yang lain, karena terdapat beberapa syarat yang harus terpenuhi. Pertama, terdapat kondisi sejumlah n agar tiap kolom ternormalisasi. Kemudian terdapat sejumlah $n(n-1)/2$ agar tiap kolom ortogonal dengan kolom yang lain. Sehingga jumlah parameter bebas sebuah matriks ortogonal adalah

$$n^2 - [n + n(n-1)/2] = n(n-1)/2.$$

Dengan kata lain, sebuah matriks ortogonal berorde n dikarakterisasi oleh sejumlah $n(n-1)/2$ elemen bebas.

Untuk $n = 2$, jumlah parameter bebas adalah 1. Hal ini diilustrasikan sebagai berikut. Misalkan sebuah matriks ortogonal sebarang orde 2

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Fakta bahwa tiap kolom ternormalisasi membawa kita kepada

$$a^2 + b^2 = 1, \tag{6.14}$$

$$c^2 + d^2 = 1. \tag{6.15}$$

Selanjutnya, dua buah kolom ortogonal

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd = 0. \tag{6.16}$$

Solusi umum dari (6.14) adalah $a = \cos\theta$ dan $b = \sin\theta$ dengan θ sebuah skalar. Dengan cara yang sama solusi dari (6.15) adalah $c = \cos\phi$ dan $d = \sin\phi$ dengan ϕ adalah skalar yang lain. Sedangkan (6.16) mensyaratkan

$$\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta - \phi) = 0,$$

sehingga

$$\phi = \theta \pm \frac{\pi}{2}.$$

Sehingga solusi paling umum matriks ortogonal orde 2 adalah

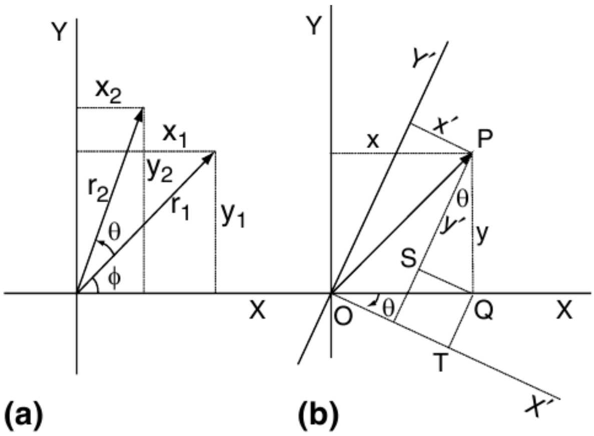
$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{6.17}$$

Setiap matriks ortogonal berorde 2 bisa dinyatakan dalam bentuk ini dengan nilai θ tertentu. Jelas bahwa determinan A_1 sama dengan 1 dan determinan A_2 sama dengan -1.

6.3.5 Transformasi Ortogonal dan Matriks Rotasi

Kenyataan bahwa dalam ruang riil, transformasi ortogonal menjaga panjang sebuah vektor tetap (tidak berubah) menyarankan kepada kita bahwa matriks ortogonal berasosiasi dengan rotasi sebuah vektor. Matriks ortogonal ini berkaitan dengan dua buah jenis rotasi di dalam ruang. Pertama, kita bisa melihatnya sebagai operator yang merotasikan sebuah vektor. Hal ini sering disebut sebagi *transformasi aktif*. Kedua kita bisa melihatnya sebagai matriks transformasi ketika sumbu koordinat dari kerangka acuan dirotasikan. Hal ini dikenal sebagai *transformasi pasif*.

Pertama marilah kita perhatikan vektor pada Gambar 6.1.(**a**). Komponen x dan y dari vektor $\mathbf{r}_1$ diberikan oleh $x_1 = r\cos\varphi$ dan $y_1 = r\sin\varphi$ dengan r adalah panjang



Gambar 6.1: Interpretasi matriks ortogonal A_1 yang determinannya +1. **(a)** sebagai sebuah operator, merotasikan vektor $\mathbf{r}_1$ menjadi $\mathbf{r}_2$ tanpa mengubah panjang vektor. **(b)** sebagai matriks transformasi antara ujung sebuah vektor tetap ketika sumbu koordinatnya dirotasikan. Perhatikan bahwa arah rotasi **(b)** berlawanan dengan arah rotasi **(a)**.

vektor. Sekarang marilah kita rotasikan vektor tersebut berlawanan arah jarum jam sebesar sudut θ, sehingga $x_2 = r\cos(\varphi+\theta)$ dan $y_2 = r\sin(\varphi+\theta)$. Dengan menggunakan trigonometri, kita bisa menuliskan

$$x_2 = r\cos(\varphi+\theta) = r\cos\varphi\cos\theta - r\sin\varphi\sin\theta = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta,$$
$$y_2 = r\sin(\varphi+\theta) = r\sin\varphi\cos\theta + r\cos\varphi\sin\theta = y_1\cos\theta + x_1\sin\theta.$$

Kita bisa menuliskan koefisein dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Terlihat bahwa matriks koefisien tidak lain adalah matriks ortogonal A_1 dalam (6.17). Sehingga matriks ortogonal dengan determinan +1 disebut juga matriks rotasi. Matriks ini merotasikan $\mathbf{r}_1$ menjadi $\mathbf{r}_2$ tanpa mengubah panjang vektor.

Interpretasi kedua dari matriks rotasi adalah sebagai berikut. Misalkan P adalah ujung sebuah vektor tetap. Koordinat P adalah (x, y) dalam sebuah sistem koordinat persegi khusus. Sekarang sumbu koordinatnya dirotasikan searah jarum jam sebesar sudut θ seperti yang ditunjukkan Gambar 6.1.**(b)**. Koordinat P dalam sistem yang dirotasikan menjadi (x', y'). Dari geometri pada Gambar 6.1.**(b)**. Jelas bahwa

$$x' = OT - SQ = OQ\cos\theta - PQ\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y' = QT + PS = OQ\sin\theta + PQ\cos\theta = x\sin\theta + y\cos\theta,$$

atau

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa matriks yang terlibat di sini adalah matriks ortogonal A_1. Tetapi, kali ini A_1 bertindak sebagai matriks transformasi antara koordinat ujung vektor tetap ketika sumbu koordinatnya dirotasikan.

Ekivalensi antara dua buah interpretasi bisa diharapkan sebelumnya, karena orientasi relatif antara vektor dan sumbu koordinat adalah sama apakah vektor yang dirotasikan berlawanan jarum jam dengan sudut θ atau sumbu koordinat dirotasikan searah jarum jam dengan sudut yang sama.

Selanjutnya, marilah kita bahas matriks rotasi A_2 yang memiliki determinan -1. Matriks A_2 bisa dinyatakan

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Transformasi

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

memberikan

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = -y_1.$$

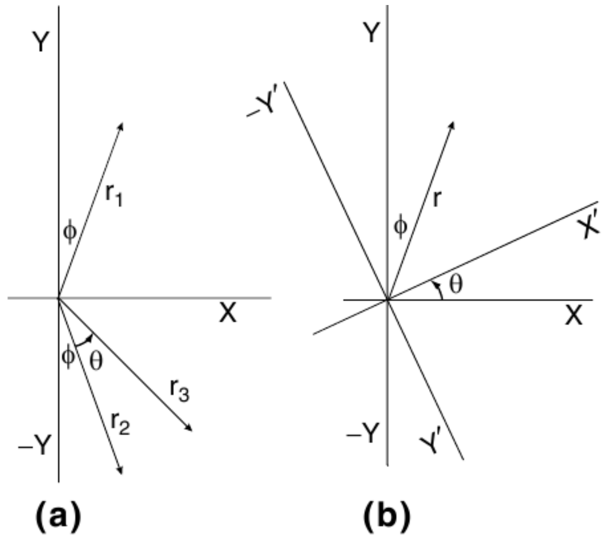
Jelas bahwa di sini hal ini berhubungan dengan pencerminan (refleksi) vektor terhadap sumbu$-X$. Sehingga A_2 bisa dipandang sebagai sebuah operator yang pertama membalik vektor $\mathbf{r}_1$ simetrik sepanjang sumbu$-X$ kemudian merotasikannya menjadi $\mathbf{r}_3$ seperti yang terlihat pada Gambar 6.2.**(a)**.

Dalam suku transformasi koordinat, kita bisa menunjukkan (x', y') dalam persamaan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

merepresentasikan koordinat baru dari ujung sebuah vektor tetap setelah sumbu$-Y$ dibalik dan sumbu koordinat dirotasikan dengan sudut θ, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6.2.**(b)**. Dalam kasus ini kita harus berhati-hati dengan tanda pada sudut. Perjanjian tanda adalah sebagai berikut, positif ketika arah rotasi berlawanan jarum jam dan negatif ketika searah jarum jam. Tetapi setelah sumbu$-Y$ dibalik seperti tampak pada Gambar 6.2.**(b)**, rotasi negatif (dalam artian rotasi dari arah sumbu$-X$ positif melalui sumbu$-Y$ negatif) muncul berlawanan arah jarum jam. Hal ini mengapa pada Gambar 6.1.**(a)**,**(b)**, vektor dan sumbu koordinat berotasi dalam arah berlawanan, sedangkan dalam Gambar 6.2.**(a)**,**(b)** tampak berotasi searah.

Sejauh ini kita telah menggunakan rotasi dalam dua dimensi sebagai contoh. Bagaimanapun kesimpulan bahwa matriks ortogonal yang determinannya $+1$ merepresentasikan rotasi murni dan matriks ortogonal yang determinannya -1 merepresentasikan pencerminan diikuti dengan sebuah rotasi secara umum juga valid untuk dimensi yang lebih tinggi. Kita akan membahas hal ini dalam transformasi vektor.



Gambar 6.2: Dua buah interpretasi matriks ortogonal A_2 yang determinannya -1. **(a)** Sebagai sebuah operator, matriks ini membalik vektor $\mathbf{r}_1$ menjadi $\mathbf{r}_2$ simetrik terhadap sumbu$-X$, dan kemudian merotasikan $\mathbf{r}_2$ menjadi $\mathbf{r}_3$.**(b)** Sebagai matriks transformasi antara ujung vektor tetap ketika sumbu$-Y$ dibalik dan kemudian sumbu koordinat dirotasikan. Perhatikan bahwa **(b)** arahnya tampak sama dengan **(a)**.

6.4 Diagonalisasi

6.4.1 Transformasi Similaritas

Jika A adalah matriks $n \times n$ dan $\mathbf{u}$ adalah matriks kolom $n \times 1$, sehingga $A\mathbf{u}$ adalah matriks kolom yang lain. Maka persamaan

$$A\mathbf{u} = \mathbf{v} \tag{6.18}$$

merepresentasikan transformasi linier. Matriks A berperilaku sebagai operator linier, mengubah vektor $\mathbf{u}$ menjadi $\mathbf{v}$. Misalkan

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

dengan u_i dan v_i berturut-turut adalah komponen ke$-i$ dari matriks $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dalam ruang berdimensi$-n$. Komponen-komponen ini diukur dalam sistem koordinat (kerangka acuan) tertentu. Misalkan vektor satuan $\mathbf{e}_i$, dikenal sebagai basis, sepanjang sumbu koordinat sistem ini adalah

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

maka

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + u_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i. \tag{6.19}$$

Misalkan terdapat sistem koordinat yang lain, dikenal sebagai sistem aksen (*prime*). Jika diukur dalam sistem ini, komponen **u** dan **v** menjadi

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \mathbf{u}', \quad \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \mathbf{v}'. \tag{6.20}$$

Kita tekanakan di sini bahwa **u** dan $\mathbf{u}'$ adalah vektor yang sama tetapi diukur dalam sistem koordinat yang berbeda. Simbol $\mathbf{u}'$ tidak berarti sebuah vektor yang berbeda dari **u**, hanya secara sederhana merepresentasikan kumpulan dari komponen **u** dalam sistem aksen seperti yang terlihat pada (6.20). Dengan cara yang sama **v** dan $\mathbf{v}'$ adalah vektor yang sama. Kita bisa mencari komponen-komponennya jika kita mengetahui komponen $\mathbf{e}_i$ dalam sistem aksen.

Dalam (6.19)

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n,$$

$\mathbf{u}'$ hanyalah angka yang bebas terhadap sistem koordinat. Untuk mencari komponen **u** dalam koordinat aksen, kita hanya perlu menyatakan $\mathbf{e}_i$ dalam sistem aksen.

Misalkan $\mathbf{e}_i$ yang diukur dalam sistem aksen

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix},$$

sehingga komponen $\mathbf{u}$ yang diukur dalam sistem koordinat ini adalah

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + u_n \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 s_{11} + u_2 s_{12} + \cdots + u_n s_{1n} \\ u_1 s_{21} + u_2 s_{22} + \cdots + u_n s_{2n} \\ \vdots \\ u_1 s_{n1} + u_2 s_{n2} + \cdots + u_n s_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Persamaan ini bisa dituliskan dalam bentuk

$$\mathbf{u}' = T\mathbf{u}, \tag{6.21}$$

dengan

$$T = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Jelas dari analisis di sini bahwa matriks transformasi antara komponen vektor untuk dua buah sistem koordinat adalah sama untuk semua vektor karena hanya bergantung pada transformasi vektor basis dalam dua kerangka acuan. Sehingga $\mathbf{v}'$ dan $\mathbf{v}'$ juga dihubungkan dengan transformasi matriks T yang sama

$$\mathbf{v}' = T\mathbf{v}. \tag{6.22}$$

Operasi mengubah $\mathbf{u}$ menjadi $\mathbf{v}$, dinyatakan dalam sistem asalnya adalah $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Jika operasi yang sama dinyatakan dalam koordinat aksen

$$A'\mathbf{u}' = \mathbf{v}'.$$

Karena $\mathbf{u}' = T\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}' = T\mathbf{v}$,

$$A'T\mathbf{u} = T\mathbf{v}.$$

Kalikan kedua ruas dengan invers T dari kiri

$$T^{-1}A'T\mathbf{u} = T^{-1}T\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Karena $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$ maka

$$A = T^{-1}A'T. \tag{6.23}$$

Jika kita kalikan persamaan ini dengan T dari kiri dan T^{-1} dari kanan, kita mempunyai

$$TAT^{-1} = A'.$$

Apa yang sudah kita temukan adalah sepanjang kita mengetahui hubungan antara sumbu koordinat dari dua buah kerangka acuan, kita tidak hanya bisa mentransformasikan sebuah vektor dari satu kerangka ke kerangka lainnya, tetapi kita juga bisa mentransformasikan matriks yang merepresentasikan sebuah operator linier dari satu kerangka acuan ke yang lain.

Secara umum jika terdapat sebuah matriks non-singular T (mempunyai invers) sehingga $T^{-1}AT = B$ untuk sebarang matriks persegi A dan B dengan orde yang sama, maka A dan B dikatakan matriks *similiar* dan transformasi dari A ke B dikenal sebagai transformasi similaritas.

Jika dua buah matriks dihubungkan dengan transformasi similaritas, maka matriks tersebut merepresentasikan transformasi linier yang sama dalam dua kerangka acuan/sistem koordinat yang berbeda.

Jika sumbu koordinat persegi dalam sistem aksen dibangkitkan oleh rotasi dari sistem asalnya, maka T merupakan matriks ortogonal seperti yang dibahas pada Subbab 6.3. Dalam kasus tersebut $T^{-1} = \tilde{T}$ dan transformasi similaritasnya bisa dituliskan sebagai $\tilde{T}AT$. Jika kita bekerja pada ruang kompleks, matriks transformasinya adalah matriks uniter, dan transformasi similaritasnya adalah $T^{\dagger}AT$. Dua buah transformasi ini dikenal sebagai transformasi similaritas uniter.

Sebuah matriks yang bisa dibuat bentuknya menjadi matriks diagonal melalui transformasi similaritas disebut terdiagonalkan (*diagonalizeable*). Apakah sebuah matriks terdiagonalkan dan bagaimana mendiagonalkannya merupakan pertanyaan yang sangat penting dalam teori transformasi linier. Bukan hanya karena lebih mudah bekerja dengan matriks diagonal, tetapi juga karena merupakan struktur dasar mekanika kuantum. Dalam subbab berikut, kita akan menjawab pertanyaan ini.

6.4.2 Diagonalisasi Matriks Persegi

Vektor eigen A bisa digunakan untuk membentuk matriks S sehingga $S^{-1}AS$ menjadi sebuah matriks diagonal. Proses ini membuat permasalahan fisika menjadi jauh lebih sederhana dengan memilih variabel yang lebih baik.

Jika A adalah matriks persegi berorde n, nilai eigen λ_i dan vektor eigen $\mathbf{x}_i$ memenuhi persamaan

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i, \tag{6.24}$$

untuk $i = 1,\ 2, \ldots, n$. Tiap vektor eigen adalah matriks kolom dengan elemen sejumlah n

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tiap n pada (6.24) memiliki bentuk

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i x_{i1} \\ \lambda_i x_{i2} \\ \vdots \\ \lambda_i x_{in} \end{pmatrix}. \tag{6.25}$$

Secara kolektif bisa kita tuliskan

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{21} & \cdots & \lambda_n x_{n1} \\ \lambda_1 x_{12} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 x_{1n} & \lambda_2 x_{2n} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Untuk menyederhanakan penulisan, misalkan

$$S = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \tag{6.27}$$

dan

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{6.28}$$

dan menuliskan (6.26) sebagai

$$AS = S\Lambda. \tag{6.29}$$

Dengan mengalikan dua buah ruas dengan S^{-1} dari kiri, kita memperoleh

$$S^{-1}AS = \Lambda. \tag{6.30}$$

Sehingga dengan menggunakan vektor eigen dan invers dari matriks, kita bisa mentransformasikan sebuah matriks A dalam bentuk matriks diagonal yang elemennya adalah nilai eigen dari A. Transformasi (6.30) dikenal sebagai diagonalisasi matriks A.

Contoh 6.4.1. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, carilah S sehingga $S^{-1}AS$ adalah matriks diagonal. Tunjukkan bahwa $S^{-1}AS$ adalah nilai eigen dari A.
Solusi 6.4.1. Karena persamaan sekularnya adalah

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-3) = 0,$$

nilai eigennya diberikan oleh $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 3$. Vektor eigennya $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sehingga

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mudah untuk diperiksa bahwa $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dan

$$S^{-1}AS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa dalam pendiagonalan matriks, S tidak harus uniter. Tetapi jika vektor eigennya ortogonal, maka kita bisa menormalisasi vektor eigen dan membentuk sebuah himpunan ortonormal. Matriks dengan anggota himpunan ortonormal ini sebagai kolom merupakan matriks uniter. Proses diagonalisasi menjadi transformasi similaritas uniter yang lebih umum dan berguna.

Dua buah vektor eigen pada contoh di atas ortogonal karena

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Normalisasinya menghasilkan

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matriks yang dibangun dengan dua buah vektor eigen ternormalisasi adalah

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

yang merupakan sebuah matriks ortogonal. Transformasi

$$\tilde{U} A U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

merupakan transformasi similaritas uniter.

Pertama kita telah mengeliminasi langkah untuk mencari invers dari U, karena U adalah matriks ortogonal, invers dari U tidak lain adalah transposnya. Lebih penting dari itu, U adalah matriks rotasi seperti yang didiskusikan pada Subbab 6.3. Jika kita merotasikan sumbu koordinat asal agar berimpit dengan $\mathbf{u}_1$ dan $\mathbf{u}_2$, maka A adalah matriks diagonal terhadap sumbu yang dirotasikan.

Sumbu koordinat dari sistem acuan, dengan matriks diagonal, disebut sebagai sumbu utama. dalam contoh ini $\mathbf{u}_1$ dan $\mathbf{u}_2$ adalah vektor satuan sepanjang sumbu utama. Dari komponen $\mathbf{u}_1$, kita dengan mudah mencari orientasi sumbu utama. Misalkan θ_1 adalah sudut antara $\mathbf{u}_1$ dengan sumbu horizontal asal, sehingga

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

yang memberikan $\theta_1 = -\pi/4$. Hal ini berarti untuk memperoleh sumbu utama, kita harus merotasikan koordinat asal sebesar 45° searah dengan jarum jam. Untuk pemeriksaan yang konsisten, kita bisa menghitung θ_2, sudut antara $\mathbf{u}_2$ dengan sumbu horizontal asal, sehingga

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

yang memberikan $\theta_2 = +\pi/4$. Sehingga sudut antara θ_1 dengan θ_2 adalah $\pi/2$ sebagaimana mestinya untuk dua buah vektor yang saling tegak lurus dalam ruang 2 dimensi.

Karena $\theta_2 = \pi/2 + \theta_1$, $\cos\theta_2 = -\sin\theta_1$ dan $\sin\theta_2 = \cos\theta_1$, maka matriks uniter U bisa dituliskan

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix},$$

yang tidak lain adalah matriks seperti yang terlihat pada (6.17).

6.4.3 Bentuk Kuadratik

Bentuk kuadratik adalah sebuah pernyataan homogen berderajat dua dalam variabel n. Sebagai contoh

$$Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

adalah bentuk kuadratik dalam x_1 dan x_2. Dengan mengubah variabel, ekspresi ini bisa diubah sehingga tidak terdapat suku silang. Bentuk tanpa suku silang ini dinamakan sebagai bentuk kanonik. Bentuk kuadratik ini sangatlah penting karena banyak sekali aplikasinya dalam fisika.

Langkah pertama untuk mengubah dalam bentuk kanonik adalah dengan membagi suku silangnya menjadi dua bagian sama besar, $(4x_1x_2 = 2x_1x_2 + 2x_2x_1)$, sehingga $Q(x_1, x_2)$ bisa kita tuliskan

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{6.31}$$

dengan matriks koefisien

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

merupakan matriks simetrik. Seperti akan kita lihat dalam Subbab 6.5 bahwa matriks simetrik selalu bisa didiagonalkan. Dalam kasus khusus ini, pertama kita akan mencari nilai eigen dan vektor eigen dari C

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0.$$

Vektor eigen untuk $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 6$ berturut-turut adalah

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga matriks ortogonalnya

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

akan mendiagonalkan matriks koefisiennya

$$\tilde{U}CU = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Jika kita mengubah variabel

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

dan mengambil transposnya kedua ruas

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \tilde{U},$$

kita bisa menuliskan (6.31) sebagai

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \tilde{U}CU \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1^2 + 6u_2^2, \tag{6.32}$$

yang merupakan bentuk kanonik (tidak mempunyai suku silang).

Perhatikan pula bahwa matriks transformasi T yang dinyatakan pada (6.21) sama dengan $\tilde{U}$.

Contoh 6.4.2. Tunjukkan bahwa persamaan berikut

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 2\sqrt{5}x - 4\sqrt{6}y = 15$$

merupakan sebuah elips dengan mentransformasikannya menjadi sebuah bentuk irisan kerucut. Di manakah pusat dan berapakah panjang sumbu mayor dan minornya?
Solusi 6.4.2. Suku kuadratik persamaan tersebut bisa kita tuliskan

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks koefisiennya diberikan oleh

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 10) = 0.$$

Vektor eigen ternormalisasi untuk $\lambda_1 = 5$ dan $\lambda_2 = 10$ berturut-turut adalah

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga matriks ortogonalnya

$$U = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

akan mendiagonalkan matriks koefisiennya

$$\tilde{U}CU = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Misalkan

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

yang ekivalen dengan

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} (x' - 2y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}} (2x' + y'),$$

maka persamaannya bisa dituliskan

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \tilde{U} C U \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 2\sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}} (x' - 2y') - 4\sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}} (2x' + y') = 15$$

atau

$$\begin{aligned} 5x'^2 + 10y'^2 - 10x' &= 15, \\ x'^2 + 2y'^2 - 2x' &= 3. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan $(x' - 1)^2 = x'^2 - 2x' + 1$, persamaan terakhirnya menjadi

$$(x' - 1)^2 + 2y'^2 = 4,$$

atau

$$\frac{(x' - 1)^2}{4} + \frac{y'^2}{2} = 1,$$

yang merupakan bentuk standar sebuah elips. Pusat elipsnya berada pada $x = 1/\sqrt{5}$ dan $y = 2/\sqrt{5}$ (berkaitan dengan $x' = 1$ dan $y' = 0$). Panjang sumbu mayor adalah $2\sqrt{4} = 4$ dan panjang sumbu minor adalah $2\sqrt{2}$.

Untuk mentransformasikan persamaannya dalam bentuk standar, kita telah merotasikan sumbu koordinat. Sumbu mayornya terletak sepanjang $\mathbf{v}_1$ dan sumbu minornya terletak sepanjang $\mathbf{v}_2$. Karena

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sumbu mayor elips membentuk sudut θ terhadap sumbu horizontal koordinat dan besar sudut tersebut $\theta = \cos^{-1}(1/\sqrt{5})$.

6.5 Matriks Hermitian dan Matriks Simetrik

6.5.1 Definisi

Matriks Riil
Jika $A^* = A$ maka $a_{ij} = a_{ij}^*$. Karena tiap elemen matriks riil, maka matriks ini

dinamakan matriks riil.

Matriks Imajiner
Jika $A^* = -A$, hal ini mengimplikasikan bahwa $a_{ij} = -a_{ij}^*$. Tiap elemen matriks ini imajiner atau nol, sehingga dikatakan matriks imajiner.

Matriks Hermitian
Sebuah matriks persegi dikatakan hermitian jika $A^\dagger = A$. Mudah untuk dibuktikan bahwa elemen sebuah matriks hermitian memenuhi hubungan $a_{ij}^* = a_{ji}$. Matriks hermitian sangat penting dalam mekanika (fisika) kuantum.

Matriks Simetrik
Jika semua elemen matriks riil, maka matriks hermitian hanyalah matriks simetrik. Matriks simetrik sangatlah berguna dalam fisika klasik.

Matriks Antihermitian dan Matriks Antisimetrik
Sebuah matriks dinamakan anti hermitian atau *skew-hermitian* jika

$$A^\dagger = -A, \tag{6.33}$$

yang mengimplikasikan $a_{ij}^* = -a_{ji}$.

Jika elemen semua matriks anti hermitian semuanya riil, maka matriks ini hanyalah matriks anti simetrik.

6.5.2 Nilai Eigen Matriks Hermitian

- Nilai eigen sebuah matriks hermitian (matriks simetrik riil) semuanya riil.

Misalkan A adalah matriks hermitian dan $\mathbf{x}$ adalah vektor eigen non trivial untuk nilai eigen λ yang memenuhi persamaan

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{6.34}$$

Ambil konjugasi hermitian dari persamaan di atas

$$\mathbf{x}^\dagger A^\dagger = \lambda^* \mathbf{x}^\dagger. \tag{6.35}$$

Perhatikan bahwa λ hanyalah sebuah bilangan (riil maupun kompleks) sehingga konjugat hermitiannya tidak lain adalah konjugat kompleksnya. Karena hanya sebuah bilangan, maka tidak menjadi masalah untuk mengalikan dari kanan ataupun kiri.

Kalikan (6.34) dengan $\mathbf{x}^\dagger$ dari kiri

$$\mathbf{x}^\dagger A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}.$$

Kalikan (6.35) dengan $\mathbf{x}$ dari kanan

$$\mathbf{x}^\dagger A^\dagger\mathbf{x} = \lambda^*\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x}.$$

Kurangkan persamaan ini dengan persamaan sebelumnya

$$(\lambda - \lambda^*)\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} = \mathbf{x}^\dagger\left(A - A^\dagger\right)\mathbf{x},$$

tetapi A hermitian $A = A^\dagger$ sehingga

$$(\lambda - \lambda^*)\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} = 0,$$

karena $\mathbf{x}^\dagger\mathbf{x} \neq 0$, maka $\lambda = \lambda^*$ dan λ riil.

Untuk matriks riil simetrik pembuktiannya juga identik, karena untuk matriks riil, matriks hermitian adalah matriks riil simetrik.

- Jika dua buah nilai eigen matriks hermitian (matriks riil simetrik) berbeda, maka vektor eigennya ortogonal.

Misalkan

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1,$$
$$A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2.$$

Kalikan persamaan pertama dengan $\mathbf{x}_2^\dagger$ dari kiri

$$\mathbf{x}_2^\dagger A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_2^\dagger\mathbf{x}_1.$$

Ambil konjugasi hermitian persamaan kedua dan kalikan dengan $\mathbf{x}_1$ dari kanan

$$\mathbf{x}_2^\dagger A\mathbf{x}_1 = \lambda_2\mathbf{x}_2^\dagger\mathbf{x}_1,$$

kita telah menggunakan $(A\mathbf{x}_2)^\dagger = \mathbf{x}_2^\dagger A^\dagger,\ A^\dagger = A$ dan $\lambda_2 = \lambda_2^*$. Dengan mengurangkan dua buah persamaan kita mempunyai

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_2^\dagger\mathbf{x}_1 = 0.$$

Karena $\lambda_1 \neq \lambda_2$, maka

$$\mathbf{x}_2^\dagger\mathbf{x}_1 = 0.$$

Maka $\mathbf{x}_1$ dan $\mathbf{x}_2$ ortogonal. Pembuktian untuk matriks riil simetrik juga sama.

6.5.3 Pendiagonalan Matriks Hermitian

- Sebuah matriks hermitian (atau riil simetrik) bisa didiagonalkan dengan matriks uniter (ortogonal riil).

Jika nilai eigen sebuah matriks semuanya berbeda, maka matriks tersebut bisa didiagonalkan dengan menggunakan transformasi similaritas seperti yang sudah kita bicarakan sebelumnya. Di sini kita hanya perlu menunjukkan bahwa meskipun nilai eigennya berdegenerasi, sepanjang matriksnya hermitian, maka matriks tersebut bisa didiagonalkan. Kita akan membuktikan dengan membangun sebuah matriks uniter yang akan mendiagonalkan sebuah matriks uniter berdegenerasi.

Misalkan λ_1 merupakan nilai eigen berulang dari matriks hermitian H orde $n \times n$, kemudian misalkan $\mathbf{x}_1$ adalah vektor eigen untuk nilai eigen λ_1. Kita bisa mengambil vektor bebas linier n sebarang dengan kondisi hanya yang pertama $\mathbf{x}_1$ dan dengan proses Gram-Schmidt membentuk sebuah himpunan ortonormal untuk vektor sejumlah n yaitu $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, masing-masing memiliki elemen sebanyak n.

Misalkan U_1 adalah matriks dengan $\mathbf{x}_i$ sebagai kolom ke$-i$

$$U_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

seperti yang sudah kita tunjukkan bahwa hal ini mebuat U_1 sebuah matriks uniter. Transformasi uniter $U_1^\dagger H U_1$ memiliki nilai eigen yang sama persis dengan H, karena matriks tersebut memiliki polinomial karakteristik yang sama

$$\begin{aligned} \left|U_1^\dagger H U_1 - \lambda I\right| &= \left|U_1^{-1} H U_1 - \lambda U_1^{-1} U\right| = \left|U_1^{-1}(H - \lambda I) U_1\right| \\ &= \left|U_1^{-1}\right| \left|(H - \lambda I)\right| \left|U_1\right| = \left|(H - \lambda I)\right|. \end{aligned}$$

Selanjutnya karena H hermitian $U_1^\dagger H U_1$ juga hermitian karena

$$\left(U_1^\dagger H U_1\right)^\dagger = (HU_1)^\dagger \left(U_1^\dagger\right)^\dagger = U_1^\dagger H^\dagger U_1 = U_1^\dagger H U_1.$$

Sekarang

$$\begin{aligned} U_1^\dagger H U_1 &= \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1n}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \cdots & x_{nn}^* \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1n}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \cdots & x_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & h_{12} & \cdots & h_{n1} \\ \lambda_1 x_{12} & h_{22} & \cdots & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 x_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dengan kenyatan bahwa $\mathbf{x}_1$ adalah vektor eigen dari H untuk nilai eigen λ_1

$$H\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix},$$

dan menuliskan

$$H\begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{i1} \\ h_{i2} \\ \vdots \\ h_{in} \end{pmatrix},$$

untuk $i \neq 1$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} U_1^\dagger H U_1 &= \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1n}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}^* & x_{n2}^* & \cdots & x_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & h_{21} & \cdots & h_{n1} \\ \lambda_1 x_{12} & h_{22} & \cdots & h_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 x_{1n} & h_{2n} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Kolom pertama ditentukan oleh kondisi ortonormal

$$\begin{pmatrix} x_{i1}^* & x_{i2}^* & \cdots & x_{in}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = 1, \\ 0, & \text{jika } i \neq 1. \end{cases}$$

Baris pertama haruslah transpos dari kolom pertama karena $U_1^\dagger H U_1$ adalah matriks hermitian (atau riil simetrik) dan λ_1 riil dan kompleks konjugat dari nol adalah dirinya sendiri. Fakta krusial dari proses ini adalah elemen ke $n-1$ terakhir dari baris pertama adalah semuanya nol. Hal ini yang membedakan matriks hermitian (atau riil simetrik) dengan matriks persegi lainnya.

Jika λ_1 nilai eigen H berdegenerasi 2, maka dalam polinomial karakteristik $p(\lambda) =$

$|H - \lambda I|$ terdapat faktor $(\lambda_1 - \lambda)^2$. Karena

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) = |H - \lambda I| &= \left|U_1^\dagger H U_1 - \lambda I\right| \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} - \lambda & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda_1 - \lambda) \begin{vmatrix} \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} - \lambda & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix},
\end{aligned}
$$

suku

$$
\begin{vmatrix} \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} - \lambda & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix}
$$

harus memiliki faktor $(\lambda_1 - \lambda)$. Dengan kata lain jika kita mendefinisikan H_1 sebagai submatriks $(n-1) \times (n-1)$

$$
\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = H_1,
$$

maka λ_1 haruslah merupakan nilai eigen dari H_1. Sehingga kita bisa mengulangi proses ini dan membentuk himpunan ortonormal dari sejumlah $n-1$ vektor kolom dengan yang pertama adalah vektor eigen H_1 untuk nilai eigen λ_1. Misalkan himpunan ortonormal ini

$$
\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{22} \\ y_{23} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{32} \\ y_{33} \\ \vdots \\ y_{3n} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{y}_{n-1} = \begin{pmatrix} y_{n2} \\ y_{n3} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix},
$$

dan U_2 adalah matriks uniter lain yang didefinisikan

$$
U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & y_{32} & \cdots & y_{n2} \\ 0 & y_{23} & y_{33} & \cdots & y_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_{2n} & y_{3n} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}
$$

transformasi uniter $U_2^\dagger\left(U_1^\dagger H U_1\right)U_2$ bisa dituliskan sebagai

$$U_2^\dagger\left(U_1^\dagger H U_1\right)U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22}^* & y_{23}^* & \cdots & y_{2n}^* \\ 0 & y_{32}^* & y_{33}^* & \cdots & y_{3n}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_{n2}^* & y_{n3}^* & \cdots & y_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{n2} \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & y_{32} & \cdots & y_{n2} \\ 0 & y_{23} & y_{33} & \cdots & y_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & y_{2n} & y_{3n} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \cdots & \beta_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_{3n} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Jika λ_1 berdegenerasi sebanyak m buah, kita bisa mengulang proses ini m kali. Sisanya bisa didiagonalkan dengan vektor eigen untuk nilai eigen yang berbeda. Setelah matriks $n \times n$ ditransformasikan $n-1$ kali, matriksnya menjadi diagonal.

Marilah kita definisikan

$$U = U_1 U_2 \cdots U_{n-1},$$

maka U adalah matriks uniter karena semua U_i uniter. Dari sini, matriks hermitian H didiagonalkan dengan transformasi uinter $U^\dagger H U$ dan teormanya telah dibuktikan.

Konstruksi ini membawa kita kepada akibat wajar yang sangat penting

- Setiap matriks hermitian (atau riil simetrik) $n \times n$ memiliki sejumlah n vektor eigen ortogonal tanpa memandang jumlah degenerasi nilai eigen.

Hal ini karena $U^\dagger H U = \Lambda$ dengan elemen matriks diagonal Λ adalah nilai eigen dari H. Karena $U^\dagger = U^{-1}$, maka dari persamaan $U(U^\dagger H U) = U\Lambda$ yaitu $HU = U\Lambda$, yang menunjukkan bahwa tiap kolom dari U adalah vektor eigen ternormalisasi dari H.

Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana prosedur ini bekerja.

Contoh 6.5.1. Carilah matriks uniter yang mendiagonalkan matriks hermitian

$$H = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

Solusi 6.5.1. Nilai eigen H adalah akar dari polinomial karakteristik

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2-\lambda & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = -\lambda(\lambda-3)^2 = 0.$$

Maka nilai eigennya adalah

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 0.$$

Jelas terlihat di sini $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 3$ yaitu berdegenerasi 2. Misalkan satu vektor eigen untuk λ_1 adalah

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

sehingga

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2-\lambda_1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Tiga buah persamaan

$$\begin{aligned} -x_1 + \mathrm{i}x_2 + x_3 &= 0, \\ -\mathrm{i}x_1 - x_2 + \mathrm{i}x_3 &= 0, \\ x_1 - \mathrm{i}x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

adalah identik satu sama lain. Sebagai contoh jika kita mengalikan persamaan kedua dengan i kita akan memperoleh persamaan ketiga (persamaan kedua dibisakan dari persamaan pertama dikalikan i). Persamaan

$$x_1 - \mathrm{i}x_2 - x_3 = 0 \tag{6.36}$$

memiliki solusi yang tak hingga. Pilihan sederhana adalah $x_2 = 0$ sehingga $x_1 = x_3$. Maka

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

merupakan sebuah vektor eigen. Tentu

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bebas linier. Sekarang marilah kita gunakan proses Gram-Schmidt untuk memperoleh himpunan ortonormal $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\mathbf{E}_1}{\|\mathbf{E}_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$\mathbf{E}_2$ sudah ternormalisasi dan tegak lurus dengan $\mathbf{E}_1$ dan tentunya $\mathbf{x}_1$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

kemudian $\mathbf{x}_3'$ bisa dihitung yaitu

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_3' &= \mathbf{E}_3 - (\mathbf{E}_3, \mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1 - (\mathbf{E}_3, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 \\
&= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_3 = \frac{\mathbf{x}_3'}{\|\mathbf{x}_3'\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Membentuk sebuah matriks uniter dengan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$

$$U_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

Transformasi similaritas uniter H oleh U_1 adalah

$$\begin{aligned}
U^\dagger H U_1 &= \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\sqrt{2}\mathrm{i} \\ 0 & \sqrt{2}\mathrm{i} & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Karena H dan $U^\dagger HU_1$ memiliki himpunan nilai eigen yang sama, maka $\lambda = 3$ dan $\lambda = 0$ haruslah merupakan nilai eigen dari submatriks

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2}\mathrm{i} \\ \sqrt{2}\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

Hal ini juga bisa ditunjukkan secara langsung. Dua buah vektor eigen H_1 berkaitan dengan $\lambda = 3$ dan $\lambda = 0$ bisa dicari berturut-turut adalah

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i} & \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

dan

$$\begin{aligned} U = U_1U_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i} & \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i} & \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dapat dengan mudah dihitung bahwa

$$\begin{aligned} U^\dagger HU &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i} & \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

yang juga merupakan matriks diagonal dan elemen diagonalnya adalah nilai eigen. Selanjutnya tiga buah kolom dari U adalah tiga buah vektor eigen H yang saling ortogonal.

$$H\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1 : \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$H\mathbf{u}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2 : \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{i} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix},$$

$$H\mathbf{u}_3 = \lambda_3\mathbf{u}_3 : \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1 \\ -\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Kita telah mengikuti langkah pembuktian untuk mengilustrasikan prosedur. Ketika sudah mapan, kita bisa menggunakan teorema dan proses mencari vektor eigen bisa lebih disederhanakan.

Dalam contoh ini kita bisa mencari vektor eigen untuk nilai eigen tak berdegenerasi dengan cara biasa. Untuk nilai eigen berdegenerasi $\lambda = 3$, komponen vektor eigennya (x_1, x_2, x_3) harus memenuhi

$$x_1 - \mathrm{i}x_2 - x_3 = 0,$$

seperti ditunjukkan pada (6.36). Persamaan ini bisa dituliskan sebagai $x_2 = \mathrm{i}(x_3 - x_1)$, sehingga secara umum

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathrm{i}(x_3 - x_1) \\ x_3 \end{pmatrix},$$

dengan x_1 dan x_3 sebarang. Terlihat bahwa pemilihan $x_1 = x_3$, u_1 adalah vektor veigen ternormalisasi

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vektor eigen yang lain harus memenuhi persamaan yang sama dan ortogonal terhadap $\mathbf{u}_1$. Sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathrm{i}(x_3 - x_1) \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

yang memberikan $x_1 + x_3 = 0$ atau $x_3 = -x_1$. Dengan normalisasi vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$, kita memperoleh vektor eigen lain untuk $\lambda = 3$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6.5.4 Diagonalisasi Simultan

Jika A dan B adalah dua buah matriks hermitian dengan orde yang sama, sebuah pertanyaan penting muncul dari sini. Apakah matriks ini bisa didiagonalkan secara simultan dengan sebuah matriks S? Atau dengan kata lain, apakah terdapat sebuah basis sehingga keduanya diagonal? Jawabannya adalah iya, jika matriks tersebut komut.

Pertama kita akan menunjukkan bahwa keduanya bisa didiagonalkan simultan dan kemudian menunjukkan bahwa keduanya komut. Yaitu, jika

$$D_1 = S^{-1}AS \quad \text{dan} \quad D_2 = S^{-1}BS,$$

dengan D_1 dan D_2 adalah matriks diagonal, sehingga $AB = BA$.

Hal ini berasal dari

$$D_1D_2 = S^{-1}ASS^{-1}BS = S^{-1}ABS,$$
$$D_2D_1 = S^{-1}BSS^{-1}AS = S^{-1}BAS.$$

Karena matriks diagonal dengan orde sama selalu komut ($D_1D_2 = D_2D_1$), kita mempunyai

$$S^{-1}ABS = S^{-1}BAS.$$

Dengan mengalikan S dari kiri dan S^{-1} dari kanan, kita mempunyai $AB = BA$.

Sekarang kita akan membuktikan bahwa kebalikannya juga benar. Dalam artian jika keduanya komut, maka keduanya bisa didiagonalkan simultan. Pertama, misalkan A dan B adalah matriks 2×2. Karena matriks hermitian selalu bisa didiagonalkan, misalkan S adalah matriks uniter yang mendiagonalkan A

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

dengan λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen dari A. Misalkan

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Sekarang

$$S^{-1}ABS = S^{-1}ASS^{-1}BS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\lambda_1 & b_{12}\lambda_1 \\ b_{21}\lambda_2 & b_{22}\lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$S^{-1}BAS = S^{-1}BSS^{-1}AS = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\lambda_1 & b_{12}\lambda_2 \\ b_{21}\lambda_1 & b_{22}\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Karena $AB = BA$ maka $S^{-1}ABS = S^{-1}BAS$

$$\begin{pmatrix} b_{11}\lambda_1 & b_{12}\lambda_1 \\ b_{21}\lambda_2 & b_{22}\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\lambda_1 & b_{12}\lambda_2 \\ b_{21}\lambda_1 & b_{22}\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Dari sini kita memperoleh

$$b_{21}\lambda_2 = b_{21}\lambda_1, \quad \text{dan} \quad b_{12}\lambda_1 = b_{12}\lambda_2.$$

Jika $\lambda_1 \neq \lambda_2$, maka $b_{12} = b_{21} = 0$. Dengan kata lain

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Dengan kata lain A dan B terdiagonalkan secara simultan.

Jika $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, kita tidak bisa menarik kesimpulan $S^{-1}BS$ diagonal. Dalam kasus ini

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya karena B hermitian, maka transformasi similaritas $S^{-1}BS$ juga hermitian, sehingga $S^{-1}BS$ bisa didiagonalkan. Misalkan T adalah matriks uniter yang mendiagonalkan $S^{-1}BS$

$$T^{-1}(S^{-1}BS)T = \begin{pmatrix} \lambda_1' & 0 \\ 0 & \lambda_2' \end{pmatrix}.$$

Di lain pihak

$$T^{-1}(S^{-1}AS)T = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}T^{-1}T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Sehingga perkalian matriks $U = ST$ mendiagonalkan A dan B. Sehingga tanpa atau dengan degenerasi, sepanjang A dann B komut, maka keduanya bisa didiagonalkan simultan.

Meskipun kita hanya menggunakan matriks 2×2, “bukti” yang sama bisa dengan mudah digunakan untuk matriks dengan orde lebih tinggi.

Contoh 6.5.2. Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Apakah A dan B bisa didiagonalkan secara simultan? Jika bisa, carilah matriks uniter U yang bisa mendiagonalkannya!

Solusi 6.5.2.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Maka $[A, B] = 0$, sehingga keduanya bisa didiagonalkan simultan

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Vektor eigen ternormalisasinya untuk $\lambda = 1$ dan $\lambda = 3$ berturut-turut

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S^{-1}AS = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$S^{-1}BS = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sehingga keduanya terdiagonalkan simultan. Hal ini juga menunjukkan bahwa 1 dan 5 merupakan nilai eigen dari matriks B. Hal ini bisa dengan mudah diverifikasi karena

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0.$$

Jika kita mendiagonalkan B terlebih dahulu, kita akan memperoleh hasil yang benar-benar sama.

6.6 Matriks Normal

Sebuah matriks persegi dikatakan sebagai matriks normal jika dan hanya jika matriks tersebut komut dengan konjugat hermitiannya. Maka A sebuah matriks normal jika dan hanya jika

$$AA^{\dagger} = A^{\dagger}A. \tag{6.37}$$

Dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa semua matriks hermitian (atau riil simetrik), anti hermitian (atau riil anti simetrik) dan uniter (atau riil ortogonal) merupakan matriks normal. Hal yang harus kita lakukan adalah mengganti matriks ini dalam (6.37). Dengan sifat dari definisi, jelas bahwa dua buah sisi persamaan tersebut sama.

Sejauh ini kita telah menunjukkan bahwa matriks hermitian bisa didiagonalkan dengan menggunakan transformasi similaritas uniter. Apa yang akan kita lihat adalah generalisasi dari teorema ini yaitu setiap matriks normal bisa didiagonalkan.

Pertama jika diberikan matriks persegi A, semua elemennya diketahui, sehingga kita bisa mengambil konjugat hermitiannya $A^{\dagger}$. Kemudian misalkan

$$B = \frac{1}{2}\left(A + A^{\dagger}\right),$$
$$C = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(A - A^{\dagger}\right).$$

Sehingga

$$A = B + \mathrm{i}C, \tag{6.38}$$

karena $\left(A^{\dagger}\right)^{\dagger} = A$ dan $(A+B)^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger}$

$$B^{\dagger} = \frac{1}{2}\left(A + A^{\dagger}\right)^{\dagger} = \frac{1}{2}\left(A^{\dagger} + A\right) = B,$$
$$C^{\dagger} = \frac{1}{2\mathrm{i}^{*}}\left(A - A^{\dagger}\right)^{\dagger} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(A^{\dagger} - A\right) = C.$$

Sehingga B dan C semuanya hermitian. Dengan kata lain semua matriks simetrik bisa didekomposisi menjadi dua buah matriks hermitian seperti pada (6.38). Selanjutnya

$$BC = \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(A^2 - AA^{\dagger} + A^{\dagger}A - A^{\dagger 2}\right)$$
$$CB = \frac{1}{4\mathrm{i}}\left(A^2 - A^{\dagger}A + AA^{\dagger} - A^{\dagger 2}\right).$$

Jelas bahwa jika $A^{\dagger}A = AA^{\dagger}$, maka $BC = CB$. Dengan kata lain jika A matriks normal maka B dan C komut.

Kita telah menunjukkan dalam Subbab 6.5 bahwa jika B dan C komut maka keduanya bisa didiagonalkan simultan. Dalam artian, kita bisa mencari sebuah matriks uniter S sehingga $S^{-1}BS$ dan $S^{-1}CS$ semuanya diagonal. Karena

$$S^{-1}AS = S^{-1}BS + \mathrm{i}S^{-1}CS,$$

sehingga $S^{-1}AS$ haruslah diagonal.

Sebaliknya, jika $S^{-1}AS = D$ diagonal, maka

$$\left(S^{-1}AS\right)^{\dagger} = S^{-1}A^{\dagger}S = D^{\dagger} = D^{*},$$

karena S matriks uniter dan D matriks diagonal. Maka:

$$S^{-1}AA^{\dagger}S = \left(S^{-1}AS\right)\left(S^{-1}A^{\dagger}S\right) = DD^{*},$$
$$S^{-1}A^{\dagger}AS = \left(S^{-1}A^{\dagger}S\right)\left(S^{-1}AS\right) = D^{*}D.$$

Karena $DD^{*} = D^{*}D$, maka kita menyimpulkan

- Sebuah matriks bisa didiagonalkan dengan transformasi similaritas uniter jika dan hanya jika matriks tersebut matriks normal.

Sehingga baik matriks hermitian maupun matriks uniter keduanya bisa didiagonalkan dengan transformasi similaritas uniter.

Nilai eigen dari matriks hermitian selalu riil. Hal ini mengapa dalam mekanika kuantum kuantitas fisis yang teramati berkaitan dengan nilai eigen operator hermitian, karena hasil pengukuran pastilah merupakan bilangan riil. Tetapi vektor eigen dari matriks hermitian bisa kompleks, sehingga matriks uniter yang mendiagonalkan matriks hermitian, secara umum, juga kompleks.

Sebuah matriks riil simetrik juga merupakan matriks hermitian, sehingga nilai eigennya haruslah juga riil. Karena matriks dan nilai eigen semuanya riil, maka vektor eigennya juga bisa diambil riil. Sehingga matriks pendiagonalnya juga merupakan matriks riil ortogonal.

Matriks uniter, termasuk matriks riil ortogonal, bisa didiagonalkan dengan trnansformasi similaritas uniter. Tetapi secara umum, nilai eigen dan vektor eigen matriks uniter adalah kompleks. Maka matriks pendiagonalnya bukan merupakan matriks riil ortogonal, melainkan matriks uniter kompleks. Sebagai contoh, matriks rotasi adalah matriks riil ortogonal, tetapi hanya bisa didiagonalkan dengan matriks uniter kompleks.

6.7 Fungsi sebuah Matriks

6.7.1 Fungsi Polinomial sebuah Matriks

Matriks persegi sebarang A bisa dikalikan dengan dirinya sendiri. Hukum asosiatif dari perkalian matriks menjamin perkalian A dengan dirinya sendiri sebanyak n kali, yang dinyatakan dengan A^n, merupakan operasi tak ambigu. Maka

$$A^m A^n = A^{m+n}.$$

Selanjutnya kita telah mendefinisikan invers sebuah matriks tak singular A^{-1} yaitu $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Sehingga secara alami kita bisa mendefinisikan

$$A^0 = A^{1-1} = AA^{-1} = I, \quad \text{dan} \quad A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n.$$

Dengan definisi ini, kita bisa mendefinisikan fungsi polinomial dari matriks persegi melalui cara yang persis sama dengan polinomial skalar.

Sebagai contoh, jika $f(x) = x^2+5x+4$ dan $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, kita mendefinsikan $f(A)$ sebagai

$$f(A) = A^2 + 5A + 4.$$

Karena

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}.$$

Menarik untuk memperhatikan bahwa $f(A)$ bisa dihitung dengan menggunakan suku yang difaktorkan dari $f(x)$. Sebagai contoh

$$f(x) = x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4),$$

sehingga

$$\begin{aligned} f(A) &= (A+I)(A+4I) \\ &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 18 & 30 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Contoh 6.7.1. Carilah $f(A)$ jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$$

Solusi 6.7.1.

$$f(A) = \frac{A}{A^2-1} = A\left(A^2-1\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perhatikan bahwa $f(A)$ juga bisa dihitung dengan pecahan parsial. Karena

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1},$$

$$\begin{aligned}
f(A) &= \frac{1}{2}(A-I)^{-1} + \frac{1}{2}(A+I)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

6.7.2 Evaluasi Fungsi Matriks dengan Pendiagonalan

Ketika terdapat matriks persegi A mirip dengan matriks diagonal, penghitungan $f(A)$ bisa lebih disederhanakan.

Jika A terdiagonalkan maka

$$S^{-1}AS = D,$$

dengan D adalah matriks diagonal. Maka:

$$\begin{aligned}
D^2 &= S^{-1}ASS^{-1}AS = S^{-1}A^2S, \\
D^k &= S^{-1}A^{k-1}SS^{-1}AS = S^{-1}A^kS.
\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
A^k &= SD^kS^{-1} \\
A^n + A^m &= SD^nS^{-1} + SD^mS^{-1} = S\left(D^n + D^m\right)S^{-1}.
\end{aligned}$$

Jika $f(A)$ merupakan sebuah polinomial, maka:

$$f(A) = Sf(D)S^{-1}.$$

Selanjutnya karena D adalah matriks diagonal, maka elemennya adalah nilai eigen dari A

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix},$$

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$f(A) = S\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}S^{-1}.$$

Contoh 6.7.2. Carilah $f(A)$ jika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - x - 3.$$

Solusi 6.7.2. Pertama, kita cari nilai eigen dari A,

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$$

Vektor eigen untuk $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 2$ berturut-turut adalah

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

dan

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maka

$$f(A) = Sf(D)S^{-1} = S \begin{pmatrix} f(1) & 0 \\ 0 & f(2) \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Karena

$$f(1) = -1, \; f(2) = 3,$$

$$f(A) = Sf(D)S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Contoh 6.7.3. Carilah matriks A sehingga

$$A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solusi 6.7.3. Pertama, marilah kita diagonalkan ruas kanan

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & 3 \\ 5 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 9) = 0.$$

Vektor eigen untuk $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 9$ berturut-turut adalah

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dan

$$D = S^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$S^{-1}(A^2 - 4A + 4I)S = S^{-1}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ruas kiri persamaan juga harus diagonal, karena ruas kanan berupa matriks diagonal. Karena kita telah menunjukkan sepanjang $S^{-1}AS$ diagonal, maka $S^{-1}A^kS$ akan diagonal. Kita bisa mengasumsikan

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Dari sini kita bisa memperoleh

$$S^{-1}(A^2 - 4A + 4I)S = \begin{pmatrix} x_1^2 - 4x_1 + 4 & 0 \\ 0 & x_2^2 - 4x_2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

yang memberikan

$$\begin{aligned} x_1^2 - 4x_1 + 4 &= 1 \\ x_2^2 - 4x_2 + 4 &= 9. \end{aligned}$$

Dari persamaan pertama kita mempunyai $x_1 = 1,\ 3$, dan dari persamaan kedua kita memperoleh $x_2 = 5,\ -1$. Sehingga terdapat empat buah kombinasi untuk $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ yaitu

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga persamaan asalnya memiliki empat buah solusi

$$A_1 = S\Lambda_1 S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

dan dengan cara yang sama

$$A_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Untuk tiap fungsi skalar yang bisa dinyatakan dalam deret tak hingga, sebuah fungsi matriks yang berhubungan bisa didefinisikan. Sebagai contoh, dengan

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots,$$

dan

$$\mathrm{e}^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots.$$

Jika A terdiagonalkan, maka

$$S^{-1}AS = D, \quad A^n = SD^nS^{-1},$$
$$\mathrm{e}^A = S\left(I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{3!}D^3 + \cdots\right)S^{-1},$$

dengan

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Sehingga kita bisa memperoleh

$$\mathrm{e}^A = S \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2 \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2}\lambda_n^2 + \cdots \end{pmatrix} S^{-1}$$
$$= S \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Contoh 6.7.4. Hitunglah e^A, jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solusi 6.7.4. Karena A simetrik maka terdiagonalkan.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0,$$

yang memberikan $\lambda = 6,\ -4$. Vektor eigennya adalah

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Maka

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^A &= S\begin{pmatrix} \mathrm{e}^6 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-4} \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^6 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\mathrm{e}^6 + \mathrm{e}^{-4}) & (\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^{-4}) \\ (\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^{-4}) & (\mathrm{e}^6 + \mathrm{e}^{-4}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6.7.3 Teorema Cayley-Hamilton

Teorem Cayley-Hamilton yang terkenal menyatakan bahwa setiap matriks persegi memenuhi persamaan karakteristiknya sendiri.

Hal ini berarti, jika $P(\lambda)$ adalah polinomial karakteristik dari matriks A orde ke$-n$, maka

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0,$$

sehingga

$$P(A) = c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_0 I = 0.$$

Untuk membuktikan teorema ini, misalkan $\mathbf{x}_i$ adalah vektor eigen untuk λ_i. Sehingga

$$P(\lambda_i) = 0, \quad A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i.$$

Sekarang

$$\begin{aligned} P(A)\mathbf{x}_i &= \left(c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_0 I\right)\mathbf{x}_i \\ &= \left(c_n\lambda_i^n + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \cdots + c_0\right)\mathbf{x}_i \\ &= P(\lambda_i)\mathbf{x}_i = 0\mathbf{x}_i. \end{aligned}$$

Karena ini berlaku untuk semua vektor eigen dari A, $P(A)$ haruslah matriks nol.

Sebagai contoh, jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3-2 & 4-4 \\ 4-4 & 5-3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Invers dengan Teorema Cayley-Hamilton

Teorema Cayley-Hamilton bisa digunakan untuk mencari invers dari matriks persegi. Kita mulai dari persamaan karakteristik dari A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = c_n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0,$$

kita memiliki

$$P(A) = c_n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = 0.$$

Mengalikan persamaan dari kiri dengan A^{-1}, kita peroleh

$$A^{-1}P(A) = c_n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \cdots + c_1 I + c_0 A^{-1} = 0.$$

Sehingga

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}\left(c_n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \cdots + c_1 I\right).$$

Contoh 6.7.5. Carilah A^{-1} dengan teorema Cayley-Hamilton jika

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solusi 6.7.5.

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 2 & 8 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3,$$

kemudian

$$\begin{aligned} P(A) &= 6I - 11A + 6A^2 - A^3, \\ A^{-1}P(A) &= 6A^{-1} - 11I + 6A - A^2 = 0, \\ A^{-1} &= \frac{1}{6}\left(A^2 - 6A + 11I\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{6}\left[\begin{pmatrix} 15 & 23 & -17 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & 22 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 42 & -30 \\ 0 & 24 & -6 \\ 12 & 48 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & -19 & 13 \\ -2 & -5 & 5 \\ -8 & -26 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dapat dengan mudah diverifikasi bahwa

$$A^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & -19 & 13 \\ -2 & -5 & 5 \\ -8 & -26 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriks dengan Pangkat yang Tinggi

Salah satu aplikasi penting dari teorema Cayley-Hamilton adalah dalam representasi matriks dengan pangkat yang derajatnya tinggi. Dari persamaan $P(A) = 0$, kita mempunyai

$$A^n = -\frac{1}{c_n}\left(c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \cdots + c_1 A + c_0 I\right). \tag{6.39}$$

Kalikan dengan A

$$A^{n+1} = -\frac{1}{c_n}\left(c_{n-1}A^{n} + c_{n-2}A^{n-1} + \cdots + c_1 A^2 + c_0 A\right), \tag{6.40}$$

dan menggantikan A^n dari (6.39) ke (6.40), kita mempunyai

$$A^{n+1} = \left(\frac{c_{n-1}^2}{c_n^2} - \frac{c_{n-2}}{c_n}\right)A^{n-1} + \cdots + \left(\frac{c_{n-1}c_1}{c_n^2} - \frac{c_0}{c_n}\right) + \frac{c_{n-1}c_0}{c_n^2}I. \tag{6.41}$$

Jelas bahwa proses ini bisa dilanjutkan. Sehingga sebarang pangkat bilangan bulat dari sebuah matriks berorde n bisa direduksi menjadi polinomial dari matriks, dengan derajat pangkat paling tinggi adalah $n-1$. Sehingga kita bisa memperoleh pangkat yang tinggi dari A.

Contoh 6.7.6. Carilah A^{100}, jika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solusi 6.7.6. Karena

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda-4)(\lambda+2) = 0,$$

nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = -2$. Nilai eigen dari A^{100} haruslah λ_1^{100} dan λ_2^{100}, yaitu

$$A^{100}\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{100}\mathbf{x}_1, \quad A^{100}\mathbf{x}_2 = \lambda_2^{100}\mathbf{x}_2.$$

Di lain pihak, dari teorema Cayley-Hamilton, kita tahu bahwa A^{100} bisa dinyatakan sebagai kombinasi linier dari A dan I karena A adalah matriks dengan orde 2 ($n = 2$).

$$A^{100} = \alpha A + \beta I,$$

dan

$$\begin{aligned} A^{100}\mathbf{x}_1 &= (\alpha A + \beta I)\mathbf{x}_1 = (\alpha\lambda_1 + \beta)\mathbf{x}_1, \\ A^{100}\mathbf{x}_2 &= (\alpha A + \beta I)\mathbf{x}_2 = (\alpha\lambda_2 + \beta)\mathbf{x}_2. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\lambda_1^{100} = \alpha\lambda_1 + \beta, \quad \lambda_2^{100} = \alpha\lambda_2 + \beta.$$

Dari sini

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1^{100} - \lambda_2^{100}\right) = \frac{1}{6}\left(4^{100} - 2^{100}\right) \\ \beta &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1\lambda_2^{100} - \lambda_2\lambda_1^{100}\right) = \frac{1}{3}\left(4^{100} + 2^{101}\right). \end{aligned}$$

Maka

$$A^{100} = \frac{1}{6}\left(4^{100} - 2^{100}\right)A + \frac{1}{3}\left(4^{100} + 2^{101}\right)I.$$

6.8 Latihan

1. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$\begin{pmatrix} 19 & 10 \\ -30 & -16 \end{pmatrix}.$$

Jawab: $\lambda_1 = 4$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$\begin{pmatrix} 6 - 2\mathrm{i} & -1 + 3\mathrm{i} \\ 9 + 3\mathrm{i} & -4 + 3\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Jawab: $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 - 2\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Jawab: $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = 2$, $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Jika $U^\dagger U = I$, tunjukkan bahwa (a). kolom dari U membentuk himpunan ortonormal; (b) $UU^\dagger = I$ baris dari U membentuk himpunan ortonormal.

5. Tunjukkan bahwa nilai eigen matriks anti hermitian adalah nol dan imajiner.

6. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks
$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 6\mathrm{i} \\ -6\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix},$$
dan tunjukkan bahwa vektor eigennya saling ortogonal.
Jawab: $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

7. Bentuklah sebuah matriks uniter U dengan dua buah vektor eigen ternormalisasi dari soal sebelumnya dan tunjukkan bahwa
$$U^\dagger U = I$$
Jawab: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 1 \\ 1 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

8. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks simetrik berikut
$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}.$$
Buatlah matriks ortogonal U dengan dua buah vektor eigen ternormalisasi dan tunjukkan bahwa
$$\tilde{U}AU = \Lambda,$$
dengan Λ sebuah matriks diagonal yang elemennya adalah nilai eigen dari A.
Jawab: $U = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

9. Diagonalkan matriks hermitian berikut
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$$
dengan transformasi similaritas uniter
$$U^\dagger AU = \Lambda.$$
Carilah matriks uniter U dan matriks diagonal Λ.
Jawab: $U = \begin{pmatrix} -\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Diagonalkan matriks simetrik berikut

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dengan transformasi similaritas

$$U^{\dagger} A U = \Lambda.$$

Carilah matriks uniter U dan matriks diagonal Λ.

Jawab: $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

11. Diagonalkan matriks simetrik berikut

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -7 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & -8 \\ 10 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

dengan transformasi similaritas

$$\tilde{U} A U = \Lambda.$$

Carilah matriks uniter U dan matriks diagonal Λ.

Jawab: $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$

12. Jika A adalah matriks simetrik ($\tilde{A} = A$), S adalah sebuah matriks ortogonal dan $A' = S^{-1}AS$, tunjukkan bahwa A' juga matriks simetrik.

13. Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah matriks kolom dalam ruang dua dimensi yang dihubungkan dengan persamaan

$$\mathbf{v} = C\mathbf{u},$$

dengan

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

carilah C^{-1} dengan metode berikut

(a) Aturan Cramer.

(b) Tunjukkan C ortogonal, sehingga $C^{-1} = \tilde{C}$.

(c) Persamaan $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$ berarti merotasikan $\mathbf{u}$ menjadi $\mathbf{v}$. Karena $\mathbf{u} = C^{-1}\mathbf{v}$, C^{-1} harus merotasikan kembali $\mathbf{v}$ menjadi $\mathbf{u}$. Sehingga C^{-1} haruslah merupakan matriks rotasi dengan arah berlawanan dengan C.

14. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks rotasi dua dimensi

$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Carilah matriks uniter U sehingga

$$U^{\dagger} C U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Jawab: $\lambda_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$

15. Tunjukkan bahwa dalam bentuk kanonik, ekspresi kuadratik

$$Q(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 48x_1x_2 - 7x_2^2$$

adalah

$$Q'(x_1', x_2') = 25x_1'^2 - 25x_2'^2,$$

dengan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

Carilah matriks ortogonal S.
Jawab:

$$S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

16. Jika $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, dan $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1$, carilah $f(A)$.

Jawab $\begin{pmatrix} -13 & -26 \\ 13 & 26 \end{pmatrix}$.

17. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, carilah A^n dan $\lim_{n\to\infty} A^n$.

Jawab: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{8}{3} - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$, $\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

18. Carilah X, jika $X^3 = \begin{pmatrix} -6 & 14 \\ -7 & 15 \end{pmatrix}$.

Jawab: $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

19. Selesaikan persamaan

$$M^2 - 5M + 3I = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Jawab: $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

20. Menurut teorema Cayley-Hamilton, tiap matriks persegi memenuhi persamaan karakteristiknya sendiri. Buktikan untuk matriks berikut

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

21. Carilah A^{-1} dengan teorema Cayley-Hamilton jika

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jawab: $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$