

K.T. Tang

**Metode Matematik
untuk Teknik dan Sains
2**

Analisis Vektor, Persamaan Diferensial Biasa
dan Transformasi Laplace

diterjemahkan oleh:

Imamal Muttaqien

Jurusan Fisika

UIN SUNAN GUNUNG DJATI

BANDUNG

Pengantar

Daftar Isi

Pengantar	i
I Analisis Vektor	1
1 Vektor	3
1.1 Vektor Terikat dan Vektor Bebas	4
1.2 Operasi Vektor	4
1.2.1 Perkalian Skalar	5
1.2.2 Vektor Satuan	5
1.2.3 Penjumlahan dan Pengurangan	5
1.2.4 Perkalian Titik	7
1.2.5 Komponen Vektor	11
1.2.6 Perkalian Silang	14
1.2.7 Perkalian Rangkap Tiga	18
1.3 Garis dan Bidang	24
1.3.1 Garis Lurus	25
1.3.2 Bidang	29
1.4 Latihan	33
2 Kalkulus Vektor	35
2.1 Turunan Waktu	36
2.1.1 Kecepatan dan Percepatan	36

2.1.2	Vektor Kecepatan Sudut	37
2.2	Turunan dalam Kerangka Acuan non Inersial	43
2.3	Teori Ruang Lengkung	47
2.4	Operator Gradien	51
2.4.1	Gradien Fungsi Skalar	51
2.4.2	Interpretasi Geometrik dari Gradien	54
2.4.3	Integral Garis sebagai Vektor Gradien	56
2.5	Divergensi Vektor	61
2.5.1	Fluks Medan Vektor	62
2.5.2	Teorema Divergensi	65
2.5.3	Persamaan Kontinuitas	69
2.6	Curl Vektor	70
2.6.1	Teorema Stokes	71
2.7	Operasi Diferensial Vektor Lanjut	78
2.7.1	Aturan Perkalian	79
2.7.2	Turunan Kedua	81
2.8	Teorema Integral Lanjut	85
2.8.1	Teorema Green	85
2.8.2	Integral Lainnya	86
2.9	Klasifikasi Medan Vektor	88
2.9.1	Medan Irrotasional dan Potensial Skalar	88
2.9.2	Medan Solenoidal dan Potensial Vektor	91
2.10	Teori Medan Vektor	95
2.10.1	Fungsi Koordinat Relatif	95
2.10.2	Divergensi $\hat{\mathbf{R}}/ R ^2$ sebagai Fungsi Delta	97
2.10.3	Teorema Helmholtz	100
2.10.4	Persamaan Poisson dan Laplace	103
2.10.5	Teorema Keunikan	105
2.11	Latihan	105

3	Koordinat Lengkung	111
3.1	Koordinat Silinder	111
3.1.1	Operasi Diferensial	114
3.1.2	Elemen Infinitesimal	118
3.2	Koordinat Bola	120
3.2.1	Operasi Diferensial	123
3.2.2	Elemen Infinitesimal	126
3.3	Sistem Koordinat Lengkung Umum	128
3.3.1	Permukaan Koordinat dan Kurva Koordinat	128
3.3.2	Operasi Diferensial dalam Sistem Koordinat Lengkung	131
3.4	Koordinat Eliptikal	136
3.4.1	Permukaan Koordinat	137
3.4.2	Hubungan dengan Koordinat Persegi	139
3.4.3	Koordinat Bola Prolate	141
3.5	Integral Lipat	142
3.5.1	Jacobian untuk Integral Lipat Dua	142
3.5.2	Jacobian untuk Integral Lipat Tiga	144
3.6	Latihan	148
4	Transformasi Vektor dan Tensor Cartesian	153
4.1	Sifat-sifat Transformasi Vektor	154
4.1.1	Transformasi Vektor Posisi	154
4.1.2	Persamaan Vektor	156
4.1.3	Sudut Euler	158
4.1.4	Sifat-sifat Matriks Rotasi	160
4.1.5	Definisi Vektor dan Skalar dalam Sifat Transformasi	163
4.2	Tensor Cartesian	167
4.2.1	Definisi	167
4.2.2	Tensor Delta Kronecker dan Tensor Levi Civita	169
4.2.3	Outer Product	172

4.2.4	Kontraksi	174
4.2.5	Konvensi Penjumlahan	176
4.2.6	Medan Vektor	178
4.2.7	Aturan Pembagian	181
4.2.8	Sifat Simetri Tensor	182
4.2.9	Pseudotensor	184
4.3	Contoh Fisika	188
4.3.1	Tensor Momen Inersia	188
4.3.2	Tensor Stress	189
4.3.3	Tensor Strain dan Hukum Hooke	193
4.4	Latihan	195
 II Persamaan Diferensial dan Transformasi Laplace		201
 5 Persamaan Diferensial Biasa		203
5.1	Persamaan Diferensial Orde Satu	203
5.1.1	Persamaan dengan Variabel Separabel	204
5.1.2	Persamaan Tereduksikan dalam Jenis Separabel	206
5.1.3	Persamaan Diferensial Eksak	207
5.1.4	Faktor Integrasi	209
5.2	Persamaan Diferensial Linier Orde Satu	212
5.2.1	Persamaan Bernoulli	214
5.3	Persamaan Diferensial Linier Orde Tinggi	215
5.4	Persamaan Diferensial Homogen dengan Koefisien Konstan	218
5.4.1	Persamaan Karakteristik dengan Akar Berbeda	219
5.4.2	Persamaan Karakteristik dengan Akar Sama	219
5.4.3	Persamaan Diferensial dengan Akar Kompleks	220
5.5	Persamaan Diferensial Linier Tak Homogen dengan Koefisien Konstan	224
5.5.1	Metode Koefisien Tak Tentu	224
5.5.2	Penggunaan Eksponensial Kompleks	231

5.5.3	Persamaan Diferensial Euler-Cauchy	232
5.5.4	Variasi Parameter	235
5.6	Getaran Mekanik	238
5.6.1	Getaran Bebas	238
5.6.2	Getaran Bebas dengan Redaman Viskos	240
5.6.3	Getaran Bebas dengan Redaman Coloumb	244
5.6.4	Getaran Terpaksa tanpa Redaman	247
5.6.5	Getaran Terpaksa dengan Redaman Viskos	249
5.7	Rangkaian Listrik	252
5.7.1	Penghitungan Analog	253
5.7.2	Solusi Kompleks dan Impedansi	255
5.8	Sistem Persamaan Diferensial Linier Simultan	256
5.8.1	Reduksi Sistem menjadi Sebuah Persamaan	257
5.8.2	Aturan Cramer untuk Persamaan Diferensial Simultan	258
5.8.3	Persamaan Simultan sebagai Persoalan Nilai Eigen	260
5.8.4	Transformasi Persamaan Orde n menjadi Sistem n Persamaan Orde Pertama	262
5.8.5	Osilator Tergandeng dan Moda Normal	263
5.9	Metode Lain untuk Persamaan Diferensial	267
5.10	Latihan	267
6	Transformasi Laplace	273
6.1	Definisi dan Sifat-sifat Transformasi Laplace	273
6.1.1	Transformasi Laplace - Sebuah Operator Linier	273
6.1.2	Transformasi Laplace untuk Turunan	276
6.1.3	Substitusi: Pergeseran s	277
6.1.4	Turunan sebuah Transformasi	278
6.1.5	Tabel Transformasi Laplace	278
6.2	Solusi Persamaan Diferensial dengan Transformasi Laplace	280
6.2.1	Invers Transformasi Laplace	280
6.2.2	Menyelesaikan Persamaan Diferensial	290

6.3	Transformasi Laplace Fungsi Impulsif dan Fungsi Tangga	293
6.3.1	Fungsi Delta Dirac	293
6.3.2	Fungsi Tangga Heaviside	296
6.4	Persamaan Diferensial dengan Fungsi Gaya Diskontinu	299
6.5	Konvolusi	304
6.5.1	Integral Duhamel	305
6.5.2	Teorema Konvolusi	306
6.6	Sifat-sifat Transformasi Laplace	309
6.6.1	Transformasi Integral	309
6.6.2	Integrasi Transformasi	310
6.6.3	Penskalaan	311
6.6.4	Transformasi Laplace Fungsi Periodik	312
6.6.5	Invers Transformasi Laplace Melibatkan Fungsi Periodik	314
6.6.6	Transformasi Laplace dan Fungsi Gamma	315
6.7	Ringkasan Operasi Transformasi Laplace	316
6.8	Aplikasi Tambahan Transformasi Laplace	318
6.8.1	Menghitung Integral	318
6.8.2	Persamaan Diferensial dengan Koefisien Variabel	321
6.8.3	Persamaan Integral dan Integrodiferensial	323
6.9	Inversi dengan Integral Kontur	325
6.10	Latihan	328

Bagian I

Analisis Vektor

1

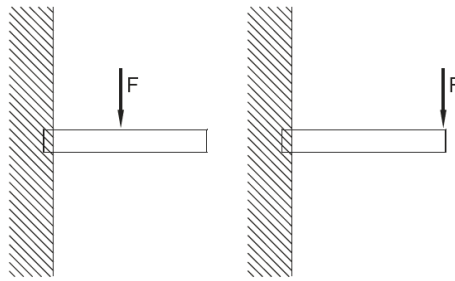
Vektor

Vektor digunakan ketika besar dan arah dari beberapa besaran fisika diperlukan. Contoh besaran tersebut adalah kecepatan, percepatan, gaya, medan listrik dan magnetik. Sebuah besaran yang hanya ditandai oleh besarnya dikenal sebagai skalar. Massa dan suhu adalah contoh besaran skalar.

Sebuah vektor ditandai oleh besar dan arah, tetapi tidak semua besaran yang memiliki besar dan arah adalah vektor. Misalnya, dalam mempelajari tentang kekuatan bahan, stress (tekanan) memiliki besar dan arah. Tetapi stress adalah tensor rank dua, yang akan kita pelajari pada bab selanjutnya. Vektor bisa dianalisis baik dengan geometri atau dengan aljabar. Pendekatan aljabar berpusat pada sifat-sifat transformasi vektor. Hal ini memungkinkan generalisasi dan mengarah ke analisis tensor. Oleh karena itu vektor fundamental dan penting dalam banyak persoalan matematika fisika.

Namun, untuk alasan pedagogik kita akan mulai dengan vektor geometrik, karena lebih mudah untuk divisualisasikan. Selain itu, sebagian besar pembaca mungkin sudah memiliki beberapa pengetahuan tentang pendekatan analitik vektor secara grafik.

Sebuah vektor biasanya ditunjukkan dengan huruf tebal, seperti \mathbf{V} , atau panah di atas \vec{V} . Walaupun ada cara lain untuk mengekspresikan vektor, apapun konvensi yang Anda pilih, sangat penting bahwa vektor dan skalar besaran yang dinyatakan oleh simbol yang berbeda. Vektor secara grafik diwakili oleh segmen garis berarah. Panjang segmen sebanding dengan besarnya kuantitas vektor dengan skala yang sesuai. Arah vektor ditandai dengan sebuah mata panah di salah satu ujung segmen, yang dikenal sebagai ujung vektor. Ujung lainnya disebut ekor. Besarnya vektor disebut norm vektor. Kita akan menjumpai, huruf V digunakan untuk menyatakan norm \mathbf{V} . Kadang-kadang, norm \mathbf{V} juga diwakili oleh $|\mathbf{V}|$ atau $\|\mathbf{V}\|$.



Gambar 1.1: Vektor terikat yang merepresentasikan gaya yang bekerja pada balok tidak bisa dipindahkan sejajar dengan dirinya sendiri.

1.1 Vektor Terikat dan Vektor Bebas

Terdapat dua jenis vektor, vektor terikat dan bebas. Vektor terikat posisinya tetap. Misalnya, dalam berurusan dengan gaya dengan titik atau garis bekerjanya tidak bisa digeser, maka perlu untuk memikirkannya sebagai vektor terikat. Pertimbangkan kasus yang ditunjukkan pada Gambar 1.1. Dua gaya yang besar dan arahnya sama bekerja di dua titik berbeda di sepanjang balok. Jelas torsi yang dihasilkan di ujung yang mendukungnya dan perpindahan di ujung bebas sama sekali berbeda dalam kedua kasus. Oleh karena itu gaya ini merupakan vektor terikat. Biasanya dalam statika, struktur, dan kekuatan bahan, gaya adalah vektor terikat; kita perlu memperhatikan arah, besar, dan titik aplikasinya.

Sebuah vektor bebas benar-benar dikarakterisasi dengan besar dan arah. Vektor ini adalah yang dibahas dalam analisis matematika. Apa yang akan kita jumpai, vektor dipahami sebagai vektor bebas kecuali dinyatakan lain.

Dua vektor bebas yang besar, atau panjangnya, sama dan arah yang sama dikatakan sama, terlepas dari titik-titik dalam ruang dari mana mereka bisa ditarik. Dengan kata lain, suatu kuantitas vektor bisa diwakili sama baiknya oleh salah satu segmen garis yang tak terbatas, semua memiliki panjang yang sama dan arah yang sama. Oleh karena itu, kita biasa mengatakan bahwa vektor bisa dipindahkan sejajar dengan dirinya sendiri tanpa perubahan.

1.2 Operasi Vektor

Operasi matematik yang didefinisikan untuk skalar, seperti penjumlahan dan perkalian, tidak bisa diaplikasikan untuk vektor, karena vektor tidak hanya memiliki besar tetapi juga arah. Jadi sejumlah operasi vektor harus diperkenalkan. Operasi ini berupa aturan untuk mengkombinasikan sebuah vektor dengan vektor lain atau vektor

dengan skalar. Terdapat berbagai cara untuk mengkombinasikannya. Beberapa kombinasi yang sangat berguna ada di dalam subbab ini.

1.2.1 Perkalian Skalar

Jika c adalah sebuah bilangan positif, persamaan

$$\mathbf{A} = c\mathbf{B} \quad (1.1)$$

berarti arah vektor \mathbf{A} sama dengan arah \mathbf{B} , dan besar \mathbf{A} adalah c kali besar \mathbf{B} . Jika c negatif, persamaan ini berarti arah \mathbf{A} berlawanan arah dengan \mathbf{B} dan besar \mathbf{A} adalah c kali besar \mathbf{B} .

1.2.2 Vektor Satuan

Sebuah vektor satuan adalah sebuah vektor yang memiliki besar satu satuan. Jika kita membagi sebuah vektor \mathbf{V} dengan besarnya V , kita memperoleh sebuah vektor satuan dalam arah \mathbf{V} . Jadi, sebuah vektor satuan \mathbf{n} dalam arah \mathbf{V} diberikan oleh

$$\mathbf{n} = \frac{1}{V}\mathbf{V}. \quad (1.2)$$

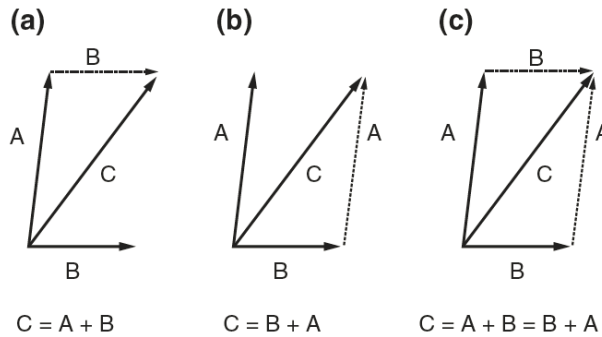
Kadang sebuah topi diberikan pada simbol vektor ($\hat{\mathbf{n}}$) untuk mengindikasikan vektor satuan. Jadi $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{A}}$ dan pernyataan “ \mathbf{n} adalah sebuah vektor satuan dalam arah \mathbf{A} ” bisa dinyatakan sebagai $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{A}}$.

1.2.3 Penjumlahan dan Pengurangan

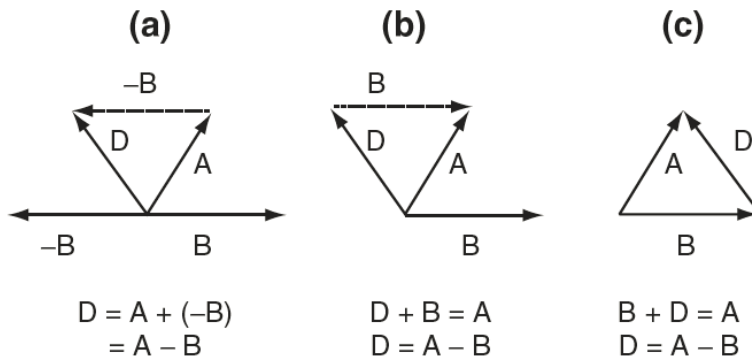
Dua vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} dijumlahkan dengan meletakkan ujung salah satu vektor pada ekor yang lainnya, seperti Gambar 1.2. Jumlah $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ adalah vektor yang diperoleh dengan menghubungkan ekor vektor pertama dengan ujung vektor kedua. Dalam Gambar 1.2 (a), \mathbf{B} digeser sejajar dirinya sendiri, dalam Gambar 1.2 (b), \mathbf{A} digeser sejajar dirinya sendiri. Jelaslah

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}. \quad (1.3)$$

Jika dua vektor yang dijumlahkan dianggap sebagai sisi sebuah jajaran genjang, penjumlahan dilihat sebagai diagonalnya seperti tampak pada Gambar 1.2 (c). Aturan jajaran genjang ini berlaku untuk vektor bebas dan vektor terikat dan biasanya digunakan untuk mendefinisikan penjumlahan dua vektor. Ini juga merupakan dasar untuk mendekomposisi sebuah vektor dalam komponen-komponennya.



Gambar 1.2: Penjumlahan dua buah vektor. (a) Menghubungkan ekor **B** dengan ujung **A**; (b) menghubungkan ekor **A** dengan ujung **B**; (c) aturan jajaran genjang yang berlaku untuk vektor bebas dan vektor terikat.



Gambar 1.3: Pengurangan dua buah vektor. (a) sebagai penjumlahan sebuah vektor negatif; (b) sebagai invers penjumlahan; (c) sebagai vektor ujung ke ujung yang merupakan interpretasi paling berguna dari pengurangan vektor.

Pengurangan vektor ditunjukkan Gambar 1.3. Dalam Gambar 1.3 (a) pengurangan diambil sebagai kasus khusus dari penjumlahan

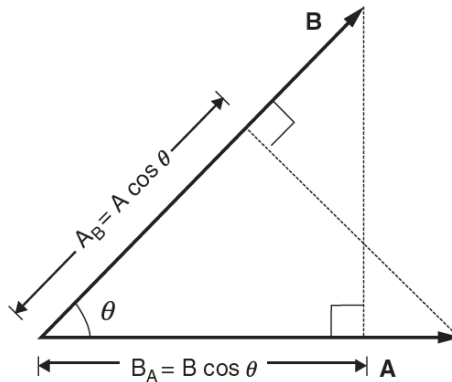
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \quad (1.4)$$

Dalam Gambar 1.3 (b), pengurangan diambil sebagai operasi invers dari penjumlahan. Jelaslah, keduanya ekuivalen. Definisi paling sering dan paling berguna dari pengurangan vektor ditunjukkan Gambar 1.3 (c), yaitu $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ adalah vektor **D** ujung ke ujung, mulai dari ujung **B** ke arah ujung **A**.

Secara grafik bisa dengan mudah dibuktikan penjumlahan vektor asosiatif

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{B} + \mathbf{A}) + \mathbf{C}. \quad (1.5)$$

Jika **A**, **B** dan **C** adalah tiga buah sisi paralelepiped, maka $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ adalah vektor sepanjang diagonal terpanjangnya.



Gambar 1.4: Perkalian titik dua buah vektor $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB_A = BA_B = AB \cos \theta$.

1.2.4 Perkalian Titik

Perkalian titik (yang juga dikenal sebagai perkalian skalar) dua buah vektor didefinisikan sebagai

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta, \quad (1.6)$$

dengan θ adalah sudut antara ekor \mathbf{A} dengan ekor \mathbf{B} . Karena hasilnya skalar, jelaslah ini komutatif

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (1.7)$$

Secara geometrik $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB_A$ dengan B_A adalah proyeksi \mathbf{B} pada \mathbf{A} , seperti pada Gambar 1.4. Ini sama dengan BA_B , dengan A_B adalah proyeksi \mathbf{A} pada \mathbf{B} .

Jika dua vektor tersebut sejajar, maka $\theta = 0$ dan $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB$. Secara khusus

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^2, \quad (1.8)$$

yang tidak lain adalah kuadrat besar sebuah vektor sebarang merupakan perkalian titik dengan dirinya sendiri.

Jika dua vektor tersebut tegak lurus, maka $\theta = 90^\circ$ dan $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. Sebaliknya, jika kita bisa menunjukkan $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ maka \mathbf{A} tegak lurus dengan \mathbf{B} .

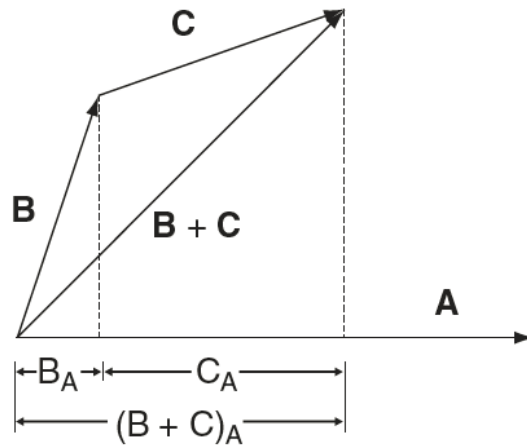
Jelas dari Gambar 1.5

$$A(B + C)_A = AB_A + AC_A.$$

Hal ini menunjukkan hukum distributif berlaku untuk perkalian titik

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}. \quad (1.9)$$

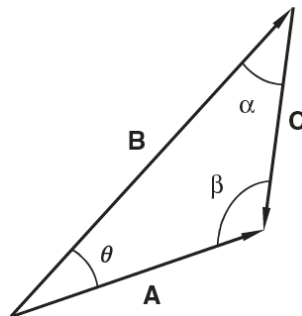
Dengan notasi vektor banyak fakta geometri bisa didemonstrasikan.



Gambar 1.5: Hukum distributif perkalian titik vektor $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$.

Contoh 1.2.1. Jika A , B , dan C adalah tiga buah sisi segitiga dan θ adalah sudut dalam antara A dan B buktikan bahwa

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta.$$



Gambar 1.6: Hukum cosinus bisa dengan mudah diperoleh dari perkalian titik vektor dan hukum sinus dari perkalian silang dua buah vektor.

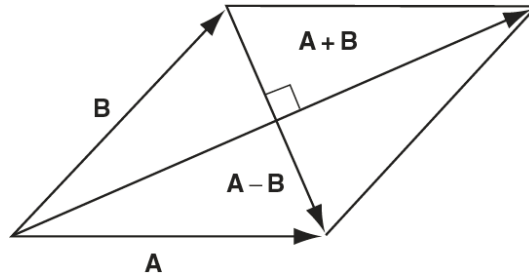
Solusi 1.2.1. Misalkan segitiga yang dibentuk vektor \mathbf{A} , \mathbf{B} dan \mathbf{C} ditunjukkan Gambar 1.6. Karena $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}.$$

diperoleh

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta.$$

Contoh 1.2.2. Tunjukkan bahwa diagonal jajaran genjang saling membagi dua.



Gambar 1.7: Diagonal jajaran genjang saling berpotongan membagi dua. Diagonal layang-layang $A = B$ saling tegak lurus .

Solusi 1.2.2. Misalkan dua buah sisi miring jajaran genjang dinyatakan dengan vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} seperti Gambar 1.7. Dua buah diagonal adalah $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ dan $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Vektor dari sudut kiri bawah ke titik tengah $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ adalah

$$\mathbf{B} + \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B}),$$

yang juga merupakan titik tengah dari $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, jadi keduanya saling berpotongan.

Contoh 1.2.3. Buktikan bahwa diagonal sebuah layang-layang saling tegak lurus.

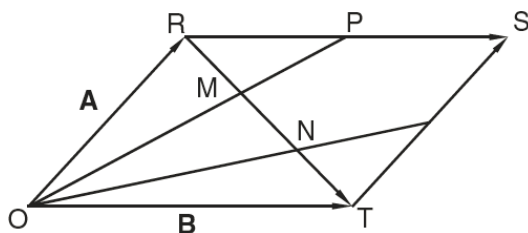
Solusi 1.2.3. Misalkan dua buah sisi miring adalah \mathbf{A} dan \mathbf{B} , maka perkalian titik kedua diagonalnya (Gambar 1.7) adalah

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = A^2 - B^2.$$

Untuk sebuah layang-layang, $A = B$, maka hasil perkalian titik diagonalnya nol. Jadi diagonalnya saling tegak lurus.

Contoh 1.2.4. Buktikan bahwa dalam sebuah jajaran genjang, dua buah garis dari satu sudutnya ke titik tengah dua buah sisi berlawanan membagi tiga diagonal yang dilaluinya sama besar.

Solusi 1.2.4. Dengan jajaran genjang pada Gambar 1.8, jelas terlihat bahwa garis



Gambar 1.8: Dua buah garis dari satu sudut jajargenjang ke titik tengah dua buah sisi berlawanan membagi tiga diagonal yang dilaluinya sama besar.

dari O ke titik tengah RS dinyatakan oleh vektor $\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B}$. Vektor yang digambarkan dari O ke titik sebarang pada garis ini bisa dituliskan sebagai

$$\mathbf{r}(\lambda) = \lambda \left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \right),$$

dengan λ adalah bilangan riil yang mengatur panjang OP. Diagonal RT dinyatakan oleh vektor $\mathbf{B} - \mathbf{A}$. Sebuah vektor yang digambarkan dari O ke titik sebarang pada diagonal ini adalah

$$\mathbf{r}(\mu) = \mathbf{A} + \mu(\mathbf{B} - \mathbf{A}),$$

dengan μ adalah parameter yang mengatur panjang diagonal. Dua buah garis akan bertemu ketika

$$\lambda \left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{B} \right) = \mathbf{A} + \mu(\mathbf{B} - \mathbf{A}),$$

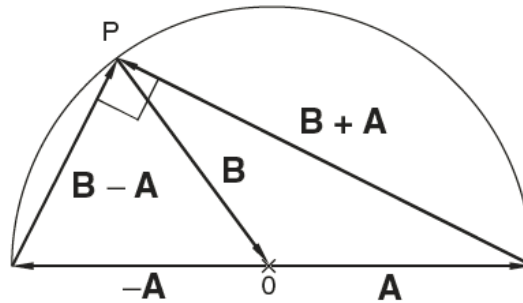
yang bisa dituliskan sebagai

$$(\lambda - 1 + \mu)\mathbf{A} + \left(\frac{1}{2}\lambda - \mu \right)\mathbf{B} = 0.$$

Ini memberikan $\mu = 1/3$ dan $\lambda = 2/3$, sehingga panjang RM adalah sepertiga RT. Dengan cara yang sama, panjang NT adalah sepertiga RT.

Contoh 1.2.5. Buktikan bahwa sudut dalam setengah lingkaran adalah sudut siku-siku.

Solusi 1.2.5. Dengan setengah lingkaran pada Gambar 1.9, jelaslah bahwa besar \mathbf{A} sama dengan \mathbf{B} , karena keduanya adalah jari-jari lingkaran $A = B$. Jadi $(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{A}) = B^2 - A^2 = 0$. Sehingga $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ tegak lurus dengan $\mathbf{B} + \mathbf{A}$.



Gambar 1.9: Sudut pada setengah lingkaran.

1.2.5 Komponen Vektor

Untuk deskripsi aljabar vektor, kita memperkenalkan sebuah sistem koordinat untuk kerangka acuan, meskipun penting untuk mengingat bahwa besar dan arah vektor bebas kerangka. Pertama kita akan menggunakan koordinat persegi (Cartesian) untuk menyatakan vektor dalam komponen-komponennya. Misalkan \mathbf{i} adalah vektor satuan dalam arah x positif, dan \mathbf{j} dan \mathbf{k} adalah vektor satuan dalam arah y dan z positif. Sebuah vektor sebarang \mathbf{A} bisa dinyatakan dalam vektor-vektor basis seperti Gambar 1.10:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad (1.10)$$

dengan A_x , A_y dan A_z adalah proyeksi \mathbf{A} sepanjang tiga buah sumbu koordinat yang dinamakan komponen \mathbf{A} .

Karena \mathbf{i} , \mathbf{j} dan \mathbf{k} adalah vektor satuan yang saling tegak lurus, dengan definisi perkalian titik

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad (1.11)$$

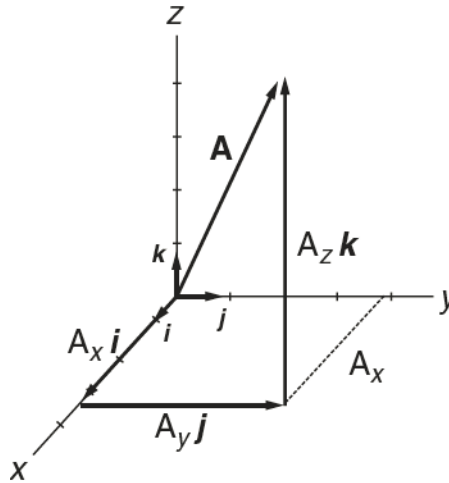
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (1.12)$$

Karena sifat distributif perkalian titik, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} \\ &= A_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + A_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = A_x, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} &= A_y, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A_z, \end{aligned}$$

perkalian titik \mathbf{A} dengan vektor satuan sebarang adalah proyeksi \mathbf{A} sepanjang arah vektor satuan (atau komponen \mathbf{A} sepanjang arah tersebut). Maka (1.10) bisa dituliskan sebagai

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}. \quad (1.13)$$



Gambar 1.10: Komponen vektor. \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} adalah tiga buah vektor satuan dalam sumbu x , y dan z positif. A_x , A_y dan A_z adalah proyeksi \mathbf{A} pada sumbu ini yang merupakan komponen dari \mathbf{A} dan $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$.

Selanjutnya dengan menggunakan hukum distributif, (1.11) dan (1.12), kita mempunyai

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \end{aligned} \quad (1.14)$$

dan

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2. \quad (1.15)$$

Karena $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$, maka sudut antara \mathbf{A} dan \mathbf{B} diberikan oleh

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \cos^{-1} \left(\frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB} \right). \quad (1.16)$$

Contoh 1.2.6. Carilah sudut antara $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ dan $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solusi 1.2.6.

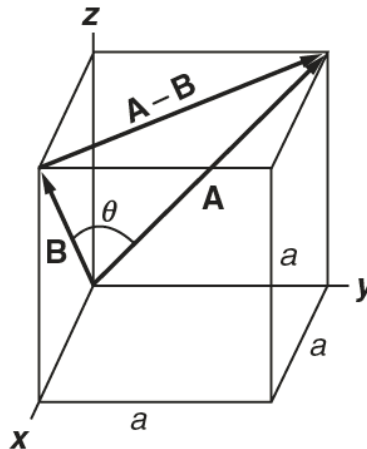
$$A = (3^2 + 6^2 + 9^2)^{1/2} = 3\sqrt{14}; \quad B = ((-2)^2 + 3^2 + 1^2)^{1/2} = \sqrt{14},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 \times (-2) + 6 \times 3 + 9 \times 1 = 21,$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{21}{3\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2},$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = 60^\circ.$$

Contoh 1.2.7. Carilah sudut θ antara diagonal sisi \mathbf{A} dan \mathbf{B} sebuah kubus yang ditunjukkan Gambar 1.11.



Gambar 1.11: Sudut antara dua buah diagonal sisi kubus adalah 60° .

Solusi 1.2.7. Jawaban bisa dengan mudah dicari dengan geometri. Segitiga yang dibentuk \mathbf{A} , \mathbf{B} dan $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ adalah segitiga sama sisi, jadi $\theta = 60^\circ$. Sekarang dengan pendekatan perkalian titik, kita mempunyai

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= a\mathbf{j} + a\mathbf{k}; & \mathbf{B} &= a\mathbf{i} + a\mathbf{k}; & A &= \sqrt{2}a = B, \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= a \cdot 0 + 0 \cdot a \cdot a = a^2 = AB \cos \theta = 2a^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Jadi

$$\cos \theta = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60^\circ.$$

Contoh 1.2.8. Jika $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Carilah proyeksi \mathbf{A} pada \mathbf{B} .

Solusi 1.2.8. Vektor satuan sepanjang \mathbf{B}

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{14}}.$$

Proyeksi \mathbf{A} pada \mathbf{B} adalah

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{B} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{14}} (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}) \cdot (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{21}{\sqrt{14}}.$$

Contoh 1.2.9. Sudut antara vektor \mathbf{A} dengan tiga buah vektor satuan \mathbf{i} , \mathbf{j} dan \mathbf{k} masing-masing adalah α, β dan γ . Buktikan bahwa $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Solusi 1.2.9. Proyeksi \mathbf{A} pada \mathbf{i} , \mathbf{j} dan \mathbf{k} adalah

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A \cos \alpha; \quad A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = A \cos \beta; \quad A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = A \cos \gamma.$$

Jadi

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2 \cos^2 \alpha + A^2 \cos^2 \beta + A^2 \cos^2 \gamma = A^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma).$$

Karena $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$, maka

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Kuantitas $\cos \alpha$, $\cos \beta$ dan $\cos \gamma$ sering dinyatakan dengan l , m dan n disebut sebagai arah cosinus dari \mathbf{A} .

1.2.6 Perkalian Silang

Perkalian silang vektor dituliskan sebagai

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{1.17}$$

merupakan kombinasi khusus dua buah vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} , yang juga sangat berguna. Ini didefinisikan sebagai sebuah vektor (nama alternatifnya: perkalian vektor) dengan besar

$$C = AB \sin \theta, \tag{1.18}$$

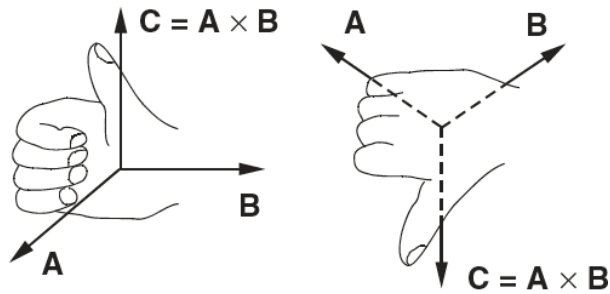
dengan θ adalah sudut antara \mathbf{A} dan \mathbf{B} , dan sebuah arah yang tegak lurus dengan bidang \mathbf{A} dan \mathbf{B} dalam artian majunya sebuah sekrup kanan ketika bergerak dari \mathbf{A} ke \mathbf{B} . Dengan kata lain, jika jari-jari tangan kanan anda menunjuk arah vektor \mathbf{A} dan putar ke arah vektor kedua \mathbf{B} , maka jempol anda akan menunjuk ke arah \mathbf{C} seperti Gambar 1.12. Dengan pemilihan arah seperti ini, maka perkalian silang anti komutatif

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \tag{1.19}$$

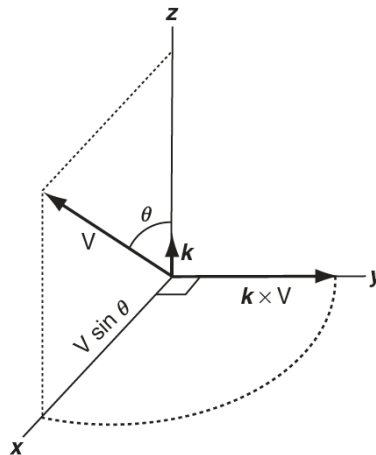
Jelaslah bahwa jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} sejajar, maka $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$, karena θ sama dengan nol.

Dari definisi ini, perkalian silang vektor-vektor basis \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} bisa dengan mudah diperoleh

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \tag{1.20}$$



Gambar 1.12: Aturan tangan kanan perkalian silang $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$. Jika jari-jari tangan kanan anda menunjuk arah vektor \mathbf{A} dan putar ke arah vektor kedua \mathbf{B} , maka jempol anda akan menunjuk ke arah \mathbf{C} .



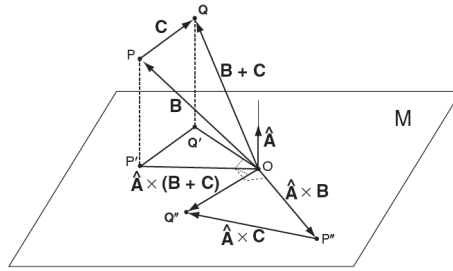
Gambar 1.13: Perkalian silang \mathbf{k} , vektor satuan sepanjang sumbu- z dan \mathbf{V} , sebuah vektor dalam bidang $x - y$.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Contoh berikut mengilustrasikan perkalian silang dua buah vektor tak ortogonal. Jika \mathbf{V} , sebuah vektor dalam bidang $x - y$ dan sudut antara \mathbf{V} dengan \mathbf{k} , vektor satuan sepanjang sumbu- z , adalah θ seperti Gambar 1.13, maka

$$\mathbf{k} \times \mathbf{V} = V \sin \theta \mathbf{j}.$$

Karena $|\mathbf{k} \times \mathbf{V}| = |\mathbf{k}||\mathbf{V}| \sin \theta = V \sin \theta$ sama dengan proyeksi \mathbf{V} pada bidang $x - y$ maka vektor $\mathbf{k} \times \mathbf{V}$ adalah hasil merotasikan vektor ini 90° sepanjang sumbu- z .



Gambar 1.14: hukum distributif perkalian silang $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

Dengan pemahaman ini, kita bisa dengan mudah mendemonstrasikan hukum distributif perkalian silang

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}. \quad (1.22)$$

Misalkan segitiga yang dibentuk oleh vektor \mathbf{B} , \mathbf{C} dan $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ orientasinya sebarang terhadap vektor \mathbf{A} seperti Gambar 1.14. Proyeksinya pada bidang M yang tegak lurus \mathbf{A} adalah segitiga $OP'Q'$. Putar segitiga ini 90° terhadap \mathbf{A} kita peroleh segitiga lain $OP''Q''$. Tiga buah sisi segitiga $OP''Q''$ adalah $\hat{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{A}} \times \mathbf{C}$ dan $\hat{\mathbf{A}} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ dengan $\hat{\mathbf{A}}$ adalah vektor satuan dalam arah \mathbf{A} . Dari aturan penjumlahan vektor

$$\hat{\mathbf{A}} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \hat{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \hat{\mathbf{A}} \times \mathbf{C}.$$

Kalikan kedua ruas dengan besar A , kita peroleh (1.22).

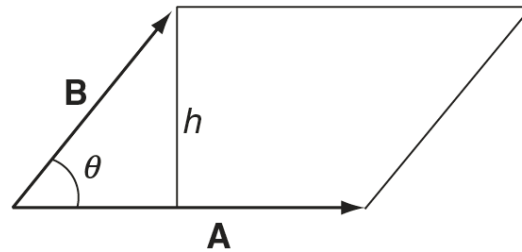
Dengan hukum distributif, (1.20) dan (1.21), kita bisa dengan mudah menyatakan perkalian silang $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ dalam komponen-komponen \mathbf{A} dan \mathbf{B} .

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + A_x B_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + A_x B_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + A_y B_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + A_y B_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + A_z B_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} + A_z B_z \mathbf{k} \times \mathbf{k} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Persamaan ini bisa dituliskan sebagai determinan

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \quad (1.24)$$

dengan pemahaman bahwa ini diekspansikan pada baris pertama. Bentuk determinan lebih mudah untuk diingat dan juga digunakan.



Gambar 1.15: Luas jajaran genjang yang dibentuk oleh \mathbf{A} dan \mathbf{B} besarnya sama dengan besar $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Perkalian silang memiliki interpretasi geometrik yang berguna. Gambar 1.15 adalah sebuah jajaran genjang dengan \mathbf{A} dan \mathbf{B} sebagai sisinya. Luas jajaran genjang ini sama dengan \mathbf{A} kali tingginya h . Tetapi $h = \mathbf{B} \sin \theta$, jadi

$$\text{Luas Jajaran Genjang} = Ah = AB \sin \theta = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|. \quad (1.25)$$

Maka besar $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sama dengan luas jajaran genjang yang dibentuk oleh \mathbf{A} dan \mathbf{B} , arahnya normal terhadap bidang jajaran genjang. Hal ini menyarankan bahwa luas bisa diperlakukan sebagai kuantitas vektor.

Karena luas segitiga yang dibentuk oleh \mathbf{A} dan \mathbf{B} sebagai sisinya adalah setengah luas jajaran genjang, maka

$$\text{Luas Segitiga} = \frac{1}{2} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|. \quad (1.26)$$

Contoh 1.2.10. Hukum sinus. Dengan segitiga pada Gambar 1.6, buktikan bahwa

$$\frac{\sin \theta}{C} = \frac{\sin \alpha}{A} = \frac{\sin \beta}{B}.$$

Solusi 1.2.10. Luas segitiga adalah $\frac{1}{2} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \frac{1}{2} AB \sin \theta$. Luas yang sama juga diberikan oleh $\frac{1}{2} |\mathbf{A} \times \mathbf{C}| = \frac{1}{2} AC \sin \beta$. Maka

$$AB \sin \theta = AC \sin \beta.$$

Sehingga $\frac{\sin \theta}{C} = \frac{\sin \beta}{B}$. Dengan cara yang sama $\frac{\sin \theta}{C} = \frac{\sin \alpha}{A}$. Jadi

$$\frac{\sin \theta}{C} = \frac{\sin \alpha}{A} = \frac{\sin \beta}{B}.$$

Identitas Lagrange

Besar dari $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ bisa dinyatakan dalam \mathbf{A} , \mathbf{B} dan $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ melalui persamaan

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2, \quad (1.27)$$

dikenal sebagai identitas Lagrange. Hubungan ini diperoleh dari

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 &= (AB \sin \theta)^2 = A^2 B^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= A^2 B^2 - A^2 B^2 \cos^2 \theta = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2. \end{aligned}$$

Hubungan ini bisa juga dibuktikan dari komponen-komponen vektor. Dari (1.24) bahwa

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = (A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2 \quad (1.28)$$

dan

$$A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2. \quad (1.29)$$

Ekspansikan ruas kanan kedua persamaan di atas, kita lihat bahwa keduanya identik tiap sukunya.

1.2.7 Perkalian Rangkap Tiga

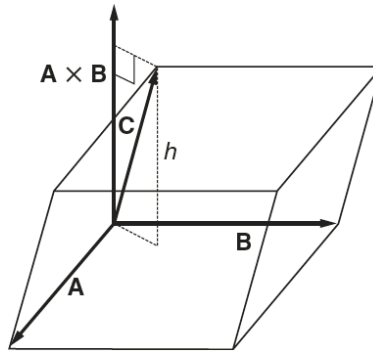
Perkalian Skalar Rangkap Tiga

Kombinasi $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ dikenal sebagai perkalian skalar rangkap tiga (triple). $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ adalah sebuah vektor. Perkalian titik vektor ini dengan vektor \mathbf{C} menghasilkan skalar. Perkalian skalar rangkap tiga mempunyai interpretasi geometrik langsung. Tiga buah vektor bisa digunakan untuk mendefinisikan paralelepiped seperti Gambar 1.16. Besar $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ adalah luas alas yang berupa jajaran genjang dan arahnya tegak lurus terhadap alas. Proyeksi \mathbf{C} pada normal satuan alas adalah tinggi paralelepiped h . Jadi $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ sama dengan luas alas dikalikan tinggi yang merupakan volum paralelepiped:

$$\text{Volume Paralelepiped} = \text{Luas} \times h = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| h = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$

Volum limas segi tiga (tetrahedron) sama dengan satu pertiga dikalikan tinggi dikalikan luas alas yang berupa segitiga. Sehingga volum tetrahedron yang dibentuk oleh vektor \mathbf{A} , \mathbf{B} dan \mathbf{C} sebagai sisi kongruen sama dengan seperenam dari perkalian skalar rangkap tiga dari vektor ini

$$\text{Volume Tetrahedron} = \frac{1}{3} h \times \frac{1}{2} |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \frac{1}{6} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}.$$



Gambar 1.16: Volum parallelepiped sama dengan perkalian skalar rangkap tiga sisi-sisinya sebagai vektor.

Dalam menghitung volum parallelepiped kita bisa menganggap $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ atau $\mathbf{C} \times \mathbf{A}$ sebagai alas. Karena volum sama saja tidak bergantung sisi mana yang dianggap sebagai alas, kita melihat bahwa

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}. \quad (1.30)$$

Tanda kurung dalam persamaan ini sering diabaikan, karena perkalian silang harus dihitung terlebih dahulu. Jika perkalian titik dihitung terlebih dahulu, ekspresi akan menjadi sebuah skalar dikalikan silang dengan sebuah vektor, yang tidak terdefinisi dan operasi tidak ada artinya. Tanpa tanda kurung $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, kita lihat bahwa perkalian skalar rangkap tiga sebarang, titik dan silang bisa saling ditukarkan tanpa mengubah nilai perkalian. Hal ini adalah cara mudah untuk mengingat hubungan ini.

Jelaslah jika h nilainya nol, volum juga akan nol. Jadi jika \mathbf{C} terletak satu bidang dengan \mathbf{A} dan \mathbf{B} , perkalian skalar rangkap tiganya $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ hilang. Secara khusus

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.31)$$

Ekspresi yang sering digunakan untuk perkalian skalar rangkap tiga diberikan oleh determinan

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (1.32)$$

Aturan menukar baris dari determinan memberikan bukti lain dari (1.30)

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Perkalian Vektor Rangkap Tiga

Perkalian rangkap tiga $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ adalah operasi yang penuh arti, karena $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ adalah sebuah vektor dan bisa dikalikan silang dengan \mathbf{A} untuk menghasilkan vektor lain (sehingga namanya perkalian vektor rangkap tiga). Dalam kasus ini tanda kurung menjadi penting karena $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ dan $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ adalah dua vektor yang berbeda. Sebagai contoh

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad \text{dan} \quad (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

Hubungan

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.33)$$

merupakan identitas yang sangat penting. Karena sering digunakan dalam berbagai persoalan, hubungan ini sebaiknya diingat. Hubungan ini (kadang dikenal sebagai aturan ABC - ABC) bisa dibuktikan dengan metode ekspansi langsung kedua ruas dalam komponen kartesian yang menjemukan. Persamaan vektor, bebas dari sistem koordinat tertentu. Jadi, akan lebih baik membuktikan (1.33) tanpa komponen koordinat.

Misalkan $(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{D}$ maka \mathbf{D} tegak lurus dengan bidang \mathbf{B} dan \mathbf{C} . Sekarang vektor $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{D}$ tegak lurus dengan \mathbf{D} , sehingga berada dalam bidang \mathbf{B} dan \mathbf{C} . Jadi kita bisa menuliskan

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \alpha\mathbf{B} + \beta\mathbf{C}, \quad (1.34)$$

dengan α dan β konstanta skalar. Selanjutnya $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ juga tegak lurus \mathbf{A} . Sehingga perkalian titik vektor ini dengan \mathbf{A} harus sama dengan nol:

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] = \alpha\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \beta\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = 0.$$

Diperoleh

$$\beta = -\alpha \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}}$$

dan (1.34) menjadi

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \frac{\alpha}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}} [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}]. \quad (1.35)$$

Persamaan ini berlaku untuk sebarang himpunan vektor. Kasus khusus $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, persamaan ini menjadi

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \frac{\alpha}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}} [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C}]. \quad (1.36)$$

Lakukan perkalian titik terhadap \mathbf{C} , kita mempunyai

$$\mathbf{C} \cdot [\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C})] = \frac{\alpha}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}} [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})^2 - A^2 C^2]. \quad (1.37)$$

Ingat sifat perkalian skalar rangkap tiga $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{D}$, dengan $\mathbf{D} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$ ruas kiri persamaan terakhir menjadi

$$\mathbf{C} \cdot [\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C})] = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = -|\mathbf{A} \times \mathbf{C}|^2$$

Gunakan identitas Lagrange (1.27) untuk menyatakan $|\mathbf{A} \times \mathbf{C}|^2$, kita mempunyai

$$\mathbf{C} \cdot [\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C})] = -[A^2 C^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})^2]. \quad (1.38)$$

Bandingkan (1.37) dan (1.38), kita lihat bahwa

$$\frac{\alpha}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}} = 1,$$

dan (1.35) direduksi menjadi aturan ABC - ABC pada (1.33).

Semua perkalian vektor yang lebih tinggi (lebih banyak vektor yang terlibat) bisa disederhanakan dengan menggunakan perkalian skalar dan vektor rangkap tiga.

Contoh 1.2.11. Gunakan perkalian skalar rangkap tiga untuk membuktikan hukum distributif perkalian silang: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

Solusi 1.2.11. Pertama lakukan perkalian titik $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ dengan sebuah vektor \mathbf{D} sebarang, kemudian anggap $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ sebagai sebuah vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{D} \times \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{D} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \\ &= \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{D} \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}]. \end{aligned}$$

(Langkah pertama jelas karena titik dan silang bisa ditukarkan dalam perkalian skalar rangkap tiga; langkah kedua kita menganggap $\mathbf{D} \times \mathbf{A}$ sebagai sebuah vektor dan gunakan hukum distributif perkalian titik; dalam langkah ketiga kita pertukarkan lagi titik dan silang; dalam langkah terakhir kita gunakan lagi hukum distributif perkalian titik untuk mengeluarkan \mathbf{D} .) Karena \mathbf{D} vektor sebarang, diperoleh $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

Contoh 1.2.12. Buktikan bentuk umum identitas Lagrange:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Solusi 1.2.12. Pertama anggap $(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ sebagai sebuah vektor kemudian pertukarkan titik dan silang dalam perkalian skalar rangkap tiga $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}).$$

Kemudian kita ekspansikan perkalian vektor rangkap tiga $\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ menjadi

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}].$$

Karena $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})$ dan $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$, hukum distributif perkalian skalar memberikan:

$$\mathbf{A} \cdot [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}] = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Contoh 1.2.13. Perkalian titik dan silang \mathbf{u} dengan \mathbf{A} diberikan oleh

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = C; \quad \mathbf{A} \times \mathbf{u} = \mathbf{B}.$$

Nyatakan \mathbf{u} dalam \mathbf{A} , \mathbf{B} , dan C .

Solusi 1.2.13.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\mathbf{u} = C\mathbf{A} - A^2\mathbf{u},$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{u}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

$$C\mathbf{A} - A^2\mathbf{u} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{A^2}[C\mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{B}].$$

Contoh 1.2.14. Gaya \mathbf{F} yang dialami muatan q bergerak dengan kecepatan \mathbf{V} dalam medan magnetik \mathbf{B} diberikan oleh persamaan gaya Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{V} \times \mathbf{B}).$$

Dalam tiga buah percobaan terpisah, diperoleh

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{F}/q = 2\mathbf{k} - 4\mathbf{j},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}/q = 4\mathbf{i} - \mathbf{k},$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{F}/q = \mathbf{j} - 2\mathbf{i}.$$

Carilah medan magnetik \mathbf{B} .

Solusi 1.2.14. Hasilnya bisa dinyatakan sebagai

$$\mathbf{i} \times \mathbf{B} = 2\mathbf{k} - 4\mathbf{j} \quad (1); \quad \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k} \quad (2); \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} - 2\mathbf{i} \quad (3).$$

Dari (1)

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{B}) = \mathbf{i} \times (2\mathbf{k} - 4\mathbf{j}) = -2\mathbf{j} - 4\mathbf{k},$$

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{B})\mathbf{i} - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} - \mathbf{B};$$

jadi

$$B_x \mathbf{i} - \mathbf{B} = -2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \quad \text{atau} \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Dari (2)

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{k} \cdot (4\mathbf{i} - \mathbf{k}) = -1, \\ \mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Maka

$$-\mathbf{i} \cdot \mathbf{B} = -1, \quad \text{atau} \quad B_x = 1.$$

Hasil akhirnya diperoleh dari dua syarat

$$\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Kita bisa menggunakan syarat ketiga untuk memeriksa konsistensi

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \mathbf{k} \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \mathbf{j} - 2\mathbf{i},$$

yang sesuai dengan (3).

Contoh 1.2.15. Vektor resiprok. Jika \mathbf{a} , \mathbf{b} dan \mathbf{c} adalah tiga buah vektor tak sebidang

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}$$

dikenal sebagai vektor resiprok. Buktikan bahwa vektor \mathbf{r} sebarang bisa dinyatakan sebagai

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}')\mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}')\mathbf{b} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}')\mathbf{c}.$$

Solusi 1.2.15. Metode I. Perhatikan perkalian vektor $(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Pertama anggap $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$ sebagai sebuah vektor dan ekspansikan

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}]\mathbf{b} - [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}]\mathbf{c}.$$

Kemudian anggap $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ sebagai sebuah vektor dan ekspansikan

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{r}]\mathbf{a} - [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}]\mathbf{r}.$$

Jadi

$$[(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}]\mathbf{b} - [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}]\mathbf{c} = [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{r}]\mathbf{a} - [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}]\mathbf{r}$$

atau

$$[(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}]\mathbf{r} = [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{r}]\mathbf{a} - [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}]\mathbf{b} + [(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}]\mathbf{c}.$$

Karena

$$\begin{aligned} -(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} &= -\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}), \\ (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \end{aligned}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} + \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}} \mathbf{b} + \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}} \mathbf{c} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}') \mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}') \mathbf{b} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}') \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Metode II. Misalkan

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= q_1 \mathbf{a} + q_2 \mathbf{b} + q_3 \mathbf{c}. \\ \mathbf{r} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= q_1 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + q_2 \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + q_3 \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \end{aligned}$$

Karena $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ tegak lurus \mathbf{b} dan tegak lurus \mathbf{c} , jadi

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0, \quad \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0.$$

Sehingga

$$q_1 = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}'.$$

Dengan cara yang sama

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})} = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{b}' \\ q_3 &= \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}'. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}') \mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}') \mathbf{b} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}') \mathbf{c}.$$

1.3 Garis dan Bidang

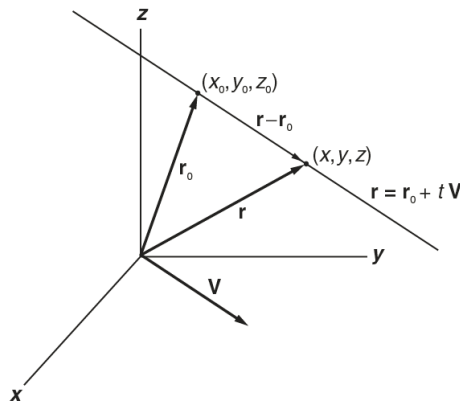
Sebagian besar geometri analitik bisa disederhanakan dengan menggunakan vektor. Dalam geometri analitik, sebuah titik adalah himpunan tiga buah koordinat (x, y, z) . Semua titik dalam ruang bisa didefinisikan dengan vektor posisi $\mathbf{r}(x, y, z)$ (atau hanya \mathbf{r})

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{1.39}$$

yang digambarkan dari titik asal ke titik (x, y, z) . Untuk titik tertentu (x_0, y_0, z_0) kita menggunakan notasi $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}. \tag{1.40}$$

Dengan notasi ini, kita bisa mendefinisikan garis dan bidang di dalam ruang.



Gambar 1.17: Garis lurus dalam bentuk parametrik.

1.3.1 Garis Lurus

Terdapat berbagai cara untuk menyatakan garis lurus. Pertama marilah kita perhatikan sebuah garis melalui sebuah titik (x_0, y_0, z_0) dalam arah vektor yang diketahui $\mathbf{v} = \mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Jika $\mathbf{r}(x, y, z)$ adalah titik lain di dalam garis, vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ sejajar dengan \mathbf{v} . Jadi kita bisa menuliskan persamaan garis lurus sebagai

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}, \quad (1.41)$$

dengan t adalah bilangan riil sebarang. Persamaan ini disebut sebagai bentuk parametrik sebuah garis lurus. Garis ini sangat panjang dan tetap, seperti Gambar 1.17. Garis ini tidak bisa dipindahkan sejajar seperti vektor bebas. Persamaan ini dalam komponen-komponennya

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = t a\mathbf{i} + t b\mathbf{j} + t c\mathbf{k} \quad (1.42)$$

merepresentasikan tiga buah persamaan

$$(x - x_0) = ta, \quad (y - y_0) = tb, \quad (z - z_0) = tc. \quad (1.43)$$

Sekarang jika a, b, c tidak nol, kita bisa mencari t dalam tiap persamaan. Solusinya harus sama, karena semuanya sama dengan t yang sama.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \quad (1.44)$$

Jika c sama dengan nol, (1.43) dituliskan sebagai

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} =; \quad z = z_0. \quad (1.45)$$

Persamaan $z = z_0$ berarti garis terletak pada bidang yang tegak lurus sumbu- z , dan kemiringannya adalah $\frac{b}{a}$. Jika b dan c nol, jelaslah garis tersebut adalah perpotongan bidang $y = y_0$ dan $z = z_0$.

Persamaan parametrik (1.41) memiliki interpretasi yang berguna ketika parameter t berarti waktu. Perhatikan sebuah partikel yang bergerak sepanjang garis lurus ini. Persamaan $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ mengindikasikan ketika $t = 0$. Seiring berjalannya waktu, partikel bergerak dengan kecepatan konstan \mathbf{v} atau $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$.

Jarak Tegak Lurus antara Dua Buah Garis Miring

Dua buah garis yang tidak sejajar dan tidak berpotongan dikatakan garis miring. Untuk mencari jarak tegak lurus antara dua garis ini merupakan persoalan sulit dalam geometri analitik. Dengan vektor, persoalan ini menjadi lebih mudah untuk dipecahkan.

Misalkan persamaan kedua garis tersebut adalah

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{v}_1, \quad (1.46)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t'\mathbf{v}_2. \quad (1.47)$$

Misalkan a pada garis 1 dan b pada garis 2 adalah dua titik ujung tegak lurus bersama pada kedua garis ini. Kita harus menganggap vektor posisi \mathbf{r}_a dari titik asal ke a diberikan oleh (1.46) dengan $t = t_1$, dan vektor posisi \mathbf{r}_b oleh (1.47) dengan $t' = t_2$. Karena itu

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_1 + t_1\mathbf{v}_1, \quad (1.48)$$

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_2 + t_2\mathbf{v}_2. \quad (1.49)$$

Karena $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$ tegak lurus terhadap \mathbf{v}_1 dan \mathbf{v}_2 , maka arahnya haruslah $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$. Jika d adalah panjang $\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a$, maka

$$\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} d.$$

Karena $\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 + t_2\mathbf{v}_2 - t_1\mathbf{v}_1$,

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 + t_2\mathbf{v}_2 - t_1\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} d. \quad (1.50)$$

Lakukan perkalian titik kedua ruas dengan $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Karena $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, persamaannya menjadi

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| d;$$

sehingga

$$d = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}. \quad (1.51)$$

Ini haruslah merupakan jarak tegak lurus antara kedua garis. Jelaslah jika $d = 0$, dua garis akan bertemu. Jadi syarat bertemunya kedua garis adalah

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = 0. \quad (1.52)$$

Untuk menentukan koordinat a dan b , lakukan perkalian titik (1.50) pertama dengan \mathbf{v}_1 kemudian dengan \mathbf{v}_2

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 - t_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (1.53)$$

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{v}_2 + t_2 \mathbf{v}_2 - t_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0. \quad (1.54)$$

Kita bisa memperoleh t_1 dan t_2 dari persamaan ini. Dengan keduanya \mathbf{r}_a dan \mathbf{r}_b bisa diperoleh dari (1.48) dan (1.49)

Contoh 1.3.1. Carilah koordinat dua buah titik ujung garis tegak lurus bersama dua buah garis berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= 9\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}), \\ \mathbf{r} &= -6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k} + t'(-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Solusi 1.3.1. Garis pertama melalui titik $\mathbf{r}_1(0, 9, 2)$ dalam arah $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Garis kedua melalui titik $\mathbf{r}_2(-6, -5, 10)$ dalam arah $\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Dari (1.53) dan (1.54)

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 - t_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 &= 4 - 7t_2 - 11t_1 = 0, \\ (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{v}_2 + t_2 \mathbf{v}_2 - t_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 22 + 29t_2 + 71t_1 = 0. \end{aligned}$$

Solusi kedua persamaan ini

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -1.$$

Jadi dengan (1.48) dan (1.49)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a &= \mathbf{r}_1 + t_1 \mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_b &= \mathbf{r}_2 + t_2 \mathbf{v}_2 = -3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Contoh 1.3.2. Carilah jarak tegak lurus dua garis dari contoh sebelumnya dan sebuah persamaan untuk garis tegak lurus.

Solusi 1.3.2. Jarak tegak lurus d adalah

$$d = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b| = |6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 3\mathbf{k}| = 3\sqrt{30}.$$

Hasil yang sama juga bisa diperoleh dari (1.51). Garis tegak lurusnya diberikan oleh persamaan

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_a + t(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) = (3 + 6t)\mathbf{i} + (8 + 15t)\mathbf{j} + (3 - 3t)\mathbf{k},$$

yang ekuivalen dengan

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-8}{15} = \frac{z-3}{-3}.$$

Garis ini bisa juga dinyatakan dengan

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_a + s(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) = (-3 + 6s)\mathbf{i} + (-7 + 15s)\mathbf{j} + (6 - 3s)\mathbf{k},$$

atau

$$\frac{x+3}{6} = \frac{y+7}{15} = \frac{z-6}{-3}.$$

Contoh 1.3.3. Carilah (a) jarak tegak lurus titik $(5, 4, 2)$ dari garis

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1},$$

dan (b) juga koordinat titik garis tegak lurus pada garis tersebut, dan (c) persamaan untuk garis tegak lurus.

Solusi 1.3.3. Garis tersebut melalui titik $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ dalam arah $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Bentuk parametrik garis tersebut

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} + t(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

Misalkan vektor posisi $(5, 4, 2)$ adalah

$$\mathbf{r}_1 = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Jarak d dari titik $\mathbf{r}_1(5, 4, 2)$ ke garis adalah perkalian sialng $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ dengan vektor satuan dalam arah \mathbf{v}

$$d = \left| (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \frac{\mathbf{v}}{v} \right| = \left| (6\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times \frac{2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{4+9+1}} \right| = 2\sqrt{6}.$$

Misalkan p adalah titik tempat garis tegak lurus bertemu garis. Karena p berada pada garis, vektor posisi p harus memenuhi persamaan garis dengan t spesifik. Misalkan t spesifik adalah t_1

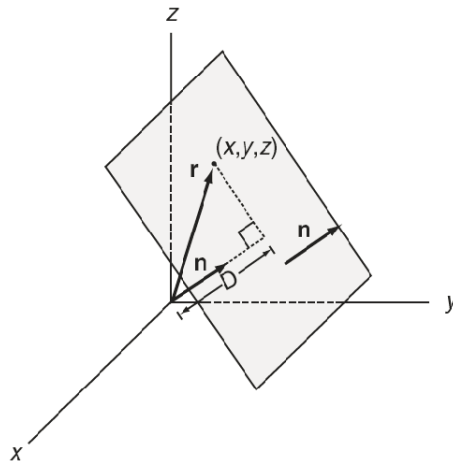
$$\mathbf{r}_p = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} + t_1(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

Karena $(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0)$ tegak lurus \mathbf{v} , perkalian titiknya haruslah nol

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{v} = [6\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} - t_1(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})] \cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0.$$

Ini memberikan $t_1 = 1$. Diperoleh

$$\mathbf{r}_p = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} + 1(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$



Gambar 1.18: Sebuah bidang di dalam ruang. Vektor posisi \mathbf{r} dari titik asal ke sebarang titik pada bidang harus memenuhi persamaan $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = D$ dengan \mathbf{n} adalah vektor satuan normal pada bidang dan D adalah jarak tegak lurus antara titik asal dengan bidang.

Dengan kata lain, koordinat kaki garis tegak lurus adalah $(1, 6, 0)$. Persamaan garis tegak lurus bisa diperoleh dari fakta bahwa ini melalui \mathbf{r}_1 (atau \mathbf{r}_p) dan dalam arah vektor dari \mathbf{r}_p ke \mathbf{r}_1 . Jadi persamaannya bisa dituliskan sebagai

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p) = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + t(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

atau

$$\frac{x - 5}{4} = \frac{y - 4}{-2} = \frac{z - 2}{2}.$$

1.3.2 Bidang

Sebuah himpunan bidang sejajar bisa ditentukan oleh sebuah vektor normal (tegak lurus) terhadap bidang tersebut. Bidang khusus bisa dispesifikasi dengan syarat tambahan, seperti jarak tegak lurus antara titik asal dan bidang, atau titik tertentu pada bidang.

Anggap vektor satuan normal pada bidang adalah

$$\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k} \quad (1.55)$$

dan jarak antara bidang dengan titik asal adalah D seperti Gambar 1.18. Jika (x, y, z) titik sebarang pada bidang, jelaslah proyeksi \mathbf{r} pada \mathbf{n} haruslah memenuhi

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = D. \quad (1.56)$$

Jika kita kalikan komponen-komponennya, kita peroleh persamaan pada bidang

$$Ax + By + Cz = D. \quad (1.57)$$

Persamaan ini tidak akan berubah jika kedua sisi dikalikan dengan konstanta yang sama. Hasilnya menyatakan, tentu saja, bidang yang sama. Namun, untuk penekankan bahwa jika ruas kanan D diartikan sebagai jarak antara bidang dan titik asal, maka koefisien A, B, C pada ruas kiri harus memenuhi syarat $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, karena harus merupakan arah cosinus dari vektor satuan normal.

Bidang juga bisa dispesifikasi secara unik jika sebagai tambahan pada vektor satuan \mathbf{n} , sebuah titik (x_0, y_0, z_0) yang berada di luar bidang diketahui. Dalam kasus ini, vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ harus tegak lurus \mathbf{n} . Berarti perkalian titik dengan \mathbf{n} harus hilang

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1.58)$$

Jika kita kalikan komponen-komponennya, kita bisa menuliskan persamaan ini sebagai

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0. \quad (1.59)$$

Bentuk ini sama dengan (1.57). Jelaslah jarak bidang ini dengan titik asal

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0. \quad (1.60)$$

Secara umum, untuk mencari jarak antara titik dengan garis atau bidang, jauh lebih sederhana menggunakan perhitungan vektor dibandingkan dengan menggunakan geometri analitik.

Contoh 1.3.4. Carilah jarak tegak lurus antara titik $(1, 2, 3)$ dengan bidang yang dinyatakan oleh $3x - 2y + 5z = 10$.

Solusi 1.3.4. Vektor satuan normal pada bidang adalah

$$\mathbf{n} = \frac{3}{\sqrt{9+4+25}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{9+4+25}}\mathbf{j} + \frac{5}{\sqrt{9+4+25}}\mathbf{k}.$$

Jarak titik asal ke bidang adalah

$$D = \frac{10}{\sqrt{9+4+25}} = \frac{10}{\sqrt{38}}.$$

Panjang proyeksi $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ pada \mathbf{n} adalah

$$\ell = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} = \frac{3}{\sqrt{38}} - \frac{4}{\sqrt{38}} + \frac{15}{\sqrt{38}} = \frac{14}{\sqrt{38}}.$$

Jarak dari $(1, 2, 3)$ ke bidang adalah

$$d = |\ell - D| = \frac{14}{\sqrt{38}} - \frac{10}{\sqrt{38}} = \frac{4}{\sqrt{38}}.$$

Cara lain untuk mencari solusinya adalah dengan memperhatikan jarak yang diperlukan sama dengan proyeksi pada \mathbf{n} sebarang vektor yang menghubungkan sebuah titik dengan titik lain pada bidang. Perhatikan bahwa

$$\mathbf{r}_0 = D\mathbf{n} = \frac{30}{38}\mathbf{i} - \frac{20}{38}\mathbf{j} + \frac{50}{38}\mathbf{k}$$

merupakan vektor posisi dari kaki garis tegak lurus dari titik asal ke bidang. Jadi

$$d = |(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}| = \frac{4}{\sqrt{38}}$$

Contoh 1.3.5. Carilah koordinat kaki garis tegak lurus dari titik $(1, 2, 3)$ ke bidang pada contoh terakhir.

Solusi 1.3.5. Misalkan vektor posisi dari titik asal ke kaki garis tegak lurus adalah \mathbf{r}_p . Vektor $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p$ tegak lurus dengan bidang ini, jadi sejajar dengan vektor satuan normal \mathbf{n} dari bidang

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p = k\mathbf{n}.$$

Diperoleh $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p| = k$. Karena $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p| = d$, maka $k = d$. Oleh karena itu

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_1 - d\mathbf{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} - \frac{4}{\sqrt{38}} \left(\frac{3}{\sqrt{38}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{38}}\mathbf{j} + \frac{5}{\sqrt{38}}\mathbf{k} \right).$$

Maka koordinat kaki garis tegak lurusnya adalah $\left(\frac{26}{38}, \frac{84}{38}, \frac{94}{38} \right)$.

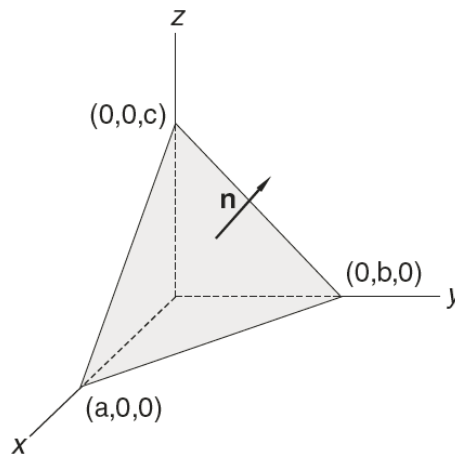
Contoh 1.3.6. Sebuah bidang memotong sumbu- x pada $(a, 0, 0)$; sumbu- y pada $(0, b, 0)$ dan sumbu- z pada $(0, 0, c)$ (Gambar 1.19). Carilah (a) sebuah vektor satuan normal pada bidang ini, (b) jarak tegak lurus antara titik asal dengan bidang ini, (c) persamaan bidang ini.

Solusi 1.3.6. Misalkan $\mathbf{r}_1 = a\mathbf{i}$, $\mathbf{r}_2 = b\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_3 = c\mathbf{k}$. Vektor dari $(a, 0, 0)$ ke $(0, b, 0)$ adalah $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = b\mathbf{j} - a\mathbf{i}$, dan vektor dari $(a, 0, 0)$ ke $(0, 0, c)$ adalah $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = c\mathbf{k} - a\mathbf{i}$. Vektor satuan normal pada bidang ini haruslah berarah yang sama dengan perkalian silang dua buah vektor ini

$$\mathbf{n} = \frac{(b\mathbf{j} - a\mathbf{i}) \times (c\mathbf{k} - a\mathbf{i})}{|(b\mathbf{j} - a\mathbf{i}) \times (c\mathbf{k} - a\mathbf{i})|},$$

$$(b\mathbf{j} - a\mathbf{i}) \times (c\mathbf{k} - a\mathbf{i}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = bci + acj + abk,$$

$$\mathbf{n} = \frac{bci + acj + abk}{\left((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2 \right)^{1/2}}.$$



Gambar 1.19: Bidang $bcx + acy + abz = abc$ memotong sumbu pada $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ dan $(0, 0, c)$.

Jika jarak tegak lurus dari titik asal ke bidang adalah D , maka

$$D = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{n},$$

$$D = \frac{abc}{\left((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2\right)^{1/2}}.$$

Secara umum, vektor posisi $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sebuah titik sebarang (x, y, z) pada bidang haruslah memenuhi

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = D,$$

$$\frac{xbc + yac + zab}{\left((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2\right)^{1/2}} = \frac{abc}{\left((bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2\right)^{1/2}}.$$

Sehingga persamaan bidang ini bisa dituliskan

$$bcx + acy + abz = abc$$

atau sebagai

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Cara lain untuk mencari sebuah persamaan bidang adalah dengan memperhatikan bahwa perkalian skalar rangkap tiga dari tiga buah vektor sebidang sama dengan nol. Jika vektor posisi dari titik asal ke titik sebarang pada bidang adalah $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, maka tiga buah vektor $\mathbf{r} - a\mathbf{i}$, $\mathbf{b}\mathbf{j} - a\mathbf{i}$ dan $\mathbf{c}\mathbf{k} - a\mathbf{i}$ berada pada bidang yang sama.

Sehingga

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{r} - a\mathbf{i}) \cdot (b\mathbf{j} - a\mathbf{i}) \times (c\mathbf{k} - a\mathbf{i}) &= \begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} \\
 &= bc(x - a) + acy + abz = 0
 \end{aligned}$$

atau

$$bcx + acy + abz = abc.$$

1.4 Latihan

1. Jika vektor $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, carilah $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ dan $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Berapakah sudut antara vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} ?

Jawab: $\sqrt{13}$, $\sqrt{2}$, $3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, -1 , 101° .

2. Berapakah c sehingga vektor $c\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ dan $-\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ tegak lurus?

Jawab: 2.

3. Jika $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. carilah proyeksi \mathbf{A} pada \mathbf{B} dan \mathbf{B} dan \mathbf{A} !

Jawab: $4/7$, $4/3$.

4. Buktikan bahwa vektor $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ dan $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ membentuk segitiga siku-siku.

5. Gunakan vektor untuk membuktikan garis yang menghubungkan dua buah sisi segitiga sebarang sejajar dengan sisi ketiga dan panjangnya setengahnya.

6. Gunakan vektor untuk menunjukkan bahwa untuk sebarang segitiga, median (tiga garis diambil dari setiap sudut ke titik tengah sisi yang berlawanan) semua melalui titik yang sama. Titik tersebut terletak pada dua-pertiga dari median ke titik simpul.

7. Jika $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, carilah $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ dan $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Jawab: $10\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$, $-10\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$

8. Carilah luas jajaran genjang dengan diagonal $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Jawab: $5\sqrt{3}$.

9. Hitunglah $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \cdot [(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (3\mathbf{j} - \mathbf{k})]$.

Jawab: 4.

10. Carilah volum parallelepiped yang sisinya dinyatakan oleh $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, dan $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Jawab: 7.

11. Carilah a sehingga vektor $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ dan $3\mathbf{i} + a\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ sebidang.

Jawab: $a = -4$.

12. Buktikan

$$(a) (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c});$$

$$(b) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c})^2.$$

Petunjuk: untuk membuktikan (a) pertama anggap $(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ sebagai sebuah vektor, dan perhatikan bahwa $\mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$.

13. Jika $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tidak sebidang (jadi $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq 0$), dan

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}}, \quad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}},$$

Buktikan

$$(a) \mathbf{a}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{c} = 1,$$

$$(b) \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{b}' \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}' = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}' = 0,$$

$$(c) \text{ Jika } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = V \text{ dan } \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' \times \mathbf{c}' = 1/V.$$

14. Carilah jarak tegak lurus dari titik $(-1, 0, 1)$ ke garis $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$.

Jawab: $\sqrt{10}$.

15. Carilah koordinat kaki garis tegak lurus dari $(1, 2, 1)$ ke sebuah garis yang menghubungkan titik asal dengan titik $(2, 2, 5)$.

Jawab: $(2/3, 2/3, 5/3)$.

16. Carilah panjang dan persamaan garis yang garis tegak lurus antara keduanya adalah

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}, \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

$$\text{Jawab: } \sqrt{35}, \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z-4}{1}.$$

17. Carilah jarak dari $(-2, 4, 5)$ ke bidang $2x + 6y - 3z = 10$.

Jawab: $5/7$.

18. Carilah persamaan bidang yang tegak lurus dengan vektor $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ dan melalui titik $(1, 2, 1)$.

Jawab: $x + y - z = 2$.

19. Carilah persamaan sebuah bidang yang ditentukan oleh titik $(2, -1, 1)$, $(3, 2, -1)$, dan $(-1, 3, 2)$.

Jawab: $11x + 5y + 13z = 30$.

2

Kalkulus Vektor

Sejauh ini kita telah membahas vektor konstan, tetapi aplikasi paling menarik dari vektor melibatkan fungsi vektor. Contoh paling sederhana adalah vektor posisi yang bergantung waktu. Vektor seperti itu bisa diturunkan terhadap waktu. Turunan pertama dan keduanya tidak lain adalah kecepatan dan percepatan partikel yang posisinya dinyatakan oleh vektor posisi. Dalam kasus ini, koordinat puncak vektor posisi berupa fungsi waktu.

Hal yang lebih menarik adalah kuantitas yang bergantung pada posisi. Kuantitas tersebut dikatakan membentuk medan. Kata “medan” memiliki konotasi bahwa ruang memiliki beberapa sifat fisis. Sebagai contoh, medan listrik yang disebabkan oleh muatan statik adalah ruang yang mengelilingi muatan yang sekarang memiliki sifat tertentu, yang dikenal sebagai medan listrik. Setiap titik dalam medan ini berkaitan dengan sebuah vektor medan listrik yang besar dan arahnya bergantung pada lokasi titik. Vektor medan listrik ini terlihat ketika muatan lain didekatkan pada titik tersebut. Secara matematik sebuah medan vektor adalah sebuah fungsi vektor, masing-masing tiga komponennya bergantung pada koordinat titik. Medan juga mungkin bergantung waktu, seperti pada medan listrik dan gelombang elektromagnetik.

Terdapat juga medan skalar, yaitu medan yang dikarakterisasi pada setiap titik oleh sebuah bilangan. Jelas bahwa bilangan tersebut bisa berubah terhadap waktu, tetapi biasanya kita berbicara tentang medan pada saat tertentu. Sebagai contoh, pada titik yang berbeda suhu juga berbeda, jadi suhu merupakan fungsi posisi. Sehingga suhu adalah medan skalar. Kita bisa menurunkan sebuah jenis medan dari medan yang lain. Sebagai contoh, turunan berarah sebuah medan skalar adalah sebuah medan vektor, yang disebut sebagai gradien.

Dengan menggunakan diferensial kalkulus vektor, kita membangun istilah dengan tepat, seperti gradien, divergensi, dan curl, untuk mendeskripsikan laju perubahan

fungsi vektor terhadap koordinat spasial. Dengan integral vektor kalkulus, kita memperoleh hubungan antara integral garis, permukaan dan volum melalui teorema Gauss dan Stokes. Ini merupakan sifat penting dari medan vektor, banyak hukum fundamental fisika dinyatakan melalui integral dan diferensial kalkulus vektor.

Dalam bab ini, kita harus mengasumsikan fungsi vektor kontinu dan terdiferensialkan, dan daerah yang ditinjau terhubung sederhana kecuali diberitahukan. Tetapi, ini tidak berarti singularitas dan daerah yang terhubung banyak tidak menarik. Daerah tersebut memiliki implikasi dalam persoalan fisis. Kita akan mendefinisikan dan membicarakannya dengan lebih hati-hati istilah ini pada tempat yang sesuai.

2.1 Turunan Waktu

Penurunan sebuah fungsi vektor merupakan sebuah perluasan sederhana dari penurunan kuantitas skalar. Jika vektor \mathbf{A} hanya bergantung pada t , maka turunan \mathbf{A} terhadap waktu didefinisikan sebagai

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

Dari definisi ini diperoleh penjumlahan dan perkalian kuantitas vektor bisa diturunkan sama seperti kalkulus biasa, yaitu

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (2.4)$$

Karena $\Delta \mathbf{A}$ mempunyai komponen $\Delta \mathbf{A}_x$, $\Delta \mathbf{A}_y$, dan $\Delta \mathbf{A}_z$,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}_x \mathbf{i} + \Delta \mathbf{A}_y \mathbf{j} + \Delta \mathbf{A}_z \mathbf{k}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{A}_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\mathbf{A}_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{d\mathbf{A}_z}{dt} \mathbf{k}. \quad (2.5)$$

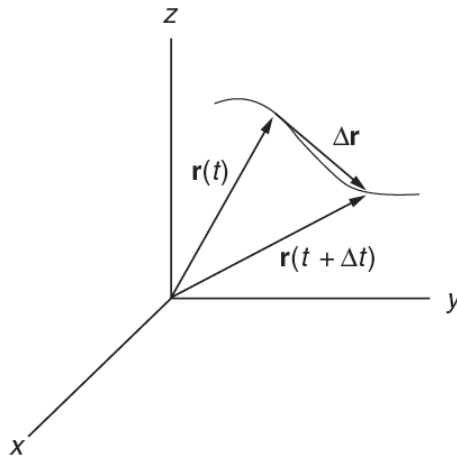
Turunan waktu sebuah vektor sama dengan jumlah vektor turunan waktu dari komponennya.

2.1.1 Kecepatan dan Percepatan

Kasus khusus yaitu jika \mathbf{A} merupakan vektor posisi \mathbf{r}

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (2.6)$$

Jika t berubah, puncak \mathbf{r} mengikuti kurva seperti Gambar 2.1. Jika sebuah partikel diterjemahkan oleh: Imamal Muttaqien



Gambar 2.1: Puncak \mathbf{r} mengikuti lintasan sebuah partikel yang bergerak, $\Delta\mathbf{r}$ tidak bergantung titik asal.

bergerak sepanjang kurva ini, maka $d\mathbf{r}/dt$ merupakan kecepatan partikel sepanjang lintasan \mathbf{v}

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}. \quad (2.7)$$

Arah $\Delta\mathbf{r}$ tidak berhubungan dengan arah \mathbf{r} . Dengan kata lain kecepatan tidak bergantung dari titik asal yang dipilih. Dengan cara yang sama, percepatan didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.8)$$

Percepatan juga tidak bergantung titik asal.

Notasi turunan terhadap waktu. Sebuah notasi yang digunakan secara luas (notasi Newton) adalah sebuah titik di atas simbol menyatakan turunan waktu pertama dan dua buah titik menyatakan turunan waktu kedua, begitu seterusnya. Jadi

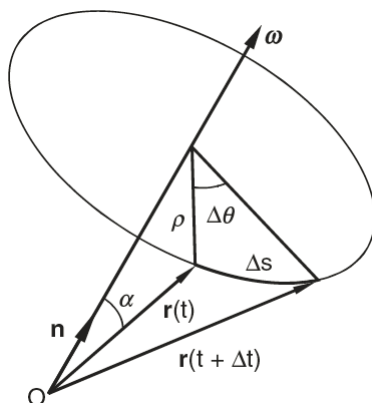
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \quad (2.10)$$

2.1.2 Vektor Kecepatan Sudut

Untuk sebuah partikel yang bergerak melingkar, ditunjukkan Gambar 2.2, laju perubahan posisi sudut dikenal sebagai kelajuan sudut ω :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}. \quad (2.11)$$



Gambar 2.2: Vektor kecepatan sudut ω . Kecepatan partikel \mathbf{v} mengelilingi lingkaran diberikan oleh $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$.

Kecepatan partikel \mathbf{v} adalah, dengan definisi

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.12)$$

dengan \mathbf{r} adalah vektor posisi yang digambarkan dari titik asal ke posisi partikel. Besar kecepatannya diberikan oleh:

$$v = |\mathbf{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho \Delta \theta}{\Delta t} = \rho \omega, \quad (2.13)$$

dengan ρ adalah jari-jari lingkaran. Arah kecepatan, jelaslah, menyinggung lingkaran.

Sekarang, misalkan \mathbf{n} adalah vektor satuan yang digambarkan dari titik asal ke pusat lingkaran, berarah positif dengan bertambahnya putaran sekrup tangan kanan sama seperti rotasi partikel. Karena $|\mathbf{n} \times \mathbf{r}| = r \sin \alpha = \rho$, seperti pada Gambar 2.2, besar kecepatan bisa dituliskan sebagai

$$v = \rho \omega = |\mathbf{n} \times \mathbf{r}| \omega. \quad (2.14)$$

Jika kita mendefinisikan kecepatan sudut ω sebagai

$$\omega = \omega \mathbf{n}, \quad (2.15)$$

maka kita bisa menuliskan kecepatan \mathbf{v} sebagai:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \omega \times \mathbf{r}. \quad (2.16)$$

Dengan mengingat definisi perkalian silang dua buah vektor, kita bisa dengan mudah melihat baik arah maupun besar kecepatan diberikan oleh persamaan ini.

Sebuah partikel yang bergerak, meskipun lintasannya bukan lingkaran, bisa selalu dianggap pada saat tertentu bergerak melingkar. Meskipun itu dalam garis lurus yang bisa dianggap sebagai lingkaran dengan jari-jari tak hingga. Lintasan, yang dinyatakan oleh gerak partikel pada selang waktu infinitesimal δt , bisa dinyatakan sebagai busur lingkaran infinitesimal. Jadi, pada waktu sebarang, kecepatan sudut sesaat bisa didefinisikan untuk mendeskripsikan gerak umum. Kecepatan sesaat diberikan oleh (2.16).

Contoh 2.1.1. Buktikan bahwa momentum linier, didefinisikan sebagai $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$, selalu berada dalam bidang tetap dalam medan gaya sentral. (Sebuah medan gaya sentral berarti gaya \mathbf{F} berarah radial, seperti gaya gravitasi dan listrik, dengan kata lain \mathbf{F} sejajar \mathbf{r} .)

Solusi 2.1.1. Marilah kita bentuk momentum sudut \mathbf{L}

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}.$$

Turunkan terhadap waktu, kita mempunyai

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Sekarang $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} = 0$ dan $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}}$. Menurut hukum kedua Newton $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ dan \mathbf{F} sejajar \mathbf{r} , jadi $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Maka $\dot{\mathbf{L}} = 0$. Dengan kata lain \mathbf{L} merupakan vektor konstan. Selanjutnya \mathbf{L} tegak lurus terhadap \mathbf{p} , karena $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ tegak lurus \mathbf{p} . Oleh karena itu \mathbf{p} harus selalu berada dalam bidang tegak lurus vektor konstan \mathbf{L} .

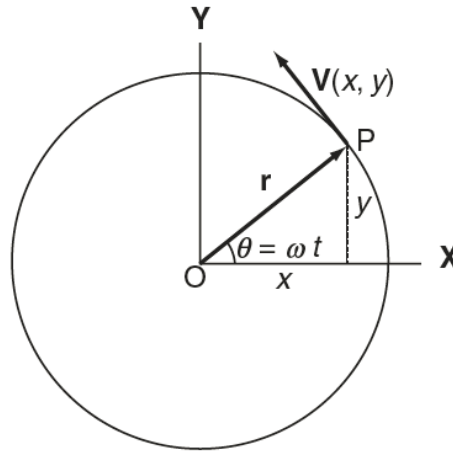
Contoh 2.1.2. Anggap sebuah partikel bergerak mengelilingi sumbu- z dengan kecepatan sudut konstan ω seperti pada Gambar 2.3. Carilah kecepatan dan percepatan partikel.

Solusi 2.1.2. Metode I. Karena partikel bergerak dalam lintasan melingkar dan z tidak berubah dalam gerak ini, kita hanya akan memperhatikan komponen x dan y . Vektor kecepatan sudut dalam arah \mathbf{k} (vektor satuan sepanjang sumbu- z) $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, dan vektor posisi \mathbf{r} digambarkan dari titik asal ke (x, y) tegak lurus \mathbf{k} . Jadi

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Arah \mathbf{v} tegak lurus terhadap \mathbf{k} dan tegak lurus dengan \mathbf{r} , yaitu dalam arah tangensial lingkaran. Besar kecepatannya adalah

$$v = \omega r \sin(\pi/2) = \omega r.$$



Gambar 2.3: Vektor kecepatan sudut ω . Kecepatan partikel \mathbf{v} mengelilingi lingkaran diberikan oleh $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Secara eksplisit

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$

Percepatannya diberikan oleh

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

Karena $\boldsymbol{\omega}$ konstan, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Lebih dari itu $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Jadi

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \omega^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}).$$

Maka \mathbf{a} dalam arah $-\mathbf{r}$ dan besarnya sama dengan $\omega^2 r$.

Metode II. Vektor posisi secara eksplisit bisa dituliskan

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = r \cos \omega t \mathbf{i} + r \sin \omega t \mathbf{j}. \quad (2.17)$$

Kecepatan dan percepatannya adalah

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = -\omega r \sin \omega t \mathbf{i} + \omega r \cos \omega t \mathbf{j} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}), \quad (2.18)$$

$$v = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} = (\omega^2 r^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 r^2 \cos^2 \omega t)^{1/2} = \omega r \quad (2.19)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - \omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2(x\mathbf{i} - y\mathbf{j}) = -\omega^2 \mathbf{r} = \frac{v^2}{r^2} \mathbf{r}. \quad (2.20)$$

Kita bisa melihat secara cepat bahwa percepatannya berarah ke pusat dengan besar $\omega^2 r$. Ini merupakan percepatan sentripetal.

Kecepatan juga tegak lurus dengan vektor posisi karena

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = 0.$$

Dalam contoh ini, besar \mathbf{r} konstan, kita telah secara eksplisit membuktikan bahwa kecepatan tegak lurus dengan \mathbf{r} . Ini juga merupakan konsekuensi teorema umum berikut.

Jika besar sebuah vektor tidak berubah, vektor selalu ortogonal (tegak lurus) terhadap turunannya.

Ini diperoleh dari kenyataan bahwa $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r_0^2$ dan r_0 konstan, maka

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) &= \frac{d}{dt}r_0^2 = 0, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) &= \frac{d}{dt} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} = 0. \end{aligned}$$

Ketika perkalian titik dua buah vektor nol, dua buah vektor saling tegak lurus.

Ini juga bisa dilihat dari geometri. Dalam Gambar 2.1, jika $\mathbf{r}(t)$ dan $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ panjangnya sama, maka Δt merupakan alas segitiga sama kaki. Ketika $\Delta t \rightarrow 0$, sudut antara $\mathbf{r}(t)$ dan $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ juga menuju nol. Dalam kasus ini, dua buah sudut alasnya mendekati 90° , yang berarti $\Delta \mathbf{r}$ tegak lurus \mathbf{r} . Karena Δt berupa skalar, arah $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ ditentukan oleh $\Delta \mathbf{r}$. Jadi $d\mathbf{r}/dt$ tegak lurus \mathbf{r} .

Teorema ini tidak terbatas hanya pada vektor posisi dan juga turunan waktu. Sebagai contoh, jika vektor \mathbf{A} merupakan fungsi jarak busur s yang diukur pada titik tertentu, sepanjang besar \mathbf{A} konstan, kita bisa membuktikan dengan cara yang sama $d\mathbf{A}/ds$ selalu tegak lurus terhadap \mathbf{A} . Teorema ini sangat penting dan harus selalu diingat.

Kecepatan Medan Vektor

Kadang istilah kecepatan (atau percepatan) medan vektor digunakan untuk menyatakan pada setiap titik (x, y, z) terdapat sebuah vektor kecepatan yang besar dan arah bergantung pada tempat titik tersebut. Dengan kata lain, kecepatan adalah fungsi sebuah vektor yang memiliki tiga buah komponen. Masing-masing komponen bisa berupa fungsi (x, y, z) . Sebagai contoh, perhatikan benda berotasi. Kecepatan material pada benda tersebut pada setiap titik merupakan sebuah vektor yang berupa fungsi posisi. Secara umum, sebuah fungsi vektor bisa juga bergantung eksplisit pada waktu t . Sebagai contoh, dalam sebuah kontinum, seperti fluida, kecepatan partikel

pada kontinum merupakan medan vektor yang bukan hanya berupa fungsi posisi tetapi bisa juga waktu. Untuk mencari percepatannya, kita gunakan aturan rantai:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Karena

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

diperoleh

$$\mathbf{a} = v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Jadi percepatan juga bisa berupa medan vektor.

Contoh 2.1.3. Sebuah benda berotasi terhadap sumbu- z dengan kecepatan sudut ω , carilah kecepatan partikel benda sebagai fungsi posisi, dan gunakan (2.22) untuk mencari percepatan partikel.

Solusi 2.1.3. Kecepatan sudutnya diberikan oleh $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ dan kecepatan titik sebarang di dalam benda

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$

Jadi komponen vektor kecepatannya

$$v_x(x, y, z) = -\omega y, \quad v_y(x, y, z) = \omega x, \quad v_z(x, y, z) = 0,$$

dan

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \omega \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = -\omega \mathbf{i}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Jadi menurut (2.22)

$$\mathbf{a} = (-\omega y)\omega \mathbf{j} + (\omega x)(-\omega \mathbf{i}) = -\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}).$$

Jika kita mendefinisikan $\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, maka besar ρ merupakan jarak tegak lurus antara partikel dan sumbu rotasi. Maka

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \boldsymbol{\rho},$$

yang menunjukkan bahwa setiap partikel memiliki percepatan sentripetal $\omega^2 \rho$, seperti yang diharapkan.

2.2 Turunan dalam Kerangka Acuan non Inersial

Percepatan \mathbf{a} dalam persamaan Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ diukur dalam sebuah kerangka acuan inersial. Sebuah kerangka acuan inersial bisa berupa sistem koordinat tetap, atau sebuah kerangka yang bergerak dengan kecepatan konstan relatif terhadap sistem tetap. Sebuah sistem koordinat tetap pada Bumi bukan merupakan sebuah sistem inersial karena Bumi berotasi.

Turunan sebuah vektor dalam sistem non inersial, jelaslah, berbeda dengan turunan pada sistem tetap. Untuk mencari hubungannya, marilah kita perhatikan sebuah sistem koordinat yang bergerak yang memiliki titik asal sama pada sistem tetap. Intuisi kita berkata, dalam kasus ini, satu-satunya gerak relatif antara sistem koordinat adalah rotasi. Untuk mentransformasikan turunan dari satu sistem ke sistem lainnya, kita perlu memperhitungkan rotasi.

Marilah kita notasikan kuantitas berkaitan rotasi dengan tanda aksen. Vektor posisi sebuah partikel dinyatakan oleh vektor basis sistem tetap adalah

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (2.23)$$

Vektor posisi yang sama dinyatakan dalam sistem koordinat bergerak dengan titik asal berhimpit dengan sistem tetap menjadi

$$\mathbf{r} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}', \quad (2.24)$$

dengan \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' adalah vektor basis sistem yang bergerak.

Kecepatan \mathbf{v} adalah turunan vektor posisi terhadap waktu dalam sistem tetap

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \quad (2.25)$$

Jika kita nyatakan turunan waktu \mathbf{r} dalam sistem bergerak, maka dengan (2.24) kita mempunyai

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}. \quad (2.26)$$

karena \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' tetap dalam sistem bergerak, jadi ketiganya berubah terhadap waktu. Jelaslah kecepatan yang terukur dalam sistem bergerak ini

$$\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' = \frac{D\mathbf{r}}{Dt}. \quad (2.27)$$

Persamaan ini juga mendefinisikan operasi D/Dt , yang berarti turunan waktu pada sistem bergerak. Notasi

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (2.28)$$

juga biasanya digunakan. Seperti yang sudah diebutkan sebelumnya, sebuah titik di atas simbol berarti turunan waktu. Sebagai tambahan, ini biasanya berarti turunan

waktu dalam sistem bergerak. Perhatikan bahwa vektor posisi memiliki penampakan yang sama dalam (2.23) dan (2.24), vektor kecepatan, atau turunan sebarang, memiliki suku tambahan dalam sistem bergerak seperti terlihat dalam (2.26) dan (2.25). Tiga buah turunan (dx'/dt , dy'/dt , dz'/dt) bukanlah komponen vektor kecepatan \mathbf{v} dalam sistem bergerak, ketiganya hanya muncul sebagai komponen kecepatan pada pengamat diam dalam sistem bergerak yang diberikan (2.26), yang bisa dituliskan sebagai

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} + x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt}. \quad (2.29)$$

Karena \mathbf{i}' , \mathbf{j}' , \mathbf{k}' merupakan vektor satuan, besarnya tidak berubah. Jadi turunannya haruslah tegak lurus terhadap dirinya sendiri. Sebagai contoh $d\mathbf{i}'/dt$ tegak lurus terhadap \mathbf{i}' dan berada pada bidang \mathbf{j}' dan \mathbf{k}' . Sehingga kita bisa menuliskan

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = c\mathbf{j}' - b\mathbf{k}', \quad (2.30)$$

dengan c dan $-b$ merupakan dua buah konstanta. (Alasan memilih simbol khusus ini untuk koefisien kombinasi linier untuk kenyamanan, yang akan jelas sebentar lagi). Dengan cara yang sama

$$\frac{d\mathbf{j}'}{dt} = a\mathbf{k}' - f\mathbf{i}', \quad (2.31)$$

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = e\mathbf{i}' - d\mathbf{j}'. \quad (2.32)$$

Tetapi $\mathbf{i}' = \mathbf{j}' \times \mathbf{k}'$

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \frac{d\mathbf{j}'}{dt} \times \mathbf{k}' + \mathbf{j}' \times \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = (a\mathbf{k}' - f\mathbf{i}') \times \mathbf{k}' + \mathbf{j}' \times (e\mathbf{i}' - d\mathbf{j}') = f\mathbf{j}' - e\mathbf{k}'. \quad (2.33)$$

Dengan membandingkan (2.30) dan (2.33), kita melihat $f = c$ dan $e = b$. Dengan cara yang sama, dengan $\mathbf{j}' = \mathbf{k}' \times \mathbf{i}'$, kita bisa membuktikan

$$\frac{d\mathbf{j}'}{dt} = d\mathbf{k}' - c\mathbf{i}'. \quad (2.34)$$

Jelas dari (2.31) dan (2.34) bahwa $d = a$ dan $c = f$.

Diperoleh

$$\begin{aligned} x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} &= x'(c\mathbf{j}' - b\mathbf{k}') + y'(a\mathbf{k}' - c\mathbf{i}') + z'(b\mathbf{i}' - a\mathbf{j}') \\ &= \mathbf{i}'(bz' - cy') + \mathbf{j}'(cx' - az') + \mathbf{k}'(ay' - bx') \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ a & b & c \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Jika kita mendefinisikan

$$\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{i}' + b\mathbf{j}' + c\mathbf{k}', \quad (2.36)$$

dengan \mathbf{r} pada (2.24), kita bisa menuliskan (2.35) sebagai

$$x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.37)$$

Arti dari $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ tepat sama dengan (2.16). Jadi kita telah membuktikan secara eksplisit bahwa gerak relatif paling umum dua buah sistem koordinat yang memiliki titik asal sama berupa rotasi dengan kecepatan sudut sesaat $\boldsymbol{\omega}$. Selanjutnya (2.29) menjadi

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (2.38)$$

Biasanya persamaan ini dituliskan dalam bentuk

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{D}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.39)$$

dengan pemahaman bahwa turunan waktu pada ruas kiri dalam sistem tetap, dan pada ruas kanan, semua kuantitas dinyatakan dalam sistem berotasi.

Analisis ini tidak terbatas pada vektor posisi. Untuk vektor sebarang \mathbf{A} , kita bisa mengikuti prosedur yang sama dan membuktikan bahwa

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{D}{Dt} \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}}, \quad (2.40)$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \mathbf{A} &= \dot{\mathbf{A}} = \dot{A}'_x \mathbf{i}' + \dot{A}'_y \mathbf{j}' + \dot{A}'_z \mathbf{k}', \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} &= \dot{A}'_x \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \dot{A}'_y \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \dot{A}'_z \frac{d\mathbf{k}'}{dt}. \end{aligned}$$

Contoh 2.2.1. Buktikan bahwa turunan waktu vektor kecepatan sudut sama baik dalam sistem kerangka acuan teta maupun yang berotasi.

Solusi 2.2.1. Karena

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{D}{Dt} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega},$$

Tetapi $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$, jadi turunan waktu dalam sistem berotasi $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ sama dengan turunan waktu dalam sistem tetap.

Contoh 2.2.2. Jika sistem berotasi dan sistem tetap memiliki titik asal yang sama, nyatakan percepatan \mathbf{a} dalam sistem tetap dalam suku-suku \mathbf{a}' , \mathbf{v}' , $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ dari sistem berotasi.

Solusi 2.2.2. Dengan definisi $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Jadi dengan (2.40)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{D}{Dt} \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Karena

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{D}{Dt}\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\mathbf{v} &= \frac{D}{Dt}(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}, \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{D}{Dt}\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \\ &= \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

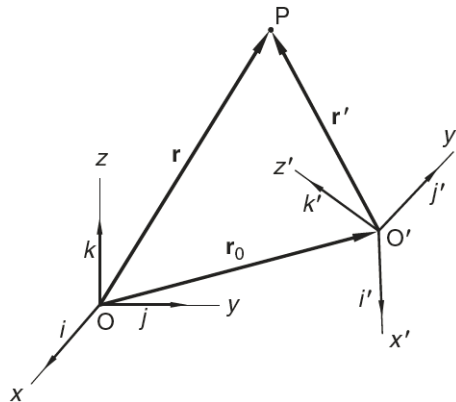
Karena $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}'$ dan $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}'$,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Secara umum, sistem aksien bisa memiliki gerak rotasi dan translasi. Ini bisa dianggap sebagai sebuah translasi yang diikuti oleh rotasi. Jelas dari Gambar 2.3 bahwa $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_0$, jadi

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \\ &= \left(\frac{D\mathbf{r}'}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) + \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Kecepatan translasi koordinat adalah $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt$. Dengan cara yang sama per-



Gambar 2.4: Geometri sistem koordinat. Sistem aksien merupakan kerangka acuan non inersial yang memiliki gerak translasi dan rotasi relatif terhadap sistem tetap.

cepatan linier koordinat adalah $\mathbf{a}_0 = d^2\mathbf{r}_0/dt^2$. Jadi percepatan partikel diberikan oleh

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{D\mathbf{r}'}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) + \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} \\ &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{D\mathbf{r}'}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{D\mathbf{r}'}{Dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) + \mathbf{a}_0.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Jadi rumus umum transformasi dari sistem tetap ke sistem bergerak adalah

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{a}_0. \quad (2.44)$$

Suku $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$ dikenal sebagai percepatan tegak lurus dan suku $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ dikenal sebagai percepatan coriolis. Percepatan sentripetal $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ arahnya selalu ke pusat.

2.3 Teori Ruang Lengkung

Anggap kita memiliki sebuah partikel bergerak dalam ruang lengkung seperti Gambar 2.5. Pada waktu tertentu, partikel berada pada titik P . Dalam selang waktu Δt partikel bergerak ke titik lain P' sepanjang lintasan. Jarak busur antara P dan P' adalah Δs . Misalkan vektor satuan dalam arah tangen (singgung) kurva pada P . Kecepatan partikel jelaslah dalam arah \mathbf{t} ,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v\mathbf{t}, \quad (2.45)$$

dengan v adalah besar kecepatan, yang diberikan oleh

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (2.46)$$

Titik P juga bisa ditentukan oleh s , jarak sepanjang kurva diukur dari sebuah titik tetap ke P . Maka dengan aturan rantai

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (2.47)$$

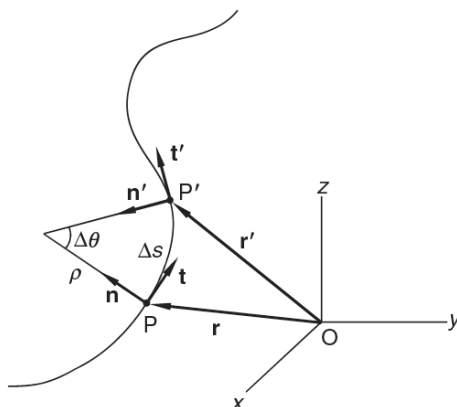
Bandingkan (2.45) dan (2.47), kita mempunyai

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}, \quad (2.48)$$

sebuah hasil yang mengejutkan. Jelaslah ketika $\Delta s \rightarrow 0$, $\left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = 1..$

Sekarang, \mathbf{t} adalah vektor satuan, yang berarti besarnya tidak berubah, maka turunannya haruslah tegak lurus dengan dirinya. Misalkan \mathbf{n} adalah vektor satuan tegak lurus \mathbf{t} , jadi kita bisa menuliskan

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}, \quad (2.49)$$



Gambar 2.5: Ruang lengkung. Vektor tangen \mathbf{t} dan vektor normal \mathbf{n} menentukan bidang singgung yang bisa berbelok.

dengan κ adalah besar dari dt/ds yang dinamakan kelengkungan. Vektor \mathbf{n} dikenal sebagai vektor normal dan tegak lurus \mathbf{t} . Hubungan timbal balik kelengkungan $\rho = 1/\kappa$ dikenal sebagai jari-jari kelengkungan. Persamaan (2.49) mendefinisikan baik κ dan \mathbf{n} , dan mengatakan seberapa cepat vektor singgung satuan berubah arah ketika kita bergerak sepanjang kurva.

Percepatan partikelnya adalah

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{t}) = \dot{v}\mathbf{t} + v\dot{\mathbf{t}},$$

dengan

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = v \frac{d\mathbf{t}}{ds} = v\kappa\mathbf{n}. \quad (2.50)$$

Jadi percepatannya bisa dituliskan sebagai

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{t} + v^2\kappa\mathbf{n} = \dot{v}\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}. \quad (2.51)$$

Komponen tangensialnya berkaitan dengan perubahan besar v , dan komponen normal \mathbf{a} berkaitan dengan perubahan arah \mathbf{v} . Komponen normal tidak lain adalah percepatan sentripetal yang kita kenal.

Untuk gerak melingkar dalam contoh 2.1.2, $\mathbf{r} = r \cos \omega t \mathbf{i} + r \sin \omega t \mathbf{j}$ dan $v = \omega r$,

$$\mathbf{t} = \frac{1}{v}\mathbf{v} = \frac{1}{\omega r}(-r\omega \sin \omega t \mathbf{i} + r\omega \cos \omega t \mathbf{j}) = -\sin \omega t \mathbf{i} + \cos \omega t \mathbf{j}.$$

Karena dengan (2.50)

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{1}{\omega r}(-\omega \cos \omega t \mathbf{i} - \omega \sin \omega t \mathbf{j}) = -\frac{1}{r^2}(r \cos \omega t \mathbf{i} + r \sin \omega t \mathbf{j}) = -\frac{1}{r^2}\mathbf{r}.$$

Tetapi dengan definisi $d\mathbf{t}/ds = \kappa\mathbf{n}$. Jadi, dalam kasus ini, $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/r$, $\kappa = 1/r$, dan $\varrho = 1/\kappa = r$. Dengan kata lain, jari-jari kelengkungan gerak melingkar sama dengan jari-jari lingkaran.

Dalam daerah yang kecil, kita bisa mendekati Δs dengan busur lingkaran. Jari-jari lingkaran ini adalah jari-jari kelengkungan kurva yang ditunjukkan Gambar 2.5.

Geraknya mungkin tidak terbatas di dalam bidang, meskipun baik kecepatan dan percepatannya berada pada bidang \mathbf{t} dan \mathbf{n} , yang dikenal sebagai bidang belok. Secara umum, terdapat derajat kebebasan yang lain, yaitu busur sebagai keseluruhan yang mungkin berbelok. Dengan kata lain, bidang belok tidak harus tetap. Kita memerlukan faktor lain untuk menghitung turunan percepatan.

Marilah kita definisikan sebuah vektor ketiga, dikenal sebagai *vektor binormal*

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \quad (2.52)$$

Karena baik \mathbf{t} dan \mathbf{n} merupakan vektor satuan dan keduanya saling tegak lurus, jadi \mathbf{b} juga merupakan sebuah vektor satuan dan tegak lurus terhadap \mathbf{t} dan \mathbf{n} . Dari definisi, dalam sistem tangan kanan,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{t} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{n} = -\mathbf{t}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{t} = -\mathbf{b}. \quad (2.53)$$

Semua vektor berkaitan dengan kurva pada titik P bisa dituliskan sebagai kombinasi linier dari \mathbf{t} , \mathbf{n} dan \mathbf{b} yang membentuk sebuah basis pada P . Sekarang kita menghitung $d\mathbf{b}/ds$ dan $d\mathbf{n}/ds$.

Karena \mathbf{b} tegak lurus terhadap \mathbf{t} , jadi $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0$. Setelah menurunkan kita mempunyai

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{b} \cdot \kappa\mathbf{n} = 0. \quad (2.54)$$

Jadi $d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{t} = -\kappa\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}$. Karena \mathbf{b} tegak lurus \mathbf{n} , $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$. Jadi $d\mathbf{b}/ds \cdot \mathbf{t} = 0$, yang berarti $d\mathbf{b}/ds$ tegak lurus \mathbf{t} . Di lain pihak, karena \mathbf{b} adalah vektor satuan, jadi $d\mathbf{b}/ds$ tegak lurus \mathbf{b} . Maka $d\mathbf{b}/ds$ harus dalam arah \mathbf{n} . Misalkan

$$d\mathbf{b}/ds = \gamma\mathbf{n}, \quad (2.55)$$

dengan γ , dari definisi, merupakan besar $d\mathbf{b}/ds$ yang disebut sebagai torsi kurva.

Untuk memperoleh $d\mathbf{n}/ds$, kita menggunakan (2.53)

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \gamma\mathbf{n} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \kappa\mathbf{n} = -\gamma\mathbf{b} - \kappa\mathbf{t}. \quad (2.56)$$

Himpunan persamaan

$$\boxed{\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -(\gamma\mathbf{b} + \kappa\mathbf{t}), \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \gamma\mathbf{n}} \quad (2.57)$$

yang merupakan persamaan Frenet-Serret. Persamaan ini penting dalam geometri diferensial.

Contoh 2.3.1. Carilah panjang busur s dari kurva $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$ antara $t = 0$ dan $t = T$. Nyatakan \mathbf{r} sebagai fungsi s .

Solusi 2.3.1. Karena $ds/dt = v$ dan $v = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})^{1/2}$,

$$ds = v dt = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})^{1/2} dt.$$

Ini terlihat sebagai rumus trivial tetapi sangat berguna dalam berbagai persoalan.

Dalam kasus sekarang

$$\begin{aligned} ds &= [(-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j}) \cdot (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j})]^{1/2} dt = a dt \\ s &= \int_0^T a dt = aT. \end{aligned}$$

Secara umum $s = at$ dan $t = s/a$, maka

$$\mathbf{r}(s) = a \cos \frac{s}{a} \mathbf{i} + a \sin \frac{s}{a} \mathbf{j}.$$

Contoh 2.3.2. Lingkaran heliks $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$, hitunglah \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} dan κ, ρ, γ untuk kurva ini.

Solusi 2.3.2.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= -a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k}, \\ v = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} &= [(a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t) + b^2]^{1/2} = (a^2 + b^2)^{1/2}, \\ \mathbf{t} = \frac{1}{v} \mathbf{v} &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + b \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{dt} &= \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = v \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \\ \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \frac{1}{v} \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{1}{(a^2 + b^2)} (-a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j}) = \kappa \mathbf{n}, \\ \kappa^2 &= (\kappa \mathbf{n} \cdot \kappa \mathbf{n}) = \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) = \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^2}, \\ \kappa &= \frac{a}{(a^2 + b^2)}, \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{a^2 + b^2}{a}, \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} [b \sin t \mathbf{i} - b \cos t \mathbf{j} + (a \sin^2 t + a \cos^2 t) \mathbf{k}] \\
&= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} [b \sin t \mathbf{i} - b \cos t \mathbf{j} + a \mathbf{k}].
\end{aligned}$$

Gunakan lagi aturan rantai

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{b}}{ds} = v \frac{d\mathbf{b}}{ds},$$

jadi

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{b}}{ds} &= \frac{1}{v} \frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{b}{(a^2 + b^2)[\cot t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}]} = \gamma \mathbf{n}, \\
\gamma &= -\frac{b}{(a^2 + b^2)}.
\end{aligned}$$

2.4 Operator Gradien

Aplikasi metode vektor dalam persoalan fisis paling sering berbentuk operasi diferensial. Kita telah membicarakan laju perubahan terhadap waktu yang memungkinkan kita mendefinisikan vektor kecepatan dan percepatan partikel. Sekarang kita mulai belajar dengan lebih sistematis laju perubahan terhadap koordinat spasial. Operator diferensial paling penting adalah gradien.

2.4.1 Gradien Fungsi Skalar

Sebelum kita membicarakan gradien, marilah kita ulang secara singkat notasi turunan dan turunan parsial dalam kalkulus

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Jika $\Delta x \rightarrow 0$ secara implisit dipahami, kita bisa mengalikan kedua ruas dengan Δx dan menuliskan

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{df}{dx} \Delta x. \quad (2.58)$$

Persamaan ini juga bisa dituliskan dari ekspansi Taylor $f(x + \Delta x)$ di sekitar x

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} (\Delta x)^2 + \dots$$

Persamaan (2.58) diperoleh jika kita meninggalkan suku $(\Delta x)^n$ dengan $n \geq 2$ ketika $\Delta x \rightarrow 0$.

Dalam turunan parsial, dengan cara yang sama

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x,$$

atau

$$f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z) = \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y.$$

Misalkan perbedaan fungsi skalar φ dua titik yang berdekatan $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ dan (x, y, z) adalah $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z).$$

Persamaan ini bisa dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ &\quad - [\varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z)] \\ &\quad - [\varphi(x, y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z + \Delta z)] - \varphi(x, y, z), \end{aligned}$$

karena kuantitas dalam dua kurung saling menghilangkan. Dengan membuka kurung, kita mempunyai

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ &\quad + \varphi(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z + \Delta z) \\ &\quad + \varphi(x, y, z + \Delta z) - \varphi(x, y, z). \end{aligned}$$

Dengan definisi turunan parsial, persamaan di atas bisa dituliskan sebagai

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Delta z. \quad (2.59)$$

Vektor perpindahan dari (x, y, z) ke $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ adalah

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}.$$

Kita bisa dengan mudah membuktikan

$$\left(\mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \cdot (\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Delta z.$$

Jadi

$$\Delta\varphi = \left(\mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \cdot \Delta\mathbf{r}. \quad (2.60)$$

Vektor di dalam kurung disebut sebagai gradien dari φ , dan biasanya dituliskan sebagai grad φ atau $\nabla\varphi$

$$\nabla\varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (2.61)$$

Karena φ adalah fungsi skalar sebarang, maka akan baik sekali apabila kita mendefinisikan operasi turunan dalam operator gradien ∇ (kadang dikenal sebagai del atau operator del)

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.62)$$

Ini merupakan sebuah operator vektor dan memenuhi konvensi yang sama seperti notasi turunan. Jika sebuah fungsi diletakkan di sebelah kirinya, $\varphi \nabla$ juga tetap merupakan operator yang tidak ada artinya. Apa yang akan kita turunkan harus diletakkan di sebelah kanan ∇ . Ketika ini beroperasi pada sebuah fungsi skalar, ini mengubah $\nabla \varphi$ menjadi sebuah vektor dengan besar dan arah tertentu. Ini juga memiliki arti fisis yang jelas.

Contoh 2.4.1. Buktikan bahwa $\nabla r = \hat{\mathbf{r}}$ dan $\nabla f(r) = \hat{\mathbf{r}} df/dr$, dengan $\hat{\mathbf{r}}$ adalah vektor satuan sepanjang vektor posisi $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dan r adalah besar dari \mathbf{r} .

Solusi 2.4.1.

$$\begin{aligned} \nabla r &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) r, \\ \mathbf{i} \frac{\partial r}{\partial x} &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{\mathbf{i}x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\mathbf{i}x}{r}, \quad \text{dll.} \\ \nabla r &= \frac{\mathbf{i}x}{r} + \frac{\mathbf{j}y}{r} + \frac{\mathbf{k}z}{r} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(r) &= \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} &= \mathbf{i} \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \mathbf{i} \frac{df}{dr} \frac{x}{r}, \quad \text{dll.} \\ \nabla f(r) &= \mathbf{i} \frac{df}{dr} \frac{x}{r} + \mathbf{j} \frac{df}{dr} \frac{y}{r} + \mathbf{k} \frac{df}{dr} \frac{z}{r} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} \frac{df}{dr} = \hat{\mathbf{r}} \frac{df}{dr}. \end{aligned}$$

Contoh 2.4.2. Buktikan bahwa $(\mathbf{A} \times \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{A}$.

Solusi 2.4.2.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \nabla)\mathbf{r} &= \left[(A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \mathbf{r} \\ &= \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

2.4.2 Interpretasi Geometrik dari Gradien

Untuk melihat arti fisis $\nabla\varphi$, marilah kita substitusikan (2.61) ke (2.60)

$$\Delta\varphi = \nabla\varphi \cdot \Delta\mathbf{r}.$$

Dengan mengambil limit $\Delta\mathbf{r}$ mendekati nol akan memberikan bentuk diferensial persamaan ini:

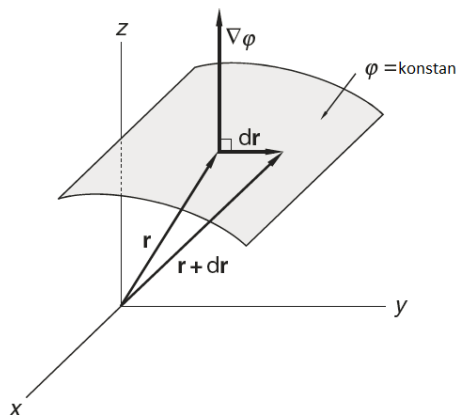
$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz. \quad (2.63)$$

Sekarang $\varphi(x, y, z) = C$ merepresentasikan sebuah permukaan. Sebagai contoh $\varphi(x, y, z) = x + y + z$ dan $\varphi = C$ merepresentasikan bidang paralel, seperti yang dibicarakan dalam bab sebelumnya. Nilai C berbeda berartijarak tegak lurus yang berbeda antara bidang dengan titik asal. Contoh lain $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$ merupakan permukaan bola dengan jari-jari 2. Mengubah 4 dengan 9 berarti bola lain dengan jari-jari 3.

Jika dua buah titik berdekatan berada pada permukaan yang sama $\varphi = C$, maka jelaslah $d\varphi = 0$, karena $\varphi(x + dx, y + dy, z + dz) = \varphi(x, y, z) = C$. Dalam kasus ini $d\mathbf{r}$ adalah sebuah vektor pada permukaan ini dan

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (2.64)$$

Karena perkalian titik $\nabla\varphi$ dan $d\mathbf{r}$ sama dengan nol, $\nabla\varphi$ haruslah tegak lurus $d\mathbf{r}$. Jadi $\nabla\varphi$ arahnya normal (tegak lurus) permukaan $\varphi = C$ seperti tampak pada Gambar 2.6 Kita bisa melihatnya dengan cara berbeda. Misalkan vektor satuan dalam arah $d\mathbf{r}$



Gambar 2.6: Gradien sebuah fungsi skalar. $\nabla\varphi$ merupakan sebuah vektor normal pada permukaan $\varphi = \text{konstan}$.

adalah \mathbf{d} dan besar $d\mathbf{r}$ adalah dr , maka perkalian (2.63) bisa dituliskan sebagai

$$d\varphi = \nabla\varphi \cdot \mathbf{d} dr,$$

atau

$$\frac{d\varphi}{dr} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{d}. \quad (2.65)$$

Ini berarti laju perubahan φ dalam arah \mathbf{d} sama dengan $\nabla\varphi \cdot \mathbf{d}$. Lebih dari itu, karena

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{d} = |\nabla\varphi| \cos \theta,$$

dengan θ berupa sudut antara $d\mathbf{r}$ dan $\nabla\varphi$, laju maksimum perubahan muncul pada $\theta = 0$. Ini berarti jika $d\mathbf{r}$ dan $\nabla\varphi$ memiliki arah yang sama, perubahan φ paling besar. Jadi arti $\nabla\varphi$ bisa diringkas sebagai berikut:

Vektor $\nabla\varphi$ berada dalam arah kenaikan paling curam dalam φ dan besar vektor $\nabla\varphi$ sama dengan laju pertambahan dalam arah tersebut.

Contoh 2.4.3. Carilah vektor satuan normal terhadap permukaan yang dinyatakan oleh $\varphi(x, y, z) = 2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ pada $(3, -1, 2)$.

Solusi 2.4.3. Pertama pastikan titik $(3, -1, 2)$ berada pada permukaan $2(3)^2 + 4(-1)2 - 5(2)^2 = -10$. Ingat bahwa vektor satuan normal pada permukaan pada titik sebarang adalah $\mathbf{n} = \nabla\varphi/|\nabla\varphi|$

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (2x^2 + 4yz - 5z^2) = 4x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + (4y - 10z)\mathbf{k}. \\ \mathbf{n} &= \left[\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \right]_{3,-1,2} = \frac{12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}}{(12^2 + 8^2 + 24^2)^{1/2}} = \frac{3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{\sqrt{46}}. \end{aligned}$$

Contoh 2.4.4. Carilah laju pertambahan maksimum untuk permukaan $\varphi(x, y, z) = 100 + xyz$ pada titik $(1, 3, 2)$. Ke manakah arah laju perubahan maksimum tersebut?

Solusi 2.4.4. Laju perubahan maksimumnya adalah $|\nabla\varphi|_{1,3,2}$.

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (100 + xyz) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}, \\ |\nabla\varphi|_{1,3,2} &= |6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}| = (36 + 4 + 9)^{1/2} = 9. \end{aligned}$$

Arah pertambahan maksimumnya diberikan oleh

$$\nabla\varphi|_{1,3,2} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Contoh 2.4.5. Carilah laju perubahan permukaan $\varphi(x, y, z) = xy^2 + yz^3$ pada titik $(2, -1, 1)$ dalam arah $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solusi 2.4.5.

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (xy^2 + yz^3) = y^2\mathbf{i} + (2xy + z^3)\mathbf{j} + 3yz^2\mathbf{k}, \\ \nabla\varphi|_{2,-1,1} &= \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Vektor satuan sepanjang $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ adalah

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{1}{3}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

Laju pertambahannya

$$\frac{d\varphi}{dr} = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\frac{11}{3}.$$

Contoh 2.4.6. Carilah permukaan bidang singgung terhadap permukaan yang dinyatakan $\varphi(x, y, z) = 2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ pada titik $(1, -1, 2)$.

Solusi 2.4.6. Jika \mathbf{r}_0 merupakan sebuah vektor dari titik asal ke titik $(1, -1, 2)$ dan \mathbf{r} merupakan sebuah vektor ke titik sebarang dalam bidang singgung, maka $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ berada pada bidang singgung. Bidang singgung pada $(1, -1, 2)$ arahnya normal pada gradien di titik tersebut, jadi kita mempunyai

$$\begin{aligned} \nabla\varphi|_{1,-1,2} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= 0. \\ \nabla\varphi|_{1,-1,2} &= [(2z^2 - 3y - 4)\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} - 4xz\mathbf{k}]_{1,-1,2} = 7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Jadi bidang singgungnya diberikan oleh persamaan

$$\begin{aligned} (7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) \cdot [(x - 1)\mathbf{i} - (y + 1)\mathbf{j} + (z - 2)\mathbf{k}] &= 0, \\ 7(x - 1) - 3(y + 1) + 8(z - 2) &= 0, \\ 7x - 3y + 8z &= 26. \end{aligned}$$

2.4.3 Integral Garis sebagai Vektor Gradien

Integral garis sering muncul dalam fisika. Integral garis yang paling sering muncul mungkin adalah kerja yang dilakukan oleh gaya \mathbf{F} antara A dan B sepanjang lintasan Γ :

$$\text{Kerja}(A \rightarrow B) = \int_{A,\Gamma}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

dengan

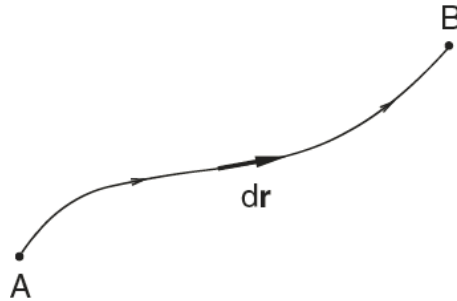
$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$$

yang merupakan vektor perpindahan diferensial dari (x, y, z) ke $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Kadang $d\mathbf{l}$ digunakan untuk menyatakan $d\mathbf{r}$ untuk menekankan vektor perpindahan diferensial sepanjang lintasan tertentu untuk integral garis. Kita tidak menggunakan konvensi ini di sini.

Untuk medan vektor sebarang $\mathbf{A}(x, y, z)$, integral garis

$$\int_{A,\Gamma}^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A,\Gamma}^B (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \quad (2.66)$$

merupakan jumlah kontribusi $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ untuk tiap perpindahan diferensial $d\mathbf{r}$ sepanjang kurva Γ dari A ke B seperti Gambar 2.7. Integral garis juga dikenal sebagai integral lintasan karena membawa lintasan tertentu Γ .



Gambar 2.7: Lintasan integral garis. Perpindahan diferensial $d\mathbf{r}$ sepanjang kurva tertentu antara A dan B .

Secara umum, hasilnya bergantung pada lintasan yang dilalui dari A ke B . Tetapi jika $\mathbf{A} = \nabla\varphi$ untuk fungsi skalar φ , integralnya tidak bergantung lintasan

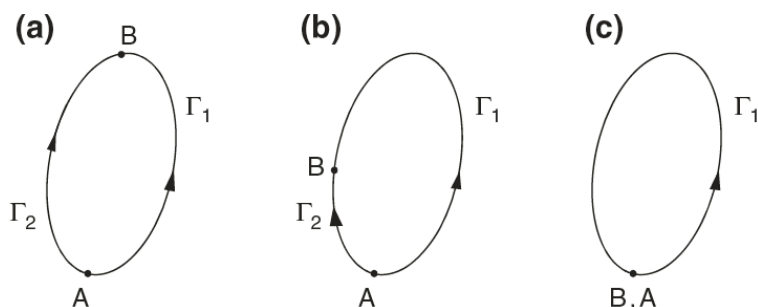
$$\int_{A,\Gamma}^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A,\Gamma}^B \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A), \quad (2.67)$$

di sini kita telah menggunakan (2.63) untuk mengubah $\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$ menjadi turunan total $d\varphi$. Karena hasilnya hanya bergantung pada posisi dua buah titik ujung, integralnya tidak bergantung lintasan. Dalam kasus ini, integral dari A ke B pada Gambar 2.8 memberikan nilai yang sama apakah melalui Γ_1 atau Γ_2 . Ini akan tetap berlaku ketika kita memindahkan dua buah titik A dan B semakin dekat, tidak bergantung seberapa dekat jadinya Γ_2 . Ketika B dipindahkan ke tempat yang sama dengan A , integral garis melalui Γ_2 hilang karena panjang Γ_2 sama dengan nol. Jadi integral garis melalui Γ_1 adalah integral mengelilingi loop tertutup:

$$\oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (2.68)$$

Simbol \oint berarti integrasi terhadap loop tertutup. Integral garis terhadap loop tertutup dinamakan sirkulasi medan vektor \mathbf{A} mengelilingi loop tertutup Γ . Jadi kita memiliki hasil sebagai berikut:

Ketika sebuah medan vektor \mathbf{A} merupakan gradien fungsi skalar φ , sirkulasi \mathbf{A} mengelilingi kurva tertutup sama dengan nol.



Gambar 2.8: Kebebasan lintasan integral garis $\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$. (a) Nilai integral dari A ke B sepanjang Γ_1 sama dengan sepanjang Γ_2 . (b) Nilainya tetap sama meskipun Γ_2 lebih pendek. (c) Ketika Γ_2 menjadi nol, integral sepanjang Γ_2 hilang. Integral sepanjang Γ_1 menjadi integral loop, harus bernilai nol.

Kadang ini dinamakan teorema fundamental gradien. Argumen bisa dibalik. Jika $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0$, maka $\int_A^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ tidak bergantung lintasan. dalam kasus ini \mathbf{A} merupakan gradien fungsi skalar φ .

Contoh 2.4.7. Carilah kerja yang dilakukan oleh gaya $\mathbf{F} = 6xy\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$ dalam sebuah bidang sepanjang kurva $C : y = x^2 - x$ dari $(0, 0)$ ke $(2, 2)$.

Solusi 2.4.7. Kerja yang dilakukan adalah integral garis

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C [6xy\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2)\mathbf{j}] \cdot (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz) \\ &= \int_C [6xy dx + (3x^2 - 3y^2)dy]. \end{aligned}$$

Terdapat lebih dari satu buah cara untuk melakukan integrasi sepanjang kurva C . Metode I. Rubah semua variabel ke dalam x

$$y = x^2 - x, \quad dy = (2x - 1)dx,$$

$$\begin{aligned} W &= \int_C [6xy dx + (3x^2 - 3y^2)dy] \\ &= \int_0^2 \{6x(x^2 - x)dx + [3x^2 - 3(x^2 - x)^2](2x - 1)\}dx \\ &= \int_0^2 \{-6x^5 + 15x^4 - 6x^2\}dx = [-x^6 + 3x^5 - 2x^3]_0^2 = 16. \end{aligned}$$

Metode II. Kurva C bisa dianggap sebagai lintasan yang dinyatakan oleh puncak vektor posisi $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ dengan t sebuah parameter. Ini bisa dibuktikan dengan $x = t$ dan $y = t^2 - t$, kurva $y = x^2 - x$ dilewati. Jadi kurva C diberikan oleh

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = t\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j}.$$

Titik (0,0) berkaitan dengan $t = 0$ dan (2,2) berkaitan dengan $t = 2$. Sekarang kita rubah semua variabel ke dalam t

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} &= \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j}, \\ \mathbf{F} &= 6xy\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2)\mathbf{j} = 6t(t^2 - t)\mathbf{i} + [3t^2 - 3(x^2 - x)^2]\mathbf{j}, \\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \{6t(t^2 - t) + [3t^2 - 3(x^2 - x)^2](2t - 1)\} dt, \\ W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \{6t(t^2 - t) + [3t^2 - 3(x^2 - x)^2](2t - 1)\} dt = 16.\end{aligned}$$

Contoh 2.4.8. Hitunglah integral garis pada contoh terakhir dari titik (0,0) ke titik (x_1, y_1) sepanjang lintasan lurus dari (0,0) ke $(x_1, 0)$ kemudian ke (x_1, y_1) . Lakukan perhitungan yang sama untuk lintasan sepanjang dua sisi segi empat lainnya, melalui titik $(0, y_1)$. Jika $(x_1, y_1) = (2, 2)$, berapakah nilainya?

Solusi 2.4.8.

$$I_1(x_1, y_1) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} [6xy dx + (3x^2 - 3y^2)dy],$$

$$C_1 : (0, 0) \rightarrow (x_1, 0) \rightarrow (x_1, y_1).$$

Dari $(0, 0) \rightarrow (x_1, 0) : y = 0, dy = 0,$

$$\int_{0,0}^{x_1,0} [6xy dx + (3x^2 - 3y^2)dy] = 0.$$

Dari $(x_1, 0) \rightarrow (x_1, y_1) : x = x_1, dx = 0,$

$$\begin{aligned}\int_{x_1,0}^{x_1,y_1} [6xy dx + (3x^2 - 3y^2)dy] &= \int_0^{y_1} (3x_1^2 - 3y^2)dy \\ &= [3x_1^2 y - y^3]_0^{y_1} = 3x_1^2 y_1 - y_1^3,\end{aligned}$$

$$I_1(x_1, y_1) = \left[\int_{0,0}^{x_1,0} + \int_{x_1,0}^{x_1,y_1} \right] [6xy dx + (3x^2 - 3y^2)dy] = 3x_1^2 y_1 - y_1^3,$$

$$I_2(x_1, y_1) = \int_{C_2} [6xy dx + (3x^2 - 3y^2)dy],$$

$$C_2 : (0, 0) \rightarrow (0, y_1) \rightarrow (x_1, y_1).$$

Dari $(0, 0) \rightarrow (0, y_1) : x = 0, dx = 0,$

$$\int_{0,0}^{0,y_1} [6xy \, dx + (3x^2 - 3y^2)dy] = \int_0^{y_1} (-3y^2)dy = [-y^3]_0^{y_1} = -y_1^3.$$

Dari $(0, y_1) \rightarrow (x_1, y_1) : y = y_1, dy = 0,$

$$\int_{0,y_1}^{x_1,y_1} [6xy \, dx + (3x^2 - 3y^2)dy] = \int_0^{x_1} 6xy_1 \, dx = 3x_1^2 y_1,$$

$$I_2(x_1, y_1) = \left[\int_{0,0}^{0,y_1} + \int_{0,y_1}^{x_1,y_1} \right] [6xy \, dx + (3x^2 - 3y^2)dy] = -y_1 + 3x_1^2 y_1.$$

Jelaslah $I_1(x_1, y_1) = I_2(x_1, y_1),$ dan $I_1(2, 2) = 3(2)^2 2 - (2)^3 = 16.$

Contoh 2.4.9. Dari dua buah contoh terakhir, jelaslah bahwa integral garis $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dengan $\mathbf{F} = 6xy\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$ hanya bergantung pada dua buah titik ujung dan bebas terhadap lintasan integrasi, jadi $\mathbf{F} = \nabla\varphi.$ Carilah $\varphi(x, y)$ dan buktikan $\int_{0,0}^{2,2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(2, 2) - \varphi(0, 0).$

Solusi 2.4.9.

$$\nabla\varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 6xy\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2)\mathbf{j} = \mathbf{F},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 6xy \implies \varphi = 3x^2 y + f(y),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 + \frac{df(y)}{dy},$$

$$\frac{df(y)}{dy} = -3y^2 \implies f(y) = -y^3 + k \quad (k \text{ adalah sebuah konstanta}).$$

Jadi

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= 3x^2 y - y^3 + k. \\ \int_{0,0}^{2,2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{0,0}^{2,2} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(2, 2) - \varphi(0, 0) = 16 + k - k = 16. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\int_{0,0}^{x_1,y_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \varphi(x_1, y_1) - \varphi(0, 0) = 3x_1^2 y_1 - y_1^3,$$

yang sesuai dengan hasil pada contoh terakhir.

Contoh 2.4.10. Carilah integral garis $\int_{0,0}^{2,1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dengan $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ sepanjang lintasan (a) $y = (1/2)x$, (b) $y = (1/4)x^2$, (c) dari (0,0) lurus ke (0,1) kemudian melalui garis horizontal ke (2,1).

Solusi 2.4.10. $\int_{0,0}^{2,1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{0,0}^{2,1} (xy \, dx - y^2 \, dy)$ sepanjang

$$(a) \, y = \frac{1}{2}x, \quad \text{jadi} \quad dy = \frac{1}{2}dx,$$

$$\int_{0,0}^{2,1} (xy \, dx - y^2 \, dy) = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 dx - \frac{1}{8}x^2 dx \right) = \left[\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = 1.$$

$$(b) \, y = \frac{1}{4}x^2, \quad \text{jadi} \quad dy = \frac{1}{2}x \, dx,$$

$$\int_{0,0}^{2,1} (xy \, dx - y^2 \, dy) = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 dx - \frac{1}{32}x^5 dx \right) = \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{32 \cdot 6}x^6 \right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

(c) Dari (0,0) lurus ke (0,1): $x = 0$ maka $dx = 0$; kemudian dari (0,1) sepanjang garis horizontal ke (2,1): $y = 1$ dan $dy = 0$,

$$\begin{aligned} \int_{0,0}^{2,1} (xy \, dx - y^2 \, dy) &= \int_{0,0}^{0,1} (xy \, dx - y^2 \, dy) + \int_{0,1}^{2,1} (xy \, dx - y^2 \, dy) \\ &= - \int_0^1 y^2 \, dy + \int_0^2 x \, dx = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Secara umum integral garis $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ bergantung pada lintasan integrasi seperti yang ditunjukkan contoh terakhir. Tetapi jika $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, integral garisnya tidak bergantung lintasan integrasi. Kita akan membahas syarat sehingga \mathbf{F} bisa dinyatakan sebagai gradien sebuah fungsi skalar.

2.5 Divergensi Vektor

Sama seperti kita bisa mengoperasikan ∇ pada sebuah medan skalar, kita juga bisa mengoperasikan ∇ pada sebuah medan vektor \mathbf{A} dengan mengambil perkalian titik. Dengan komponen, operasinya memberikan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.69}$$

Sama seperti perkalian titik dua buah vektor adalah skalar, $\nabla \cdot \mathbf{A}$. Penjumlahan ini, dinamakan sebagai divergensi \mathbf{A} (atau $\text{div } \mathbf{A}$), merupakan kombinasi khusus turunan.

Contoh 2.5.1. Buktikan $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ dan $\nabla \cdot \mathbf{r}f(r) = 3f(r) + r(df/dr)$.

Solusi 2.5.1.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{r} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \\ &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{r}f(r) &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i}xf(r) + \mathbf{j}yf(r) + \mathbf{k}zf(r)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}[xf(r)] + \frac{\partial}{\partial y}[yf(r)] + \frac{\partial}{\partial z}[zf(r)] \\ &= f(r) + x \frac{\partial f}{\partial x} + f(r) + y \frac{\partial f}{\partial y} + f(r) + z \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= 3f(r) + x \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + y \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} + z \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial z}.\end{aligned}$$

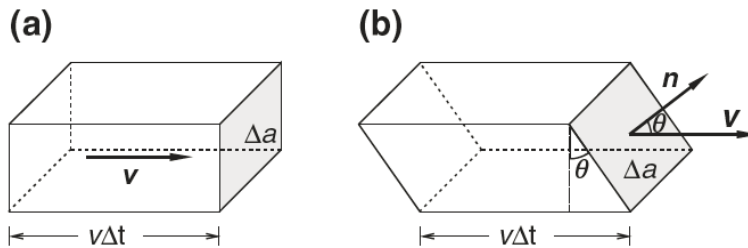
$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}; \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{r}f(r) &= 3f(r) + \frac{x^2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{y^2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{z^2}{r} \frac{df}{dr} \\ &= 3f(r) + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} \frac{df}{dr} = 3f(r) + r \frac{df}{dr}.\end{aligned}$$

2.5.1 Fluks Medan Vektor

Untuk memperoleh perasaan fisis divergensi medan vektor, akan sangat membantu untuk memperkenalkan konsep fluks (bahasa Latin untuk “aliran”). Perhatikan sebuah fluida dengan kerapatan ρ bergerak dengan kecepatan v . Kita mencari massa fluida total yang melewati sebuah luas Δa tegak lurus terhadap arah aliran dalam selang waktu Δt . Seperti yang tampak pada Gambar 2.9 (a), semua fluida dalam pipa persegi sepanjang $v\Delta t$ dengan alas Δa sebagai alas akan melewati Δa dalam selang waktu Δt . Volume pipa adalah $v\Delta t\Delta a$ dan mengandung massa keseluruhan $\rho v\Delta t\Delta a$. Pembagian dengan Δt akan memberikan massa yang melalui Δa tiap satuan waktu, yang definisinya adalah laju aliran

$$\text{Laju aliran melalui } \Delta a = \rho v \Delta a.$$



Gambar 2.9: Fluks yang melalui alas. (a) Fluks melalui $\Delta a = \rho v \Delta a$. (b) Fluks melalui Δa miring $\Delta a = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta a$.

Sekarang marilah kita perhatikan kasus yang ditunjukkan Gambar 2.9 b. Dalam kasus ini luas Δa tidak tegak lurus terhadap arah aliran. Massa total yang akan melalui Δa yang miring dalam selang waktu Δt hanyalah kerapatan kali volume pip dengan alas miring. Volum tersebut adalah $v \Delta t \Delta a \cos \theta$, dengan θ adalah sudut antara vektor kecepatan \mathbf{v} dan \mathbf{n} vektor satuan normal pada Δa . Tetapi $v \cos \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$. Mengalikannya dengan ρ dan membaginya dengan Δt , kita mempunyai

$$\text{Laju aliran melalui } \Delta a \text{ miring} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta a.$$

Untuk memperoleh aliran total melalui permukaan S sebarang, pertama kita bagi semua permukaan menjadi bagian-bagian kecil sehingga pada permukaan kecil tersebut datar. Kemudian kita jumlahkan kontribusi dari semua bagian kecil tersebut. Ketika bagian kecil menjadi semakin kecil dan jumlahnya semakin banyak tanpa batas, penjumlahannya menjadi integral permukaan. Maka

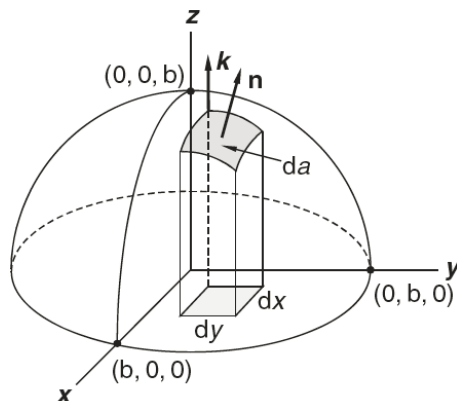
$$\text{Aliran total melalui } S = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (2.70)$$

Jika kita mendefinisikan $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, (2.70) juga dikenal sebagai fluks \mathbf{J} yang melalui permukaan S

$$S = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (2.71)$$

Asalnya ini berarti laju perubahan aliran, istilah fluks digeneralisasi untuk menyatakan integral permukaan komponen normal sebuah vektor. Sebagai contoh, vektor bisa berupa medan listrik \mathbf{E} . Meskipun medan listrik tidak mengalir seperti fluida, kita masih bisa mengatakan “fluks \mathbf{E} melalui permukaan tertutup sama dengan muatan total di dalam” membantu kita memvisualisasikan garis medan listrik “mengalir” ke luar dari muatan listrik.

Contoh 2.5.2. Misalkan $\mathbf{J} = \rho v_0 \mathbf{k}$ dengan ρ merupakan kerapatan fluida dan $v_0 \mathbf{k}$ adalah kecepatan fluida (\mathbf{k} adalah vektor satuan dalam arah z). Hitunglah fluks \mathbf{J} (laju aliran fluida) melalui permukaan setengah bola yang berjari-jari b



Gambar 2.10: Elemen permukaan setengah bola. Luas yang diproyeksikan dalam bidang xy adalah $dxdy = \cos \theta da$ dengan θ adalah sudut antara bidang singgung pada da dan bidang xy .

Solusi 2.5.2. Persamaan permukaan bola adalah $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. Maka vektor satuan normal pada permukaan adalah

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)^{1/2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{b}.$$

Misalkan fluks \mathbf{J} melalui setengah bola adalah Φ yang diberikan oleh

$$\Phi = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = \iint_S \rho v_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, da,$$

dengan da merupakan elemen luas permukaan setengah bola seperti ditunjukkan Gambar 2.10. Luas permukaan diproyeksikan menjadi $dxdy$ dalam bidang xy . Misalkan θ adalah sudut antara da (sebenarnya bidang singgung pada da) dan bidang xy . Maka kita mempunyai $dxdy = \cos \theta da$. Integralnya menjadi

$$\Phi = \iint_S \rho v_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, da = \iint_S \rho v_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \frac{1}{\cos \theta} dx \, dy,$$

dengan batas pada x dan y sedemikian rupa sehingga kita mengintegrasikan luas terproyeksi dalam bidang xy yang berada dalam lingkaran dengan jari-jari b . Sudut antara dua bidang sama dengan sudut antara vektor normal dengan bidang. Karena \mathbf{n} adalah satuan normal pada da dan \mathbf{k} adalah satuan normal pada bidang xy , sudut θ antara \mathbf{n} dan \mathbf{k} . Jadi $\cos \theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$. Sehingga

$$\Phi = \iint_S \rho v_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \frac{1}{\cos \theta} dx \, dy = \iint_S \rho v_0 dx \, dy = \rho v_0 \pi b^2.$$

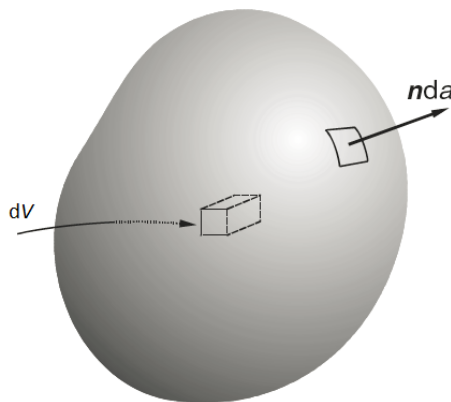
Perhatikan hasil ini sama dengan fluks yang melalui luas lingkaran datar dalam bidang xy . Faktanya, ini tepat sama seperti fluks yang melalui permukaan sebarang dengan batas berupa lingkaran berjari-jari b dalam bidang xy , karenan kita memperoleh hasil tanpa menggunakan ekspresi eksplisit dari \mathbf{n} .

2.5.2 Teorema Divergensi

Teorema divergensi yang juga dikenal sebagai teorema Gauss. Ini menghubungkan fluks sebuah medan vektor melalui permukaan tertutup S dengan divergensi medan vektor dalam volume yang dilingkupinya

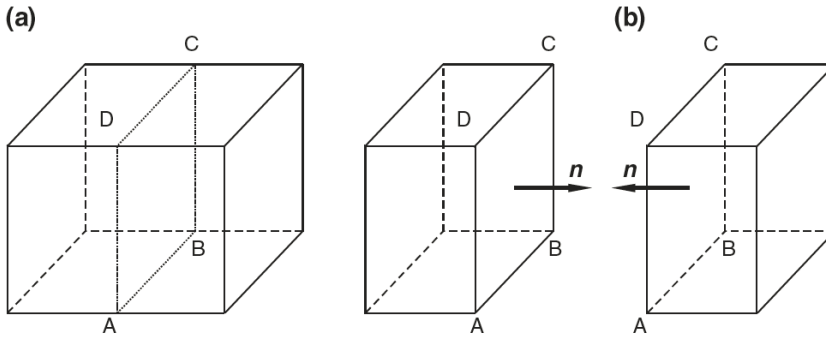
$$\boxed{\iint_{\text{permukaan tertutup } S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = \iiint_{\text{vol. terlindungi dlm } S} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV.} \quad (2.72)$$

Integral permukaan terhadap permukaan tertutup yang ditunjukkan Gambar 2.11. Vektor satuan normal \mathbf{n} arahnya ke luar dari volume yang dilingkupi. Ruas kanan persamaan ini merupakan integrasi divergensi terhadap volume yang dilingkupi pada permukaan.



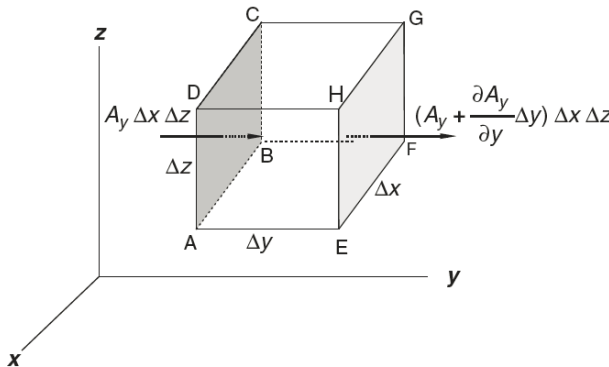
Gambar 2.11: Teorema divergensi. Volume yang dilingkupi oleh permukaan. Integral divergensi terhadap volume di dalam sama dengan fluks yang melalui permukaan luar.

Untuk membuktikan teorema ini, kita memotong V menjadi kubus kecil (diferensial) yang banyak sekali. Integral volumenya merupakan jumlah integral terhadap semua kubus. Bayangkan kita mempunyai balok dengan enam buah permukaan yang melingkupi volume V . Kita memisahkannya menjadi dua buah kubus dengan irisan seperti Gambar 2.12. Perhatikan bahwa jumlah fluks yang melalui enam buah



Gambar 2.12: Fluks yang ke luar dari sisi bersentuhan saling menghilangkan.

permukaan di sebelah kiri dan fluks yang melalui enam buah permukaan kubus di kanan sama dengan fluks yang melalui enam buah permukaan balok sebelum dipotong. Ini karena vektor satuan normal pada bidang sentuh dua buah kubus yang bersebelahan sama dan saling berlawanan arah. Jadi kontribusi terhadap fluks dari dua sisi saling menghilangkan. Sehingga secara umum ini berlaku bahwa jumlah fluks yang melalui permukaan semua kubus sama dengan integral terhadap permukaan yang tidak memiliki tetangga yang bersentuhan, yaitu permukaan luar mula-mula. Jadi jika kita bisa membuktikan hasil untuk kubus kecil, kita bisa membuktikannya untuk volume sebarang.



Gambar 2.13: Fluks melalui sisi kiri dan kanan kubus infinitesimal.

Perhatikan fluks \mathbf{A} melalui permukaan kubus kecil dengan volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ yang ditunjukkan Gambar 2.13. Vektor satuan tegak lurus terhadap permukaan ABCD jelaslah $-\mathbf{j}$ ($\mathbf{n} = -\mathbf{j}$). Fluks yang melalui permukaan ini diberikan oleh

$$\mathbf{A}(x, y, z) \cdot (-\mathbf{j}) \Delta a = -A_y(x, y, z) \Delta x \Delta z.$$

Fluks didefinisikan sebagai “aliran” keluar. Tanda negatifnya berarti fluks masuk ke dalam volume. Dengan cara yang sama, vektor satuan normal terhadap permukaan EFGH adalah \mathbf{j} , dan fluks melalui permukaan ini adalah

$$\mathbf{A}(x, y, +\Delta y, z) \cdot \mathbf{j} \Delta a = A_y(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z.$$

Perhatikan bahwa setiap titik (x, y, z) pada ABCD, titik yang berkaitan pada EFGH adalah $(x, y + \Delta y, z)$. Fluks bersih melalui dua buah permukaan ini adalah jumlah keduanya:

$$[A_y(x, y + \Delta y, z) - A_y(x, y, z)] \Delta x \Delta z = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z = \frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta V. \quad (2.73)$$

Dengan menggunakan alasan yang sama terhadap komponen fluks dalam dua arah yang lain, kita memperoleh fluks keseluruhan melalui semua permukaan kubus adalah

$$\sum_{\text{cube}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V. \quad (2.74)$$

Ini menunjukkan bahwa fluks keluar dari permukaan sebuah kubus infinitesimal sama dengan divergensi vektor dikalikan volume kubus. Jadi divergensi memiliki arti fisis sebagai berikut:

Divergensi sebuah vektor \mathbf{A} pada sebuah titik merupakan fluks \mathbf{A} keluar tiap satuan volume dalam titik yang berdekatan.

Untuk volume berhingga sebarang, fluks \mathbf{A} keseluruhan melalui permukaan luar yang melingkupi volume sama dengan jumlah fluks yang keluar dari semua kubus interior infinitesimal, dan fluks keluar tiap kubus sama dengan divergensi \mathbf{A} kali volume kubus. Jadi integral komponen normal sebuah vektor terhadap permukaan tertutup sebarang sama dengan integral divergensi vektor terhadap volume yang dilingkupi permukaan,

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV. \quad (2.75)$$

Lingkaran kecil pada integral ganda berarti integral permukaan terhadap permukaan tertutup. Integral volume dipahami sebagai integral terhadap semua daerah di dalam permukaan tertutup. Ini adalah teorema divergen dari (2.72), yang sering disebut sebagai teorema divergensi fundamental.

Aliran medan \mathbf{A} dikatakan *solenoidal* jika divergensi \mathbf{A} di setiap titik sama dengan nol ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$). Fluida tak kompresibel harus mengalir ke luar secepat aliran masuk pada volume yang diberikan. Divergensi aliran medan tersebut haruslah nol, jadi medannya solenoidal.

Di sisi lain jika \mathbf{A} sedemikian rupa sehingga pada titik tertentu $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$, maka terdapat aliran keluar dari volume kecil yang melingkupinya pada titik tersebut.

Fluida harus “diciptakan” atau “dimasukkan” pada titik tersebut. Jika $\nabla \cdot \mathbf{A}$ negatif, fluida haruslah “diambil” pada titik tersebut. Jadi kita sampai pada kesimpulan berikut.

Divergensi aliran medan pada sebuah titik adalah ukuran kekuatan sumber (atau kehilangan) aliran pada titik tersebut.

Contoh 2.5.3. Buktikan teorema divergensi dengan menghitung kedua ruas (2.72) dengan $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ terhadap sebuah silinder yang dinyatakan oleh $x^2 + y^2 = 4$ dan $0 \leq z \leq 4$.

Solusi 2.5.3. Karena $\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 3$, integral volumenya

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = 3 \iiint_V dV = 3(\pi 2^2)4 = 48\pi,$$

yang merupakan tiga kali volume silinder. Permukaan silinder terdiri dari atas, bawah dan sisi lengkung. Jadi integral permukaannya dibagi menjadi tiga bagian

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = \iint_{\text{atas}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da + \iint_{\text{bawah}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da + \iint_{\text{lengkung}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Untuk permukaan atas

$$\iint_{\text{atas}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = \iint_{\text{atas}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \, da = 4 \iint_{\text{atas}} da = 4\pi 2^2 = 16\pi.$$

Untuk permukaan bawah

$$\iint_{\text{atas}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = \iint_{\text{bawah}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{k}) \, da = 0.$$

Untuk permukaan lengkung, kita harus mencari vektor satuan normal \mathbf{n} . Karena permukaannya diberikan oleh $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 = 4$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}}{(4x^2 + 4y^2)^{1/2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{2},$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 2,$$

$$\iint_{\text{lengkung}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = 2 \iint_{\text{lengkung}} da = 2(2\pi \cdot 2)4 = 32\pi.$$

Jadi

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = 16\pi + 0 + 32\pi = 48\pi,$$

yang sama dengan integral volume.

2.5.3 Persamaan Kontinuitas

Salah satu aplikasi paling penting dari teorema divergensi adalah menggunakannya untuk menyatakan hukum kekekalan dalam bentuk diferensial. Sebagai sebuah contoh, perhatikan rapat fluida ρ bergerak dengan kecepatan \mathbf{v} . Menurut (2.70), laju aliran fluida keluar permukaan tertutup adalah

$$\text{Laju aliran keluar melalui permukaan tertutup} = \oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (2.76)$$

Sekarang karena kekekalan massa, laju aliran keluar harus sama dengan laju berkurangnya fluida di dalam volume yang dilingkupi oleh permukaan. Jadi

$$\oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV. \quad (2.77)$$

Tanda negatif untuk fakta bahwa fluida di dalam berkurang jika alirannta ke luar. Dengan menggunakan teorema divergensi

$$\oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da = \iiint_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, dV, \quad (2.78)$$

kita mempunyai

$$\iiint_V \left[\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] \, dV = 0. \quad (2.79)$$

Karena volume V dalam persamaan ini, integrannya sama dengan nol, atau

$$\boxed{\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.} \quad (2.80)$$

Persamaan ini, dikenal sebagai persamaan kontinuitas, menghubungkan kerapatan dan kecepatan pada titik yang sama dalam bentuk diferensial. Hukum kekekalan lain bisa dinyatakan dengan cara yang serupa.

Untuk fluida tak kompresibel, ρ tidak berubah terhadap waktu. Dalam kasus tersebut, divergensi kecepatan sama dengan nol

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.81)$$

Singularitas dalam Persamaan. Dalam menurunkan teorema integral, kita mensyaratkan medan skalar dan vektor kontinu dan berhingga pada setiap titik. Kadang terdapat titik, garis, maupun permukaan sehingga medan menjadi diskontinu bahkan tak hingga. Contohnya adalah medan listrik yang disebabkan oleh muatan titik, garis atau permukaan. Salah satu cara untuk mengatasi persoalan ini adalah dengan mengeliminasi elemen volum tersebut dengan permukaan yang sesuai, dari domain sehingga teorema bisa digunakan. Skema lain adalah dengan “membuang” kuantitas diskontinuitas, seperti menggunakan rapat muatan, sehingga medannya berkelakuan baik. Cara lain adalah dengan menggunakan fungsi delta Dirac. Subbab adalah contoh spesifik prosedur ini.

2.6 Curl Vektor

Perkalian silang operator gradien dengan operator ∇ dengan vektor \mathbf{A} menghasilkan kombinasi khusus turunan komponen \mathbf{A}

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Ini adalah sebuah vektor yang dikenal sebagai curl dari \mathbf{A} . Nama curl menyaranakan bahwa ini memiliki hubungan dengan rotasi. Faktanya, dalam teks Eropa kata rotasi (atau rot) digunakan untuk curl. Dalam Contoh 2.1.3, kita telah memperhatikan gerak benda berotasi terhadap sumbu- z dengan kecepatan sudut ω . Kecepatan partikel pada benda adalah $\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$. Karakteristik sirkular medan kecepatan ini dinyatakan dengan curl dari kecepatan

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \mathbf{k}, \quad (2.83)$$

yang menunjukkan curl \mathbf{v} besarnya dua kali kecepatan sudut benda berotasi.

Jika kecepatan ini menyatakan aliran medan, curl \mathbf{v} dinamakan vektor vortisitas medan. Ini berarah ke gerak vorteks dan merupakan ukuran kecepatan sudut aliran. Kincir air kecil yang diletakkan di dalam medan akan berotasi di dalam daerah dengan $\nabla \times \mathbf{v} \neq 0$. Kincir air akan tetap stasioner dalam daerah dengan $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Jika curl medan vektor sama dengan nol, medan dikatakan irrotasional.

Contoh 2.6.1. Buktikan (a) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$; (b) $\nabla \times \mathbf{r}f(r) = \mathbf{0}$ dengan \mathbf{r} vektor posisi.

Solusi 2.6.1. (a) Karena $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, maka

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{r}f(r) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y}[zf(r)] - \frac{\partial}{\partial z}[yf(r)] \right\} \mathbf{i} \\
&+ \left\{ \frac{\partial}{\partial z}[xf(r)] - \frac{\partial}{\partial x}[zf(r)] \right\} \mathbf{j} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x}[yf(r)] - \frac{\partial}{\partial y}[xf(r)] \right\} \mathbf{k} \\
&= \left\{ z \frac{\partial}{\partial y} f(r) - y \frac{\partial}{\partial z} f(r) \right\} \mathbf{i} + \left\{ x \frac{\partial}{\partial z} f(r) - z \frac{\partial}{\partial x} f(r) \right\} \mathbf{j} \\
&+ \left\{ y \frac{\partial}{\partial x} f(r) - x \frac{\partial}{\partial y} f(r) \right\} \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} f(r) &= \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} \quad \text{dan} \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \\
\frac{\partial}{\partial y} f(r) &= \frac{df}{dr} \left(-\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right) = -\frac{df}{dr} \frac{y}{r}, \\
\frac{\partial}{\partial x} f(r) &= -\frac{df}{dr} \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial}{\partial z} f(r) = -\frac{df}{dr} \frac{z}{r}.
\end{aligned}$$

Jadi

$$\nabla \times \mathbf{r}f(r) = \frac{df}{dr} \left\{ -z \frac{y}{r} + y \frac{z}{r} \right\} \mathbf{i} + \frac{df}{dr} \left\{ -x \frac{z}{r} + z \frac{x}{r} \right\} \mathbf{j} + \frac{df}{dr} \left\{ -y \frac{x}{r} + x \frac{y}{r} \right\} \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

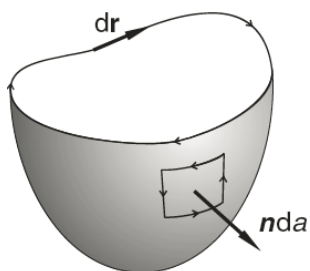
2.6.1 Teorema Stokes

Teorema Stokes menghubungkan integral garis sebuah fungsi vektor mengelilingi loop tertutup C dengan integral permukaan vektor tersebut terhadap permukaan S yang menjangkau loop tersebut. Teoremanya yaitu

$$\boxed{\int_{\text{loop tertutup } C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\text{luas dibatasi } C} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, da,} \quad (2.84)$$

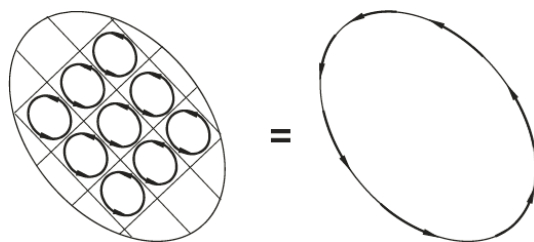
dengan $d\mathbf{r}$ merupakan elemen garis berarah sepanjang kurva tertutup C dan S merupakan permukaan yang dibatasi C . Pada titik sebarang pada permukaan, vektor satuan normal \mathbf{n} tegak lurus dengan elemen permukaan da pada titik seperti Gambar 2.1. Tanda \mathbf{n} ditentukan oleh perjanjian tanda “aturan tangan kanan”. Putar jari-jari tangan kanan dalam arah $d\mathbf{r}$, kemudian jempol anda arahnya ke \mathbf{n} positif. Jika kurva C berada pada bidang, permukaan paling sederhana yang menjangkau C adalah permukaan datar. Sekarang bayangkan permukaan datar merupakan sebuah membran fleksibel yang bisa secara kontinu membesar tetapi tetap melekat pada kurva

C . Kita memperoleh barisan permukaan lengkung. Teorema Stokes berlaku untuk semua permukaan. Arah positif \mathbf{n} untuk permukaan datar diperoleh dari aturan tangan kanan. Ketika permukaan membesar, \mathbf{n} mengikutinya. Sebagai contoh, dengan arah $d\mathbf{r}$ yang ditunjukkan Gambar 2.14, vektor normal \mathbf{n} permukaan yang hampir datar dibatasi C berarah “ke dalam” menurut aturan tangan kanan. Ketika permukaan membesar ke dalam bentuk terakhir, \mathbf{n} , arahnya berubah menjadi “ke luar” seperti yang ditunjukkan gambar.



Gambar 2.14: Teorema Stokes. Integral curl terhadap permukaan sama dengan integral garis mengelilingi batas kurva tertutup.

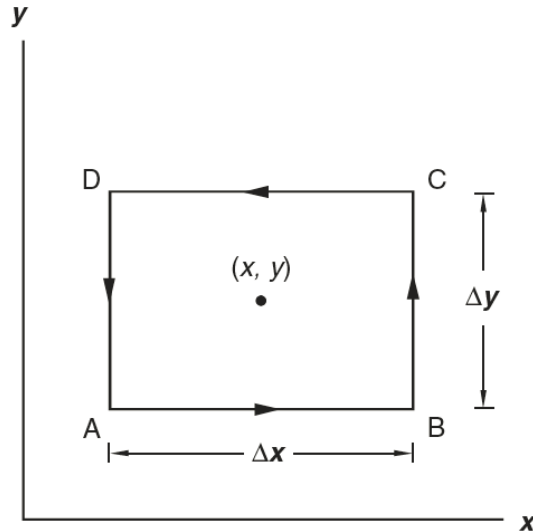
Permukaan dalam teorema Stokes harus dua sisi. Permukaan satu sisi bisa diperoleh dengan mengambil potongan kertas panjang, yang kita puntir, dan kemudian hubungkan ujung-ujungnya. Jika kita mewarnai salah permukaannya, kita akan menjumpai semua permukaannya diwarnai. Sabuk dengan bentuk seperti ini dinamakan permukaan Mobius. Permukaan seperti ini tidak berarah karena kita tidak bisa mendefinisikan vektor normal \mathbf{n} . Teorema Stokes hanya berlaku pada permukaan yang berarah, dan lebih dari itu, kurva batas permukaannya tidak boleh melewati dirinya.



Gambar 2.15: Bukti teorema Stokes. Permukaan dibagi menjadi elemen permukaan diferensial. Putaran melalui garis interior saling menghilangkan dan hasilnya adalah putaran mengelilingi keliling permukaan asalnya.

Untuk membuktikan teorema Stokes, kita membagi permukaan menjadi persegi yang banyak sekali. Integral permukaan pada ruas kanan (2.84) hanyalah jumlah integral permukaan terhadap semua persegi kecil. Jika integral garis kita lalui dalam

arah yang sama, tiap garis interior akan dilalui dua kali, masing-masing dalam arah yang berbeda. Jadi integral garis dari $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ dari semua garis interior akan bernilai nol, karena tiap suku muncul dua kali dengan arah yang berlawanan. Jadi jumlah integral garis terhadap semua persegi kecil akan sama dengan integral garis mengelilingi kurva batas C , yang ditunjukkan Gambar 2.15. Jadi jika kita membuktikan hasil untuk persegi kecil, kita sudah membuktikan untuk kurva tertutup C sebarang.



Gambar 2.16: Integral garis $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ melalui empat buah persegi infinitesimal sama dengan integral permukaan $\nabla \times \mathbf{A}$ terhadap luas permukaan.

Karena permukaan terdiri dari persegi infinitesimal yang banyak sekali, kita bisa menganggap masing-masing sebagai bidang persegi. Marilah kita orientasikan sumbu koordinat sehingga salah satu perseginya berada dalam bidang $-xy$, panjang sisinya yaitu Δx dan Δy seperti Gambar 2.16. Missalkan koordinat pusat loop adalah (x, y, z) . Kita menamai titik sudut persegi dengan A, B, C, D. Jadi integral garis mengelilingi loop ini adalah

$$\oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{i} dx) + \int_{BC} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{j} dy) + \int_{CD} \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{i} dx) + \int_{DA} \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{j} dy). \quad (2.85)$$

Kita akan menggunakan simbol \oint untuk menyatakan integral terhadap permukaan tertutup.

Sekarang kita bisa mendekati integral dengan nilai rata-rata integran dikalikan dengan panjang selang integrasi. Nilai rata-rata A pada garis AB bisa diambil sebagai nilai A pada titik tengah AB. Koordinat titik tengah AB adalah $(x, y - \frac{1}{2}\Delta y, z)$. Jadi

$$\int_{AB} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{i} dx) = \int_{AB} A_x dx = A_x \left(x, y - \frac{1}{2}\Delta y, z \right) \Delta x.$$

Dengan cara yang sama,

$$\begin{aligned}\int_{BC} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{j} \, dy) &= \int_{BC} A_y \, dy = A_y \left(x + \frac{1}{2} \Delta x, y, z \right) \Delta y, \\ \int_{CD} \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{i} \, dx) &= - \int_{CD} A_x \, dx = -A_x \left(x, y + \frac{1}{2} \Delta y, z \right) \Delta x, \\ \int_{DA} \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{j} \, dy) &= - \int_{DA} A_y \, dy = -A_y \left(x - \frac{1}{2} \Delta x, y, z \right) \Delta y.\end{aligned}$$

Jumlahkan semua kontribusi, kita memperoleh

$$\begin{aligned}\oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \left(A_x \left(x, y - \frac{1}{2} \Delta y, z \right) - A_x \left(x, y + \frac{1}{2} \Delta y, z \right) \right) \Delta x \\ &\quad + \left(A_y \left(x + \frac{1}{2} \Delta x, y, z \right) - A_y \left(x - \frac{1}{2} \Delta x, y, z \right) \right) \Delta y.\end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}A_y \left(x + \frac{1}{2} \Delta x, y, z \right) - A_y \left(x - \frac{1}{2} \Delta x, y, z \right) &= \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x, \\ A_x \left(x, y - \frac{1}{2} \Delta y, z \right) - A_x \left(x, y + \frac{1}{2} \Delta y, z \right) &= - \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y,\end{aligned}$$

kita mempunyai

$$\oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y. \quad (2.86)$$

Selanjutnya kita perhatikan integral permukaan dari $\nabla \times \mathbf{A}$. Dalam kasus ini vektor satuan normal \mathbf{n} hanyalah \mathbf{k} . Kita mengambil integral sama dengan nilai rata-rata terhadap luas dikalikan luas integrasi. Nilai rata-rata \mathbf{A} hanyalah nilai \mathbf{A} yang dihitung pada pusat. Oleh karena itu

$$\iint_{ABCD} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, da = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k} \Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y, \quad (2.87)$$

yang sama dengan (2.86). Hasil ini bisa diinterpretasikan sebagai berikut

Komponen $\nabla \times \mathbf{A}$ dalam arah \mathbf{n} pada titik P merupakan sirkulasi \mathbf{A} terhadap titik P pada bidang normal terhadap \mathbf{n} .

Sirkulasi sebuah medan vektor mengelilingi loop tertutup sekarang bisa dengan mudah dihubungkan dengan curl medan tersebut. Kita mengisi loop dengan permukaan S dan menjumlahkan sirkulasi mengelilingi persegi infinitesimal menutupi permukaan ini. Jadi kita memiliki

$$\sum \oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \sum \iint_{ABCD} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, da, \quad (2.88)$$

yang bisa dituliskan sebagai

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (2.89)$$

Ini adalah teorema Stokes. Kadang teorema ini dikenal sebagai teorema fundamental dari curl. Perhatikan bahwa teorema ini berlaku untuk semua permukaan S sepanjang batas permukaannya merupakan loop tertutup C .

Contoh 2.6.2. Buktikan teorema Stokes dengan mencari sirkulasi medan vektor $\mathbf{A} = 4y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ mengelilingi sebuah persegi dengan jari-jari $2a$ dalam bidang $-xy$ berpusat pada titik asal dan integral permukaan $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da$ terhadap permukaan persegi.

Solusi 2.6.2. Kita menghitung sirkulasi dengan menghitung integral garis terhadap tiap sisi persegi. Dari $(a, -a, 0)$ ke $(a, a, 0)$, $x = a$, $dx = 0$, $z = 0$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{a,-a,0}^{a,a,0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{a,-a,0}^{a,a,0} (4y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz) \\ &= \int_{a,-a,0}^{a,a,0} (4y dx + x dy + 2z dz) = \int_{-a}^a a dy = 2a^2. \end{aligned}$$

Dari $(a, a, 0)$ ke $(-a, a, 0)$, $y = a$, $dy = 0$, $z = 0$:

$$I_2 = \int_{a,a,0}^{-a,a,0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-a}^a 4a dx = -8a^2.$$

Dari $(-a, a, 0)$ ke $(-a, -a, 0)$, $x = -a$, $dx = 0$, $z = 0$:

$$I_3 = \int_{-a,a,0}^{-a,-a,0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-a}^a (-a) dy = 2a^2.$$

Dari $(-a, -a, 0)$ ke $(a, -a, 0)$, $y = -a$, $dy = 0$, $z = 0$:

$$I_4 = \int_{-a,-a,0}^{a,-a,0} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-a}^a 4(-a) dx = -8a^2.$$

Jadi sirkulasinya adalah

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -12a^2.$$

Sekarang kita menghitung integral permukaan. Pertama $\mathbf{n} da = \mathbf{k} dx dy$ terhadap persegi dan curl \mathbf{A} adalah

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4y & x & 2z \end{vmatrix} = -3\mathbf{k}.$$

Jadi

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} da = -3 \iint_S dx dy = -3(2a)^2 = -12a^2,$$

yang sama dengan sirkulasi, memenuhi teorema Stokes.

Contoh 2.6.3. Buktikan teorema Stokes dengan menghitung kedua ruas (2.84) dengan $\mathbf{A} = 4y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Sekarang permukaannya adalah setengah lingkaran yang dinyatakan oleh $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dan loop C diberikan oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 4$.

Solusi 2.6.3. Karena $\nabla \times \mathbf{A} = -3\mathbf{k}$,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = -3 \iint_S \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Permukaannya adalah setengah lingkaran. Geometrinya ditunjukkan Gambar 2.10. Integral permukaannya bisa dihitung terhadap proyeksi setengah lingkaran pada bidang $-xy$ menggunakan hubungan

$$da = \frac{1}{\cos \theta} dx \, dy = \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} dx \, dy.$$

Integrasinya tidak lain terhadap piringan berjari-jari 2:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = -3 \iint_S \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \frac{1}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} dx \, dy = -3 \iint_S dx \, dy = -3(4\pi) = -12\pi.$$

Untuk menghitung integral garis terhadap lingkaran, marilah kita nyatakan lingkarannya dalam bentuk parametrik:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = -2 \sin \theta \mathbf{i} + 2 \cos \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{A} = 4y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = 8 \sin \theta \mathbf{i} + 2 \cos \theta \mathbf{j} + 2z\mathbf{k}.$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (-16 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta) d\theta = -12\pi.$$

Jadi teorema Stokes terbukti

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Contoh 2.6.4. Gunakan teorema Stokes untuk menghitung integral garis $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ dengan $\mathbf{A} = 2yZ\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ sepanjang lingkaran $x^2 + y^2 = 1$.

Solusi 2.6.4. Curl \mathbf{A} adalah

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & x & z^2 \end{vmatrix} = 2y\mathbf{j} + (1 - 2z)\mathbf{k},$$

dan menurut teorema Stokes

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da = \iint_S [2y\mathbf{j} + (1 - 2z)\mathbf{k}] \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Karena S bisa berupa permukaan sebarang sepanjang dibatasi lingkaran, cara paling sederhana mengerjakan soal ini adalah dengan menggunakan permukaan datar di dalam lingkaran. Dalam kasus ini $z = 0$ dan $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, jadi

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S da = \pi.$$

Konektivitas Ruang. Teorema Stokes berlaku dalam daerah terkoneksi sederhana. Sebuah daerah terkoneksi sederhana jika loop tertutup sebarang dalam daerah tersebut bisa dikecilkan menjadi sebuah titik tanpa melibatkan titik sebarang dalam daerah tersebut. Dalam daerah terkoneksi sederhana, dua buah kurva sebarang antara dua titik bisa didistorsi menjadi masing-masing dalam daerah tersebut. Ruang di dalam torus (donat) merupakan daerah terkoneksi ganda karena kurva tertutup yang mengelilingi lubang tidak bisa dikecilkan menjadi sebuah titik di dalam daerah tersebut. Kurv antara dua buah silinder konsentrik panjang juga tidak terkoneksi sederhana. Tetapi, daerah antara dua buah bola konsentrik terhubung sederhana.

Jika $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ dalam daerah terkoneksi sederhana, kita bisa menggunakan teorema Stokes

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = 0$$

untuk menyimpulkan integral garis $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tidak bergantung lintasan.

Jika $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ dalam daerah terkoneksi ganda maka $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tidak unik. Dalam kasus seperti ini, kita biasa “memotong” agar daerahnya terkoneksi sederhana. Maka $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tidak bergantung lintasan di dalam daerah terkoneksi sederhana, tetapi $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ melalui potongan bisa memberikan lompatan berhingga.

Sebagai contoh perhatikan integral loop $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dengan

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

melalui lingkaran satuan berpusat di titik asal. Karena

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

kita bisa menyimpulkan bahwa

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = 0.$$

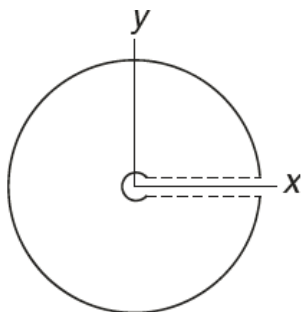
Ini tidak benar karena

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right).$$

Dengan $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, (jadi $dx = -\sin \theta \, d\theta$, $dy = \cos \theta \, d\theta$, dan $x^2 + y^2 = 1$), integral ini akan menjadi

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta = \oint d\theta = 2\pi,$$

yang tidak sama dengan nol. Sumber permasalahan ini adalah pada $x = 0$ dan $y = 0$ fungsinya membesar. Jadi kita hanya bisa mengatakan curl fungsi ini sama dengan nol kecuali sepanjang sumbu- z . Jika kita mencoba menghilangkan sumbu- z dari daerah integrasi, daerahnya menjadi terkoneksi ganda. Dalam daerah terkoneksi ganda, teorema Stokes tidak berlaku. Untuk membuatnya terkoneksi sederhana, kita bisa me-



Gambar 2.17: Jika sebuah fungsi singular pada sumbu- z , daerahnya terkoneksi ganda. Sebuah “potongan” bisa dibuat untuk mengubahnya menjadi daerah terkoneksi sederhana. Tetapi, integral garis melalui potongan garis bisa merupakan lompatan tiba-tiba.

motong daerah, sehingga sepanjang bidang $y = 0$ seperti Gambar 2.17 (atau sepanjang arah lain). Dalam daerah terkoneksi sederhana $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \theta_B - \theta_A$. Ini akan bernilai nol jika A dan B sangat dekat. Tetapi jika integral melalui garis potong, sepanjang A dan B berada pada sisi yang berlainan, betapapun dekatnya A dan B, tidak akan ada lompatan tiba-tiba dari 2π .

2.7 Operasi Diferensial Vektor Lanjut

Terdapat banyak kombinasi operasi vektor melibatkan operator del ∇ yang sering muncul dalam aplikasi. Kesemuanya mengikuti aturan umum turunan biasa. Aturan

distributif jelas dengan sendirinya. Dengan definisi operator del ∇ , kita bisa dengan mudah membuktikan

$$\nabla(\varphi_1 + \varphi_2) = \nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2; \quad (2.90)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}; \quad (2.91)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}. \quad (2.92)$$

Tetapi aturan perkalian tidak sederhana karena terdapat lebih dari satu cara untuk membentuk perkalian vektor.

2.7.1 Aturan Perkalian

Berikut ini adalah daftar aturan perkalian

$$\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi \quad (2.93)$$

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{A}) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{A} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (2.94)$$

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{A}) = \nabla\varphi \times \mathbf{A} + \varphi\nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.95)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}, \quad (2.96)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}, \quad (2.97)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (2.98)$$

Rumus di atas bisa dibuktikan dengan mengekspansikan kedua ruas dalam komponen Cartesiannya. Sebagai contoh,

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi\psi) &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi) \\ &= \mathbf{i}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathbf{k}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial z} \\ &\quad + \mathbf{i}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ &= \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi \end{aligned} \quad (2.99)$$

Dengan cara yang sama

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi A_z) \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x} \psi \right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \psi \right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z} A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} \psi \right) \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} A_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} A_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} A_z \right) + \psi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &= \nabla\varphi \cdot \mathbf{A} + \varphi\nabla \cdot \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Jelas akan menjadi melelahkan untuk secara eksplisit membuktikan aturan perkalian yang lain dengan cara seperti ini. Bukti yang lebih elegan akan diberikan dalam bab analisis tensor. Di sini, kita akan menggunakan prosedur formal berikut untuk memperoleh hubungan di atas. Prosedur ini terdiri dari (1) pertama menggunakan ∇ sebagai operator diferensial dan (2) memperlakukan ∇ seperti vektor reguler. Prosedur ini merupakan alat bantu untuk memperoleh hasil yang benar.

Karena ∇ merupakan kombinasi linier operator diferensial, kita memintanya memenuhi aturan perkalian turunan. Ketika ∇ bekerja pada perkalian, hasilnya merupakan jumlah dari dua turunan diperoleh dengan menjaga salah satu faktornya konstan dan mengijinkan faktor lainnya dikenai operasi ∇ . Notasi yang digunakan, kita memberikan ∇ sebuah indeks bawah mengindikasikan faktor yang dikenai operasi dan faktor yang dijaga konstan. Sebagai contoh

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \nabla_{\varphi} \times (\varphi \mathbf{A}) + \nabla_A \times (\varphi \mathbf{A}).$$

Karena $\nabla_A \times (\varphi \mathbf{A})$ berarti φ konstan, maka jelaslah bahwa

$$\nabla_A \times (\varphi \mathbf{A}) = \varphi \nabla_A \times \mathbf{A} = \varphi \nabla \times \mathbf{A},$$

dengan indeks bawah \mathbf{A} diabaikan pada ruas kanan, karena jelas bahwa ∇ beroperasi ketika diikuti oleh sebuah faktor saja. Dengan cara yang sama, $\nabla_{\varphi} \times (\varphi \mathbf{A})$ berarti \mathbf{A} konstan. Dalam kasus ini, mudah untuk kita buktikan

$$\nabla_{\varphi} \times (\varphi \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi A_x & \varphi A_y & \varphi A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla_{\varphi} \times \mathbf{A}.$$

Jadi

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \nabla_{\varphi} \times (\varphi \mathbf{A}) + \nabla_A \times (\varphi \mathbf{A}) = \nabla_{\varphi} \times \mathbf{A} + \varphi \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.101)$$

Untuk divergensi perkalian silang, kita mulai dengan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla_A \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \nabla_B \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= \nabla_A \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) - \nabla_B \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}). \end{aligned}$$

Ingat perkalian skalar rangkap tiga $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, titik (\cdot) dan silang (\times) bisa dipertukarkan $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. Dengan memperlakukan ∇_A sebagai sebuah vektor, kita mempunyai

$$\nabla_A \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla_A \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B},$$

indeks bawah A kita keluarkan karena artinya sudah jelas tanpanya. Dengan cara yang sama

$$\nabla_B \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}.$$

Oleh karena itu

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}. \quad (2.102)$$

Untuk curl perkalian silang, kita akan menggunakan analogi perkalian silang rangkap tiga dari $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla_A \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \nabla_B \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ \nabla_A \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\nabla_A \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla_A \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla_A)\mathbf{A} - (\nabla_A \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} \end{aligned}$$

Dalam langkah terakhir kita telah menggunakan hubungan $(\nabla_A \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \nabla_A)\mathbf{A}$, karena \mathbf{B} dianggap konstan. Dengan cara yang sama

$$\nabla_B \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla_B \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla_B \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} = (\nabla_B \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla_B)\mathbf{B}.$$

Jadi

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla_A)\mathbf{A} - (\nabla_A \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\nabla_B \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla_B)\mathbf{B}. \quad (2.103)$$

di sini kita tidak menggunakan indeks bawah karena artinya sudah jelas tanpanya.

Aturan perkalian gradien dari perkalian titik v jauh lebih rumit

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \nabla_B(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Untuk menghitung $\nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ kita menggunakan sifat perkalian vektor rangkap tiga $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$,

$$\mathbf{A} \times (\nabla_B \times \mathbf{B}) = \nabla_B(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla_B)\mathbf{B}.$$

Jadi

$$\nabla_B(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla_B)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla_B \times \mathbf{B}).$$

Dengan cara yang sama

$$\nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla_A(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla_A)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla_A \times \mathbf{A}).$$

Jika kita tinggalkan indeks bawah, kita mempunyai

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (2.104)$$

2.7.2 Turunan Kedua

Beberapa turunan kedua bisa diperoleh dengan mengaplikasikan ∇ dua kali. Empat buah identitas turunan kedua berikut sering dijumpai:

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0, \quad (2.105)$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0, \quad (2.106)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (2.107)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \psi) = 0. \quad (2.108)$$

Identitas pertama mengatakan bahwa curl gradien sebuah fungsi skalar sama dengan nol. Ini bisa dibuktikan dengan ekspansi langsung

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \varphi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \right) \\ &+ \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.109)$$

yang memberikan turunan parsial silang kedua φ kontinu (yang secara umum dipenuhi oleh fungsi yang kita tinjau). Dalam kasus ini, urutan penurunan tidak penting.

Identitas kedua mengatakan bahwa divergensi curl sebuah fungsi vektor secara identik sama dengan nol. Ini juga bisa dibuktikan dengan penghitungan langsung

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Kita memahami bahwa determinan diekspansikan pada baris pertama. Lagi jika turunan parsial kontinu, determinan ini dengan dua buah baris identik sama dengan nol.

Identitas curl curl sama pentingnya dan akan sangat berguna untuk mengingatnya. Agar lebih mudah, kita bisa menggunakan analogi perkalian vektor rangkap tiga $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, dengan $\nabla, \nabla, \mathbf{A}$ masing-masing sebagai $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Jadi

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (2.111)$$

Operator $\nabla \cdot (\nabla$ merupakan operator skalar. Karena sering dijumpai dalam fisika, operator ini mempunyai nama khusus, Laplacian, atau hanya ∇^2

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Jadi (2.111) bisa dituliskan sebagai

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (2.113)$$

Jika kita ekspansikan kedua ruas persamaan ini dalam koordinat Cartesian, kita dapat membuktikan ini merupakan sebuah identitas.

Karena ∇^2 merupakan operator skalar, ketika beroperasi pada sebuah vektor, ini berarti operasi yang sama pada masing-masing komponennya

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{i}\nabla^2 A_x + \mathbf{j}\nabla^2 A_y + \mathbf{k}\nabla^2 A_z. \quad (2.114)$$

Identitas (2.108) berasal dari $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Karena $\nabla\varphi$ dan $\nabla\psi$ dua vektor yang berbeda,

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi \times \nabla\psi) = \nabla \times \nabla\varphi \cdot \nabla\psi - \nabla \times \nabla\psi \cdot \nabla\varphi.$$

Sekarang $\nabla \times \nabla\varphi = \nabla \times \nabla\psi = 0$, maka

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi \times \nabla\psi) = 0. \quad (2.115)$$

Contoh 2.7.1. Buktikan bahwa $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ jika $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ dan \mathbf{B} merupakan vektor konstan, pertama dengan ekspansi langsung, kemudian dengan rumus curl perkalian silang.

Solusi 2.7.1. Metode I

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2}\nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ x & z & z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\nabla \times [\mathbf{i}(B_y z - B_z y) + \mathbf{j}(B_z x - B_x z) + \mathbf{k}(B_x y - B_y x)] \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (B_y z - B_z y) & (B_z x - B_x z) & (B_x y - B_y x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{i}2B_x + \mathbf{j}2B_y + \mathbf{k}2B_z] = \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Metode II

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{r} &= \frac{1}{2}[(\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{B} - (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{r}] \\ &= \frac{1}{2}[(\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{r}] \quad (\text{Karena } \mathbf{B} \text{ adalah vektor konstan}). \end{aligned}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{B} = 3\mathbf{B} \quad (\text{lihat Contoh 2.5.1}),$$

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{B} \quad (\text{lihat Contoh 2.4.2}),$$

$$\frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{1}{2}[3\mathbf{B} - \mathbf{B}] = \mathbf{B}.$$

Contoh 2.7.2. Buktikan bahwa $\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla^2(\nabla \times \mathbf{A})$.

Solusi 2.7.2. Karena $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) &= \nabla \times [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})].\end{aligned}$$

Karena curl gradien sama dengan nol $\nabla \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0$. Gunakan rumus curl curl lagi, kita mempunyai

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) = -\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\{\nabla(\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})) - \nabla^2(\nabla \times \mathbf{A})\}.$$

Karena divergensi curl sama dengan nol, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, jadinya

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla^2(\nabla \times \mathbf{A}).$$

Contoh 2.7.3. Jika

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E},\end{aligned}$$

Buktikan bahwa

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}; \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}.$$

Solusi 2.7.3.

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla \times \left(-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}, \quad (\text{Karena } \nabla \cdot \mathbf{E} = 0).\end{aligned}$$

Jadi

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}.$$

Dengan cara yang sama

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) &= \nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}, \quad (\text{Karena } \nabla \cdot \mathbf{H} = 0).\end{aligned}$$

Jadi

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}.$$

2.8 Teorema Integral Lanjut

Terdapat banyak identitas integral lainnya yang berguna dalam aplikasi fisis. Kesemuanya bisa diturunkan dengan berbagai cara. Di sini kita membicarakan beberapa yang paling penting dan kesemuanya mengikuti teorema fundamental gradien, divergensi dan curl.

2.8.1 Teorema Green

Identitas integral berikut diberikan nama demikian karena ditemukan oleh George Green (1793–1841). Untuk membedakannya, kita menggunakan terminologi berikut.

Lemma Green:

$$\oint_C [f(x, y)dx + g(x, y)dy] = \iint_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.116)$$

Teorema Green:

$$\oiint_S \varphi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} da = \iiint_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi) dV. \quad (2.117)$$

Bentuk simetrik teorema Green:

$$\oiint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} da = \iiint_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV. \quad (2.118)$$

Untuk membuktikan Lemma Green, kita mulai dengan teorema Stokes:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da.$$

Dengan kurva C semuanya berada pada bidang $-xy$

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{i}A_x + \mathbf{j}A_y + \mathbf{k}A_z) \cdot (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy) = A_x dx + A_y dy,$$

dan \mathbf{n} sama dengan \mathbf{k} , vektor satuan dalam arah z , jadi

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} da = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} dx dy = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Jadi kita mempunyai

$$\oint_C (A_x dx + A_y dy) = \iint_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Karena \mathbf{A} dalam teorema Stokes bisa berupa fungsi vektor sebarang, Lemma Green terbukti dengan $A_x = f(x, y)$ dan $A_y = g(x, y)$.

Untuk membuktikan teorema Green, kita mulai dengan teorema divergensi

$$\iiint_V \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) dV = \iint_S \varphi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} da.$$

Gunakan identitas

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi,$$

kita mempunyai

$$\iiint_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi) dV = \iint_S \varphi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} da, \quad (2.119)$$

yang merupakan teorema Green (2.117).

Persamaan (2.119) tetap berlaku ketika φ dan ψ dipertukarkan

$$\iiint_V (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi) dV = \iint_S \psi \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} da. \quad (2.120)$$

Dengan mengambil selisih antara keduanya kita memperoleh bentuk simetrik teorema Green

$$\iiint_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \iint_S (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} da.$$

2.8.2 Integral Lainnya

Teorema divergensi mempunyai bentuk alternatif. Misalkan φ merupakan fungsi skalar dan \mathbf{C} vektor konstan sebarang. Maka,

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\varphi \mathbf{C}) dV &= \iint_S \varphi \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da, \\ \nabla \cdot (\varphi \mathbf{C}) &= \nabla \cdot \varphi \mathbf{C} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{C} = \nabla \cdot \varphi \mathbf{C}, \end{aligned}$$

karena \mathbf{C} konstan dan $\nabla \cdot \mathbf{C} = 0$

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot (\varphi \mathbf{C}) dV &= \iiint_V \nabla \cdot \varphi \mathbf{C} dV = \mathbf{C} \cdot \iiint_V \nabla \varphi dV, \\ \iint_S \varphi \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} da &= \mathbf{C} \cdot \iint_S \varphi \mathbf{n} da. \end{aligned}$$

Oleh karena itu teorema divergensinya bisa dituliskan sebagai

$$\mathbf{C} \cdot \left[\iiint_V \nabla \varphi dV - \iint_S \varphi \mathbf{n} da \right] = 0.$$

Karena \mathbf{C} sebarang, suku di dalam kurung harus sama dengan nol. Jadi kita mempunyai hubungan menarik lainnya antara integral volume dan integral permukaan

$$\iiint_V \nabla \varphi dV = \iint_S \varphi \mathbf{n} da. \quad (2.121)$$

Dengan cara yang sama, misalkan \mathbf{A} merupakan fungsi vektor dan \mathbf{C} , sebuah vektor konstan. $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ merupakan fungsi vektor lain. Teorema divergensi bisa dituliskan sebagai

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C} \, dV = \oiint_S \mathbf{A} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Karena

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) &= (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} - (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} &= -(\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{n} \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{C} \, dV &= \mathbf{C} \cdot \iiint_V \nabla \times \mathbf{A} \, dV, \\ \oiint_S \mathbf{A} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, da &= -\mathbf{C} \cdot \oiint_S \mathbf{A} \times \mathbf{n} \, da. \end{aligned}$$

Maka kita mempunyai bentuk teorema divergensi yang lain

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{A} \, dV = -\oiint_S \mathbf{A} \times \mathbf{n} \, da. \quad (2.122)$$

Dalam contoh berikut, kita akan menurunkan bentuk alternatif teorema Stokes dengan teknik ini.

Contoh 2.8.1. Buktikan bahwa $\oint_C \varphi \, dr = -\iint_S \nabla \varphi \times \mathbf{n} \, da$.

Solusi 2.8.1. Misalkan \mathbf{C} vektor konstan sebarang. Dengan teorema Stokes kita mempunyai

$$\oint_C \varphi \mathbf{C} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times (\varphi \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Karena \mathbf{C} konstan dan $\nabla \times \mathbf{C} = 0$,

$$\begin{aligned} \nabla \times (\varphi \mathbf{C}) &= \nabla \varphi \times \mathbf{C} + \varphi \nabla \times \mathbf{C} = \nabla \varphi \times \mathbf{C} \\ \iint_S \nabla \times (\varphi \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \, da &= \iint_S \nabla \varphi \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, da. \end{aligned}$$

Lebih dari itu

$$\nabla \varphi \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{C} \times \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{C} \cdot (\nabla \varphi \times \mathbf{n})$$

Jadi

$$\iint_S \nabla \times (\varphi \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \, da = -\mathbf{C} \cdot \iint_S \nabla \varphi \times \mathbf{n} \, da.$$

Dengan

$$\oint_C \varphi \mathbf{C} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot \oint_C \varphi \, dr,$$

kita bisa menuliskan teorema Stokes sebagai

$$\mathbf{C} \cdot \oint_C \varphi \, d\mathbf{r} = -\mathbf{C} \cdot \iint_S \nabla \varphi \times \mathbf{n} \, da.$$

Karena \mathbf{C} vektor konstan, diperoleh

$$\oint_C \varphi \, d\mathbf{r} = - \iint_S \nabla \varphi \times \mathbf{n} \, da. \quad (2.123)$$

Contoh 2.8.2. Buktikan bahwa $\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2 \iint_S \mathbf{n} \, da$ dengan \mathbf{r} vektor posisi dari sebuah titik asal yang bisa dipilih sebarang.

Solusi 2.8.2. Untuk membuktikan ini, kita gunakan vektor konstan sebarang \mathbf{C} dan mulai dengan teorema Stokes

$$\oint_C (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Karena

$$\oint_C (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{C} \cdot \mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r},$$

dan

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) &= 2\mathbf{C} \quad (\text{lihat contoh 2.7.1}), \\ \iint_S \nabla \times (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, da &= \iint_S 2\mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, da = 2\mathbf{C} \cdot \iint_S \mathbf{n} \, da \end{aligned}$$

diperoleh

$$\mathbf{C} \cdot \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot 2 \iint_S \mathbf{n} \, da.$$

Karena \mathbf{C} vektor konstan sebarang, identitas integral

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \, da \quad (2.124)$$

harus terpenuhi. Identitas integral ini penting dalam elektrodinamika. Integral ini juga menunjukkan bahwa luas A permukaan datar S dilingkupi oleh kurva C diberikan oleh

$$A = \iint_S da = \frac{1}{2} \left| \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \right|. \quad (2.125)$$

2.9 Klasifikasi Medan Vektor

2.9.1 Medan Irrotasional dan Potensial Skalar

Jika $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ dalam daerah terhubung sederhana, kita mengatakan \mathbf{F} merupakan sebuah medan vektor irrotasional. Sebuah medan vektor irrotasional juga dikenal sebagai medan vektor konservatif. Kita telah melihat jika $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, integral garis

$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tidak bergantung lintasan. Ini berarti, seperti Subbab 2.4.3, bahwa \mathbf{F} bisa dinyatakan sebagai gradien sebuah fungsi skalar φ yang dikenal sebagai potensial skalar.

Karena teorema Stokes

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da,$$

medan irrotasional \mathbf{F} dikarakterisasi oleh syarat berikut:

1. $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.
2. $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ untuk semua loop tertutup.
3. $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tidak bergantung lintasan.
4. $\mathbf{F} = -\nabla\varphi$.

Tanda pada 4 sebarang, karena φ belum ditentukan. Dalam hidrodinamika, biasanya tanda positif (+) dipilih untuk potensial kecepatan. Di sini kita menggunakan konvensi tanda negatif (-) agar sesuai dengan hukum kekekalan energi.

Medan Gaya Konservatif

Untuk melihat alasan medan irrotasional dinamakan sebagai medan vektor konservatif, perhatikan $\mathbf{F}(x, y, z)$ sebagai gaya dalam persamaan gerak Newton

$$\mathbf{F}(x, y, z) = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (2.126)$$

Karena \mathbf{F} irrotasional maka

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla\varphi(x, y, z). \quad (2.127)$$

Jadi

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\varphi. \quad (2.128)$$

Lakukan perkalian titik kedua ruas dengan $d\mathbf{r}$ kemudian diintegrasikan. Ruas kirinya menjadi

$$\begin{aligned} \int m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} &= \int m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \, dt \\ &= \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt = \int d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m v^2 + \text{konstanta}. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Ruas kanannya

$$\int -\nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = -\int d\varphi = -\varphi + \text{konstanta}. \quad (2.130)$$

Dengan menyamakan hasil kedua ruas (2.128) diperoleh

$$\frac{1}{2}mv^2 + \varphi = \text{konstanta}. \quad (2.131)$$

Rumus $\frac{1}{2}mv^2$ didefinisikan sebagai energi kinetik dan $\varphi(x, y, z)$ sebagai energi potensial dalam mekanika klasik. Jumlah keduanya merupakan energi keseluruhan. Persamaan terakhir mengatakan di tempat manapun energi total diukur akan sama dengan sebuah konstanta. Ini merupakan prinsip kekekalan energi.

Meskipun kita menggunakan mekanika klasik untuk memperkenalkan ide medan konservatif, ide ini bisa digeneralisasi. Medan vektor sebarang $\mathbf{v}(x, y, z)$ yang bisa dinyatakan sebagai gradien medan skalar $\varphi(x, y, z)$ disebut sebagai medan konservatif dan fungsi skalar φ dinamakan sebagai potensial skalar. Karena $\nabla\varphi = \nabla(\varphi + \text{konstanta})$, potensial skalar didefinisikan dengan konstanta tambahan.

Contoh 2.9.1. Tentukan apakah medan berikut ini konservatif atau tidak: $\mathbf{F}_1 = 6xy\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$, $\mathbf{F}_2 = xy\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

Solusi 2.9.1.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F}_1 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 - 3y^2) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z}(6xy) \\ &+ \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy) \right) = \mathbf{k}(6x - 6x) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z}y + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z}(xy) \\ &+ \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right) = -x\mathbf{k} \neq 0. \end{aligned}$$

Jadi \mathbf{F}_1 merupakan medan irrotasional dan \mathbf{F}_2 bukan medan irrotasional. Kita telah memperlihatkan secara eksplisit, dalam contoh Subbab 2.4.3, integral garis dari $\int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}$ tidak bergantung lintasan dan $\int_A^B \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$ bergantung lintasan.

Contoh 2.9.2. Buktikan medan gaya $\mathbf{F} = -(2ax + by)\mathbf{i} - bx\mathbf{j} - c\mathbf{k}$ konservatif, dan carilah φ sehingga $-\nabla\varphi = \mathbf{F}$.

Solusi 2.9.2.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -(2ax + by) & -bx & -c \end{vmatrix} = 0.$$

Jadi \mathbf{F} konservatif dan terdapat medan skalar φ sedemikian rupa sehingga $-\nabla\varphi = \mathbf{F}$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = F_x = -(2ax + by) &\implies \varphi = ax^2 + bxy + f(y, z) \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = F_y = -bx, \quad \text{tetapi} \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -bx - \frac{\partial}{\partial y}f(y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y}f(y, z) = 0 &\implies f(y, z) = g(z) \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = F_z = -c, \quad \text{tetapi} \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}g(z) \\ \frac{\partial}{\partial z}g(z) = c &\implies g(z) = cz + k \end{aligned}$$

maka

$$\varphi = ax^2 + bxy + cz + k.$$

Contoh 2.9.3. Anggap sebuah partikel bermassa m bergerak dalam medan gaya dari contoh terakhir, dan pada $t = 0$ partikel melewati titik asal dengan kecepatan v_0 . Berapakah kecepatan partikel saat melewati titik $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$?

Solusi 2.9.3. Hukum kekekalan energi meminta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \varphi(\mathbf{0}) \\ v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m} &[k - (ax^2 + bxy + cz + k)]. \end{aligned}$$

Pada $x = 1, y = 2, z = 1$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m}(a + 2b + c).$$

2.9.2 Medan Solenoidal dan Potensial Vektor

Jika medan \mathbf{F} tidak memiliki divergensi (yaitu $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$) di semua tempat dalam daerah terhubung sederhana, medan dinamakan solenoidal. Untuk sebuah medan

solenoidal, integral permukaan dari $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$ pada permukaan tertutup sebarang sama dengan nol, karena dengan teorema divergensi

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 0.$$

Lebih dari itu \mathbf{F} bisa dinyatakan sebagai curl dari fungsi vektor lain \mathbf{A}

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Fungsi vektor \mathbf{A} dikenal sebagai potensial vektor medan \mathbf{F} .

Eksistensi potensial vektor untuk medan solenoidal bisa dibuktikan sebagai berikut. Untuk medan solenoidal \mathbf{F} yang diberikan (yaitu, $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$, dan $F_z(x, y, z)$ diketahui), kita harus membuktikan bahwa mungkin mencari sebuah fungsi vektor \mathbf{A} dengan satu komponen nol agar memenuhi $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$. Kemudian rumus umum untuk semua kemungkinan potensial vektor bisa diperoleh.

Pertama kita pilih $A_z = 0$ dan kemudian mencoba mencari A_x dan A_y dalam $A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$ sehingga $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial z} A_y + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial z} A_x + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \\ &= \mathbf{i} F_x + \mathbf{j} F_y + \mathbf{k} F_z \end{aligned}$$

Agar ini terpenuhi, kita harus mempunyai

$$\frac{\partial}{\partial z} A_y = -F_x, \quad \frac{\partial}{\partial z} A_x = F_y, \quad \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = F_z. \quad (2.132)$$

Dari dua buah persamaan pertama, kita mempunyai

$$A_y = - \int F_x(x, y, z) dz + f(x, y), \quad (2.133)$$

$$A_x = - \int F_y(x, y, z) dz + g(x, y). \quad (2.134)$$

Dengan A_x dan A_y yang diperoleh sedemikian rupa, jika kita bisa membuktikan $\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = F_z$, maka kita telah membuktikan $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$.

Dengan (2.133) dan (2.134), kita mempunyai

$$\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = - \int \left(\frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y \right) dz + h(x, y).$$

Karena \mathbf{F} solenoidal, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ yang bisa dituliskan sebagai

$$\frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y = - \frac{\partial}{\partial z} A_z.$$

Jadi

$$\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = \int \frac{\partial}{\partial z}A_z dz + h(x, y).$$

Jika kita memilih $h(x, y)$ sedemikian rupa, kita tentu bisa membuat

$$\int \frac{\partial}{\partial z}A_z dz + h(x, y) = F_z.$$

Bukti ini jelas mengindikasikan bahwa \mathbf{A} tidak unik. Jika \mathbf{A}' merupakan potensial vektor yang lain, maka $\nabla \times \mathbf{A}$ dan $\nabla \times \mathbf{A}'$ sama dengan \mathbf{F} . Jadi $\nabla \times (\mathbf{A} - \mathbf{A}') = 0$. Karena $(\mathbf{A} - \mathbf{A}')$ irrotasional, diperoleh $\mathbf{A} - \mathbf{A}' = \nabla\psi$. Jadi kita menyimpulkan dengan satu \mathbf{A} yang diperoleh dengan prosedur di atas, semua potensial vektor lain memiliki bentuk $\mathbf{A} + \nabla\psi$ dengan ψ fungsi skalar sebarang.

Ini juga memungkinkan kita untuk meminta potensial vektor solenoidal. Jika kita mencari potensial vektor \mathbf{A} yang tidak solenoidal (yaitu, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$ dan $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$), kita bisa membentuk potensial vektor lain \mathbf{A}' yang solenoidal $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. Misalkan

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\psi \\ \nabla \times \mathbf{A}' &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \psi = \nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \cdot \mathbf{A}' &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\psi\end{aligned}$$

Jika kita memilih ψ sedemikian rupa sehingga $\nabla^2\psi + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, maka kita mempunyai $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. Contoh berikut membuat hal ini menjadi jelas.

Contoh 2.9.4. Buktikan bahwa $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}$ solenoidal, dan carilah potensial vektor \mathbf{A} sehingga $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$ dan $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Solusi 2.9.4. Karena

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}x^2 + \frac{\partial}{\partial y}(3xz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-2xz) = 0$$

ini menunjukkan \mathbf{F} solenoidal. Misalkan $\mathbf{A}_1 = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j}$ dan $\nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{F}$. Dengan (2.132)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}A_y &= -F_x = -x^2, & \implies A_y &= -x^2z + f(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial z}A_x &= F_y = 3x^2z, & \implies A_x &= xz^3 + g(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x &= F_z = -2xz, & \implies -2xy + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} &= -2xy\end{aligned}$$

Karena f dan g sebarang, pilihan paling sederhana adalah $f = g = 0$. Jadi $\mathbf{A}_1 = xz^3\mathbf{i} + -x^2z\mathbf{j}$, tetapi $\nabla \cdot \mathbf{A}_1 = z^3 \neq 0$. Misalkan

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \nabla\psi, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_1 + \nabla^2\psi = z^3 + \nabla^2\psi.$$

Jika $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, maka $\nabla^2 \psi = -z^3$. Solusi paling sederhana persamaan ini adalah

$$\psi = -\frac{1}{20}z^5.$$

Karena

$$\begin{aligned}\nabla \psi &= \nabla \left(-\frac{1}{20}z^5 \right) = -\frac{1}{4}z^4 \mathbf{k} \\ \mathbf{A} &= \mathbf{A}_1 + \nabla \psi = xz^3 \mathbf{i} - x^2 z \mathbf{j} - \frac{1}{4}z^4 \mathbf{k}\end{aligned}$$

Kita bisa membuktikan

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(xz^3) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 z) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{4}z^4 \right) = 0, \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -x^2 z & -\frac{1}{4}z^4 \end{vmatrix} = x^2 \mathbf{i} + 3xz^2 \mathbf{j} - 2xz \mathbf{k} = \mathbf{F}\end{aligned}$$

Potensial vektor ini tidak unik. Sebagai contoh, kita bisa mengasumsikan $\mathbf{A}_2 = A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ dan $\nabla \times \mathbf{A}_2 = \mathbf{F}$. Dengan mengikuti prosedur yang sama, kita peroleh

$$\mathbf{A}_2 = -x^2 z \mathbf{j} + \frac{3}{2}x^2 z^2 \mathbf{k}.$$

Sekarang $\nabla \cdot \mathbf{A}_2 = -3x^2 z \neq 0$. Kita bisa mencari \mathbf{A}' sedemikian rupa sehingga $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_2 + \nabla \psi$ dan $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$. Diperoleh $\nabla^2 \psi = -\nabla \cdot \mathbf{A}_2 = 3x^2 z$. Solusi sederhananya adalah $\psi = \frac{1}{4}x^4 z$ dan $\nabla \psi = x^3 z \mathbf{i} + \frac{1}{4}x^4 \mathbf{k}$, dan

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_2 + \nabla \psi = x^3 z \mathbf{i} - x^2 z \mathbf{j} + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 z^2 \right) \mathbf{k}.$$

Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa $\nabla \times \mathbf{A}' = 0$ dan $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Jelaslah \mathbf{A} dan \mathbf{A}' tidak identik. Keduanya berbeda dengan sebuah gradien tambahan

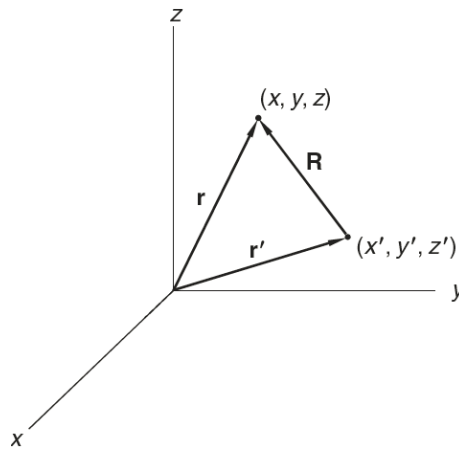
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi. \quad (2.135)$$

Sekarang $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi$ dan $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, maka

$$\nabla^2 \chi = 0. \quad (2.136)$$

Dalam kasus khusus ini

$$\begin{aligned}\nabla \chi &= \mathbf{A}' - \mathbf{A} = (x^3 z - xz^3) \mathbf{i} + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 z^2 + \frac{1}{4}z^2 \right) \mathbf{k}, \\ \chi &= \frac{1}{4}x^4 z - \frac{1}{2}x^2 z^3 + \frac{1}{20}z^5, \\ \nabla^2 \chi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{4}x^4 z - \frac{1}{2}x^2 z^3 + \frac{1}{20}z^5 \right) = 0.\end{aligned}$$

Gambar 2.18: Koordinat relatif $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Pers. (2.135) merupakan contoh yang dikenal sebagai *transformasi gauge*. Syarat (2.136) dikenal sebagai *gauge Coloumb*. Potensial vektor tidak sberguna seperti potensial skalar dalam komputasi. Ini merupakan pengembangan konsep dalam persoalan bergantung waktu, terutama dalam elektrodinamika, bahwa potensial vektor esensial.

2.10 Teori Medan Vektor

2.10.1 Fungsi Koordinat Relatif

Sering sekali kita menjumpai fungsi yang hanya bergantung pada perbedaan koordinat. Sebagai contoh, medan listrik pada titik (x, y, z) karena muatan titik pada (x', y', z') hanya merupakan fungsi dari $(x - x')$, $(y - y')$, $(z - z')$. Titik (x, y, z) dinamakan titik medan dan titik (x', y', z') dinamakan titik sumber. Vektor posisi relatif \mathbf{R} pada Gambar 2.18 bisa dituliskan sebagai

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k}. \quad (2.137)$$

Jarak kedua buah titiknya adalah

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2} \quad (2.138)$$

Misalkan $f(\mathbf{R})$ merupakan fungsi vektor posisi relatif. Fungsi ini bisa berupa skalar atau komponen sebuah vektor. Fungsi seperti ini memiliki sifat-sifat penting. Marilah kita definisikan $X = (x - x')$, $Y = (y - y')$, $Z = (z - z')$. Dengan menggunakan aturan turunan rantai, kita memperoleh

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X}; \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x'} = -\frac{\partial f}{\partial X}.$$

Rumus yang mirip juga bisa diperoleh untuk turunan terhadap y dan z , yaitu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x'}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y'}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z'}. \quad (2.139)$$

Gradien ∇ terhadap titik medan

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z},$$

kita mendefinisikan gradien ∇' terhadap titik sumber

$$\nabla' f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x'} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y'} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z'},$$

Dari (2.139)

$$\nabla f = -\nabla' f. \quad (2.140)$$

Ini menunjukkan ketika kita berhubungan dengan fungsi dari koordinat relatif, operator ∇ dan ∇' bisa dipertukarkan sehingga tandanya juga berubah. Perhitungan yang sama bisa digunakan untuk membuktikan

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) = -\nabla' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \quad (2.141)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{R}) = -\nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{R}) \quad (2.142)$$

dan

$$\nabla^2 f(\mathbf{R}) = \nabla'^2 f(\mathbf{R}). \quad (2.143)$$

Contoh 2.10.1. Buktikan bahwa $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$, $\nabla \times \mathbf{R} = 0$, $\nabla \times f(R)\mathbf{R} = 0$, dan $\nabla \cdot f(R)\mathbf{R} = \frac{d(R)}{dR}R + 3f(R)$.

Solusi 2.10.1.

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial x}(x - x') + \frac{\partial}{\partial y}(y - y') + \frac{\partial}{\partial z}(z - z') = 3,$$

$$\nabla \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x - x') & (y - y') & (z - z') \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} \nabla \times f(R)\mathbf{R} &= \nabla f(R) \times \mathbf{R} + f(R)\nabla \times \mathbf{R} \\ &= \frac{df(R)}{dR} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{R} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(R)\mathbf{R} &= \nabla f(R) \cdot \mathbf{R} + f(R)\nabla \cdot \mathbf{R} \\ &= \frac{df(R)}{dR} \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} + 3f(R) = \frac{d(R)}{dR}R + 3f(R) \end{aligned}$$

Untuk fungsi-fungsi yang hanya bergantung pada jarak antara dua buah titik, gradien memiliki bentuk sederhana:

$$\nabla f(R) = \mathbf{i} \frac{\partial f(R)}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f(R)}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f(R)}{\partial z}.$$

Dengan aturan rantai

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(R)}{\partial x} &= \frac{df(R)}{dR} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \frac{x-x'}{R}. \end{aligned}$$

Dengan rumus yang mirip untuk turunan y dan z , kita mempunyai

$$\begin{aligned} \nabla f(R) &= \frac{df(R)}{dR} \left(\mathbf{i} \frac{x-x'}{R} + \mathbf{j} \frac{y-y'}{R} + \mathbf{k} \frac{z-z'}{R} \right) \\ &= \frac{df(R)}{dR} \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{df(R)}{dR} \hat{\mathbf{R}}, \end{aligned} \quad (2.144)$$

dengan $\hat{\mathbf{R}}$ adalah vektor satuan dalam arah \mathbf{R} . Khususnya

$$\nabla R = \hat{\mathbf{R}}, \quad (2.145)$$

$$\nabla R^n = nR^{n-1} \hat{\mathbf{R}}. \quad (2.146)$$

Untuk $n = -1$

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{1}{R^2} \hat{\mathbf{R}}. \quad (2.147)$$

Rumus terakhir merupakan kasus khusus karena $-\hat{\mathbf{R}}/R^2$ merupakan medan “hukum kebalikan kuadrat radial”. Medan vektor ini (dengan konstanta pengali yang sesuai) mendeskripsikan dua buah gaya fundamental penting di alam, yaitu gaya gravitasi dan gaya Coloumb pada muatan listrik statik. Divergensi medan ini memerlukan perhatian khusus.

2.10.2 Divergensi $\hat{\mathbf{R}}/|R|^2$ sebagai Fungsi Delta

Divergensi dari $\hat{\mathbf{R}}/|R|^2$ memiliki sifat khusus dan penting. Dihitung secara langsung

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} &= \nabla \cdot \frac{1}{R^3} \mathbf{R} = \left(\nabla \frac{1}{R^3} \right) \cdot \mathbf{R} + \frac{1}{R^3} \nabla \cdot \mathbf{R} \\ &= -3 \frac{1}{R^4} \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R} + 3 \frac{1}{R^3} = 0, \end{aligned}$$

kita memperoleh nol. Di lain pihak, seperti yang sudah kita bicarakan di awal, divergensi merupakan ukuran kekuatan sumber medan vektor. Jika nol di setiap tempat,

bagaimana mungkin terdapat medan gravitasi dan medan listrik? Lebih dari itu, jika kita menggunakan teorema divergensi (2.72) untuk fungsi ini pada permukaan bola berjari-jari R di sekitar titik (x', y', z') , kita akan memperoleh hasil yang tidak nol,

$$\iiint_V \nabla \cdot \frac{\widehat{\mathbf{R}}}{R^2} dV = \oiint_S \frac{\widehat{\mathbf{R}}}{R^2} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{R^2} \oiint_S \widehat{\mathbf{R}} \cdot \widehat{\mathbf{R}} da \quad (2.148)$$

$$= \frac{1}{R^2} \oint_S da = \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi. \quad (2.149)$$

Dalam integral, kita telah menggunakan fakta bahwa pada permukaan bola, vektor satuan normal \mathbf{n} sama dengan $\widehat{\mathbf{R}}$ dan R konstan. Integral ini akan nol jika $\nabla \cdot (\widehat{\mathbf{R}}/R^2)$ sama dengan nol di setiap tempat.

Persoalannya terletak pada titik $R = 0$ dengan $\widehat{\mathbf{R}}/R^2$ tak hingga dan turunannya tidak ada. Jadi kita hanya bisa mengatakan divergensinya nol di setiap tempat kecuali pada $R = 0$. Untuk menghitung divergensi pada $R = 0$, kita perhatikan integral volum (2.149) dari sebuah divergensi terhadap sebuah bola sama dengan 4π berapapun kecilnya R . Jelaslah semua kontribusi haruslah berasal dari titik $R = 0$. Cara yang berguna untuk menjelaskan perilaku ini adalah melalui fungsi delta Dirac $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Penjelasan rinci fungsi delta diberikan pada bab selanjutnya. Di sini kita cukup mengetahui fungsi delta $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ memiliki puncak tajam pada $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ dengan sifat-sifat

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} = \mathbf{r}' \\ \infty, & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \end{cases} \quad (2.150)$$

dan

$$\iiint_{\text{semua ruang}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} = 1, \quad (2.151)$$

dengan $d^3\mathbf{r}$ adalah simbol yang biasa digunakan untuk elemen volum di sekitar titik medan $d^3\mathbf{r} = dV = dx dy dz$. Fungsi delta juga dikarakterisasi oleh sifat pergeseran

$$\iiint_{\text{semua ruang}} f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{r}'), \quad (2.152)$$

karena

$$\iiint_{\text{semua ruang}} f(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} = \iiint_{\text{semua ruang}} f(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r},$$

karena nilai $f(\mathbf{r})$ sama untuk $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ karena integrannya akan bernilai nol. Selanjutnya

$$\iiint_{\text{semua ruang}} f(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{r}') \iiint_{\text{semua ruang}} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{r}'),$$

karena integrasinya terhadap $d^3\mathbf{r}$. Sifat ini juga bisa dituliskan sebagai

$$\iiint_{\text{semua ruang}} f(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = f(\mathbf{r}),$$

dengan $d^3\mathbf{r}' = dx' dy' dz'$.

Dengan fungsi delta, divergensi $\widehat{\mathbf{R}}/R^2$ bisa dinyatakan dengan lebih tepat sebagai

$$\nabla \cdot \frac{\widehat{\mathbf{R}}}{R^2} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.153)$$

Dengan pemahaman ini, kita melihat bahwa

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \frac{\widehat{\mathbf{R}}}{R^2} dV &= \iiint_V \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r} = 4\pi \iiint_V \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r} \\ &= \begin{cases} 4\pi, & \text{jika } \mathbf{r}' \text{ terdapat di dalam volum} \\ 0 & \text{jika } \mathbf{r}' \text{ terdapat di luar volum} \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Karena

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\widehat{\mathbf{R}}}{R^2},$$

maka Laplacian dari $1/R$ diberikan oleh

$$\nabla^2 \frac{1}{R} = \nabla \cdot \nabla \frac{1}{R} = -\nabla \cdot \frac{\widehat{\mathbf{R}}}{R^2} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.155)$$

Contoh 2.10.2. Hitunglah integral

$$I = \iiint_V (r^3 + 1) \nabla \cdot \frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} dV,$$

dengan V sebuah lingkaran berjari-jari b yang berpusat pada titik asal.

Solusi 2.10.2. Metode I. Gunakan fungsi delta. Karena

$$\nabla \cdot \frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}),$$

$$I = \iiint_V (r^3 + 1) 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) dV = 4\pi(0 + 1) = 4\pi.$$

Metode II. Gunakan integrasi parsial. Karena $f\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (f\mathbf{A}) - \nabla f \cdot \mathbf{A}$

$$I = \iiint_V (r^3 + 1) \nabla \cdot \frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} dV = \iiint_V \nabla \cdot \left[(r^3 + 1) \frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} \right] dV - \iiint_V \nabla(r^3 + 1) \cdot \frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} dV.$$

Dengan teorema divergensi

$$\iiint_V \nabla \cdot \left[(r^3 + 1) \frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} \right] dV = \oiint_S (r^3 + 1) \frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \widehat{\mathbf{r}} da = \oiint_S \left(r + \frac{1}{r^2} \right) da$$

dengan S adalah permukaan bola berjari-jari b . Karena pada permukaan ini $r = b$, maka

$$\iiint_V \nabla \cdot \left[(r^3 + 1) \frac{\widehat{\mathbf{r}}}{r^2} \right] dV = \left(b + \frac{1}{b^2} \right) \oiint_S da = \left(b + \frac{1}{b^2} \right) 4\pi b^2 = 4\pi b^3 + 4\pi.$$

Karena $\nabla(r^3 + 1) = 3r^2\hat{\mathbf{r}}$,

$$\iiint_V \nabla(r^3 + 1) \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV = \iiint_V 3r^2\hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} dV = 3 \iiint_V dV = 3 \frac{4}{3}\pi b^2 = 4\pi b^3.$$

Jadi kita mempunyai

$$4\pi b^3 + 4\pi - 4\pi b^3 = 4\pi,$$

yang sama hasilnya dengan metode fungsi delta. Contoh ini mengilustrasikan validitas dan kekuatan metode fungsi delta. Jika volumenya bukan merupakan bola, sepanjang terdapat titik asal, hasil fungsi delta tetap berlaku, tetapi integrasi langsung akan jauh lebih sulit dilakukan.

2.10.3 Teorema Helmholtz

Teorema Helmholtz berkaitan dengan pertanyaan informasi apa yang kita perlukan untuk menentukan sebuah medan vektor. Pada dasarnya, jawabannya adalah jika divergensi dan curl sebuah medan vektor diketahui, dengan beberapa syarat batas medan vektor bisa dicari secara unik.

Teorema Helmholtz menyatakan medan vektor sebarang \mathbf{F} bisa didekomposisi menjadi penjumlahan dua vektor, satunya berupa gradien potensial skalar φ dan satunya lagi curl potensial vektor \mathbf{A} ,

$$\mathbf{F} = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.156)$$

Selanjutnya, jika $\mathbf{F} \rightarrow 0$ pada permukaan di tak hingga lebih cepat dari $1/R$ dan $\nabla \cdot \mathbf{F}$ dan $\nabla \times \mathbf{F}$ diketahui di setiap tempat, maka

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (2.157)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (2.158)$$

Untuk membuktikan teorema ini, pertama kita buat fungsi vektor \mathbf{G}

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad (2.159)$$

Marilah kita aplikasikan Laplacian ∇^2 pada dua ruas persamaan ini. Karena ∇^2 hanya beroperasi pada \mathbf{r} dan hanya $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ mengandung \mathbf{r} , kita mempunyai

$$\nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}) = \iiint \left(\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (2.160)$$

Karena dengan (2.155)

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

dari definisi fungsi delta

$$\nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}) = \iiint (-4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -4\pi\mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (2.161)$$

Jadi

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}). \quad (2.162)$$

Dengan menggunakan identitas vektor $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \nabla^2 \mathbf{G}$, kita mempunyai

$$\nabla^2 \mathbf{G} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}).$$

Jadi dengan

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{G}), \quad \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{G})$$

suku pertama teorema mengikuti (2.162)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A}.$$

Untuk mencari ekspresi eksplisit dari φ , kita mulai dengan

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{G}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \iiint \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'.$$

Karena ∇ hanya beroperasi pada \mathbf{r} dan hanya $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ mengandung \mathbf{r} , kita mempunyai

$$\nabla \cdot \iiint \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \iiint \nabla \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \iiint \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'.$$

Sekarang

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

dan

$$\left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}'),$$

jadi

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \nabla' \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \quad (2.163)$$

Integral pertama pada ruas kanan persamaan bisa dirubah menjadi integral permukaan pada tak hingga dengan teorema divergensi

$$\iiint_{\text{semua ruang}} \frac{1}{4\pi} \iiint \nabla' \cdot \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \iint_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} da'.$$

Ketika $r' \rightarrow \infty$ $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ lebih cepat menuju nol dibandingkan dengan $1/r'$. Jadi integral permukaannya sama dengan nol. Ini mengikuti dari fakta bahwa permukaan hanya sebanding dengan r^2 dan $\mathbf{F}(\mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ lebih cepat menuju nol dibandingkan dengan $1/r'^2$. Jadi integral kedua pada ruas kanan (2.163) bersisa

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'.$$

Untuk potensial vektor, dengan cara yang sama, kita mulai dengan

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbb{G}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \nabla \times \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') &= -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') \\ \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') &= \nabla \times \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{F}(\mathbf{r}') - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

kita mempunyai

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint \nabla \times \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (2.164)$$

Dengan teorema integral (2.122)

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{P} d^3\mathbf{r}' = - \iint_S \mathbf{P} \times \mathbf{n} da$$

integral pertama pada ruas kanan (2.164) bisa ditransformasikan menjadi integral permukaan

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_{\text{semua ruang}} \nabla \times \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \iint_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n} da',$$

yang nilainya nol karena $\mathbf{F}(\mathbf{r}') \rightarrow 0$ pada permukaan di tak hingga lebih cepat daripada $1/r'$. Jadi (2.164) menjadi

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (2.165)$$

Ini melengkapi pembuktian. Divergensi dan curl \mathbf{F} biasanya dinamakan sebagai sumber dari medan, karena \mathbf{F} bisa dicari dengan pengetahuan keduanya. Titik \mathbf{r} tempat kita menghitung \mathbf{F} disebut titik medan. Titik \mathbf{r} tempat sumber dievaluasi untuk integrasi dinamakan titik sumber. Fungsi φ dan \mathbf{A} disebut potensial skalar dan vektor, karena \mathbf{F} diperoleh dari keduanya dengan turunan.

Perhatikan bahwa $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ bisa ditentukan secara unik, sedangkan potensial φ dan \mathbf{A} tidak. Konstanta sebarang bisa ditambahkan pada φ , karena $\nabla(\varphi + C) = \nabla\varphi$. Gradien fungsi skalar sebarang bisa ditambahkan ke \mathbf{A} , karena $\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\psi) = \nabla \times \mathbf{A}$.

Contoh 2.10.3. Jika $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$ dan $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ lebih cepat menuju nol pada permukaan di tak hingga dibandingkan $1/r'$, buktikan bahwa $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$.

Solusi 2.10.3. Karena ∇ hanya beroperasi pada \mathbf{r}

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \nabla \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Sekarang

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = -\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

dan

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') \right] &= \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') \\ &= \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') \end{aligned}$$

karena divergensi sebuah curl sama dengan nol. Jadi kita mempunyai

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \iiint \left[\nabla \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') \right] d^3\mathbf{r}' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} da. \end{aligned}$$

Ketika $S \rightarrow \infty$, $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$.

2.10.4 Persamaan Poisson dan Laplace

Teorema Helmholtz menunjukkan medan vektor secara unik ditentukan oleh divergensi dan curl-nya. Untuk menurunkan rumus divergensi dan curl dari pengamatan eksperimen merupakan sesuatu yang sangat penting.

Salah satu medan vektor paling penting adalah medan kebalikan kuadrat radial, yang merupakan pernyataan matematik hukum gravitasi dan hukum Coloumb, dua buah hukum fundamental di alam. Sebagai contoh, bersama dengan prinsip superposisi, medan listrik $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ yang dihasilkan oleh muatan statik bisa dituliskan sebagai

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \varrho(\mathbf{r}') \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi} \iiint \varrho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}', \quad (2.166)$$

dengan $\varrho(\mathbf{r}')$ merupakan rapat muatan (muatan listrik tiap satuan volume) di sekitar \mathbf{r}' . Konstanta $1/4\pi$ hanyalah persoalan satuan dan tidak menjadi perhatian kita di sini. Divergensi $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ adalah

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \varrho(\mathbf{r}') \left(\nabla \cdot \frac{\widehat{\mathbf{R}}}{R^2} \right) d^3\mathbf{r}',$$

karena ∇ hanya beroperasi pada \mathbf{r} . Tetapi

$$\nabla \cdot \frac{\widehat{\mathbf{R}}}{R^2} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

seperti yang ditunjukkan pada (2.153). Jadi,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \varrho(\mathbf{r}') 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = \varrho(\mathbf{r}). \quad (2.167)$$

Fakta kita bisa menghubungkan divergensi \mathbf{E} pada \mathbf{r} dengan rapat muatan pada titik \mathbf{r} yang sama merupakan hal yang penting. Hukum Coloumb (2.166) merupakan hasil eksperimen, yang mengatakan medan listrik \mathbf{E} pada \mathbf{r} disebabkan oleh semua muatan lain pada tempat \mathbf{r} yang berbeda. Tetapi dengan analisis vektor, kita menemukan $\nabla \cdot \mathbf{E}$ pada \mathbf{r} sama dengan rapat muatan $\varrho(\mathbf{r})$ pada tempat yang sama ketika \mathbf{E} dihitung. Persamaan jenis ini dinamakan persamaan medan yang mendeskripsikan sifat medan pada tiap titik.

Karena curl dari $(\widehat{\mathbf{R}}/R^2)$ sama dengan nol, \mathbf{E} bisa dinyatakan sebagai gradien potensial skalar yaitu $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, jadi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla\varphi = \varrho.$$

Maka

$$\nabla^2\varphi = -\varrho. \quad (2.168)$$

Hasil ini dikenal sebagai *persamaan Poisson* yang menentukan hubungan antara rapat muatan dan potensial skalar untuk sebuah medan irrotasional.

Ketika $\varrho = 0$ (tidak ada muatan), persamaannya menjadi

$$\nabla^2\varphi = 0. \quad (2.169)$$

yang dikenal sebagai *persamaan Laplace*.

Persamaan Poisson dan Laplace merupakan dua buah persamaan yang sangat penting dalam fisika matematik. Keduanya sangat sering dijumpai dalam berbagai persoalan.

2.10.5 Teorema Keunikan

Dalam bab selanjutnya, kita akan menjelaskan beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan Laplace. Kita bisa menggunakan metode apapun, sepanjang kita bisa menemukan fungsi skalar φ yang memenuhi persamaan dan syarat batas, medan vektor yang diturunkan dari sini secara unik telah ditentukan. Ini dikenal sebagai teorema keunikan.

Misalkan daerah yang kita tinjau dikelilingi oleh S , (jika batasnya terdiri dari berbagai permukaan termasuk permukaan di tak hingga, maka S menyatakan semuanya). Terdapat dua buah syarat batas (1) nilai φ ditentukan pada S , yang dikenal sebagai syarat batas Dirichlet dan (2) turunan normal $\partial\varphi/\partial n$ ditentukan pada S , dikenal sebagai syarat batas Neumann. Teorema ini mengatakan:

Dua buah solusi φ_1 dan φ_2 persamaan Laplace yang memenuhi syarat batas jenis pertama haruslah identik. Dua buah solusi φ_1 dan φ_2 persamaan Laplace yang memenuhi syarat batas jenis kedua bisa berbeda dengan sebuah konstanta tambahan.

Untuk membuktikan teorema ini, kita definisikan sebuah fungsi baru $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Jelaslah, $\nabla^2\Phi = \nabla^2\varphi_1 - \nabla^2\varphi_2 = 0$. Lebih dari itu, baik Φ maupun $\partial\Phi/\partial n = \nabla\Phi \cdot \mathbf{n}$ hilang pada S . Gunakan teorema divergensi pada $\Phi\nabla\Phi$ kita mempunyai

$$\iiint \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) dV = \iint_S \Phi\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} da = 0$$

karena integral pada ruas kanan hilang. Tetapi

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + \Phi\nabla^2\Phi$$

dan $\nabla^2\Phi = 0$ di setiap titik, jadi teorema divergensi dalam kasus ini menjadi

$$\iiint \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi dV = 0.$$

Sekarang $\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi = (\nabla\Phi)^2$ haruslah bernilai positif atau nol, satu-satunya kemungkinan hanyalah $\nabla\Phi = 0$ di setiap tempat di dalam volum. Sebuah fungsi yang memiliki gradien nol pada semua titik tidak bisa berubah, sehingga Φ memiliki nilai yang sama pada batas S . Untuk syarat batas jenis pertama, $\Phi = 0$ pada S , dan Φ harus sama dengan nol pada setiap titik pada daerah tersebut. Jadi $\varphi_1 = \varphi_2$. Untuk syarat batas jenis kedua, $\nabla\Phi$ sama dengan nol pada semua titik di dalam daerah dan $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = 0$ pada S , satu-satunya solusi yang mungkin adalah Φ sama dengan sebuah konstanta. Jadi φ_1 dan φ_2 bisa berbeda paling banyak dengan sebuah konstanta. Dalam kedua kasus, medan vektor $\nabla\Phi$ terdefinisi dengan unik.

2.11 Latihan

- Carilah $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$, $\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|$, jika $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Jawab: $\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $-\sin t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j}$, $\sqrt{2}$, 1.

2. Buktikan bahwa $\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = A \frac{dA}{dt}$.
3. Sebuah partikel bergerak melalui kurva $\mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i} + (t^2 - 4t)\mathbf{j} + (3t - 5)\mathbf{k}$ dengan t adalah waktu. Carilah kecepatan dan percepatannya pada $t = 1$!
Jawab: $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
4. Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 4t)\mathbf{i} + (t^2 + 4t)\mathbf{j} + (8t^2 - 3t^3)\mathbf{k}$ dengan t adalah waktu. Carilah magnitudo komponen singgung dan normal dari percepatan pada $t = 2$!
Jawab: 16, $2\sqrt{73}$.
5. Sebuah medan kecepatan diberikan oleh $\mathbf{v} = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$. Tentukan percepatannya pada titik $(2, 1, -4)$.
Jawab: $16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
Petunjuk: $\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$.
6. Sebuah roda berjari-jari b menggelinding sepanjang tanah dengan kelajuan konstan v_0 . Carilah percepatan sebarang titik pada pelek roda.
Jawab: v_0^2/b ke arah pusat roda.
Petunjuk: Misalkan titik asal yang bergerak merupakan pusat roda dengan sumbu x melalui titik dalam soal, jadi $\mathbf{r} = b\mathbf{i}$, $\mathbf{v}' = 0$, $\mathbf{a} = 0$. Kecepatan sudutnya adalah $\omega = (v_0/b)\mathbf{k}$. Kemudian gunakan (2.44).
7. Carilah panjang busur dari $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$ dari $t = 0$ ke $t = 2\pi$.
Jawab: $s = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.
Petunjuk: $ds = v dt = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})^{1/2} dt$.
8. Carilah panjang busur dari $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$ dari $t = 0$ ke $t = \pi$.
Jawab: $s = \pi^2/2$.
9. Diketahui sebuah kurva $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$, carilah kelengkungan κ dan torsi γ .
Jawab: $\frac{2}{(1 + 2t^2)^2}$, $\frac{2}{(1 + 2t^2)^2}$.
10. Buktikan bahwa $\ddot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{t} + v^2\kappa\mathbf{n}$.
11. Buktikan bahwa kelengkungan κ sebuah ruang lengkung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ diberikan oleh

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3},$$

dengan titik atas merupakan turunan terhadap waktu.

Petunjuk: pertama buktikan bahwa: $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = v\mathbf{t} \times (\dot{v}\mathbf{t} + v^2\kappa\mathbf{n})$.

12. Buktikan bahwa torsi γ sebuah ruang lengkung secara numerik diberikan oleh

$$\gamma = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}.$$

Petunjuk: pertama buktikan bahwa $\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = -v^6 \kappa^2 \gamma$, dan gunakan hasil dari soal sebelumnya.

13. Carilah gradien medan skalar $\phi = xyz$, dan hitunglah pada titik $(1, 2, 3)$, carilah turunan ϕ dalam arah $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Jawab: $yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $9/\sqrt{2}$.

14. Carilah vektor satuan normal permukaan berikut pada titik yang dinyatakan: (a) $x^2 + y^2 - z = 0$ pada $(1, 1, 2)$, (b) $x^2 + y^2 = 5$ pada $(2, 1, 0)$, dan (c) $y = x^2 + z^3$ pada $(1, 2, 1)$.

Jawab: $(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})/3$, $(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})/5$, $(-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{11}$.

15. Suhu T diberikan oleh $T = x^2 + xy + yz$. Berapakah vektor satuan pada titik dalam arah perubahan maksimum suhu pada $(2, 1, 4)$? Berapakah nilai turunan suhu pada arah x pada titik tersebut? Jawab: $(5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{62}$, 5.

16. Tentukan persamaan bidang singgung pada permukaan yang diberikan pada titik yang diindikasikan: (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ pada $(3, 4, 0)$, dan (b) $x^2 - 2xy = 0$ pada $(2, 2, 1)$.

Jawab: $3x + 4y = 25$, $y = 2$.

17. Carilah divergensi medan vektor berikut pada titik $(2, 1, -1)$. (a) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, (b) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (c) $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Jawab: 3, 3, $6\sqrt{3}$.

18. Buktikan teorema divergensi dengan menghitung integral volum dan integral permukaan untuk medan vektor $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$ dan volumenya berupa kubus satuan $0 \leq x, y, z \leq 1$.

19. Dengan menggunakan teorema divergensi hitunglah:

(a) $\oiint (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, da$
dengan S permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;

(b) $\oiint (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, da$
dengan S permukaan silinder $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 8$;

(c) $\oiint (x \sin y\mathbf{i} + \cos^2 x\mathbf{j} - z \sin y\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, da$
dengan S permukaan bola $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$.

Jawab: (a) 108π , (b) 288π , (c) 0.

20. Buktikan bahwa

$$\oiint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, da = 3V,$$

dengan V adalah volum yang dilingkupi permukaan tertutup S .

21. Dengan memperhatikan $\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \, da = dy \, dz$; $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, da = dz \, dx$; $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, da = dx \, dy$ (lihat Contoh 2.5.2), hitunglah integral berikut dengan teorema divergensi

$$\oiint_S (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy),$$

dengan S adalah permukaan silinder $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 3$.

Jawab: 81π .

Petunjuk: pertama buktikan $(x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \, da$ (lihat Contoh 2.5.2).

22. Hitunglah integral berikut dengan teorema divergensi

$$\oiint_S (x \, dy \, dz + 2y \, dz \, dx + y^2 \, dx \, dy),$$

dengan S adalah permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Jawab: 32π .

23. Gunakan teorema divergensi untuk menghitung integral permukaan

$$\iint_S [(x+y)\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}] \cdot \mathbf{n} \, da,$$

dengan S adalah permukaan setengah bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dengan $z > 0$ dan \mathbf{n} merupakan vektor satuan normal ke arah luar. Perhatikan bahwa permukaannya tidak tertutup.

Jawab: $\frac{11}{12}\pi$.

Petunjuk: integralnya sama dengan integral tertutup setengah lingkaran dikurangi dengan integral terhadap alas.

24. Carilah curl tiap medan vektor berikut pada titik $(-2, 4, 1)$. (a) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ dan (b) $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.

Jawab: (a) 0 , (b) $-\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

25. Buktikan teorema Stokes dengan menghitung integral garis dan integral permukaan medan vektor $\mathbf{A} = (2x - y)\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$ dan permukaannya berupa piringan $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

26. Hukum Ampere mengatakan fluks total medan listrik yang melalui sebuah loop sebanding dengan integral garis medan magnet di sekitar loop, yaitu $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da$ dengan \mathbf{B} berupa medan magnet, \mathbf{J} rapat arus dan μ_0 konstanta kesebandingan. Jika ini berlaku untuk sebarang loop, buktikan bahwa $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$.

27. Buktikan bahwa $\oint_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0$ untuk loop tertutup sebarang C .
28. Hitunglah sirkulasi vektor $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ($\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$) mengelilingi sebuah segitiga dengan titik sudut pada titik asal, $(2, 2, 0)$ dan $(0, 2, 0)$ dengan (a) integrasi langsung, dan (b) menggunakan teorema Stokes.
Jawab: $8/3$.
29. Hitunglah sirkulasi $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ mengelilingi lingkaran satuan dalam bidang xy dengan pusat pada titik asal dengan (a) integrasi langsung dan (b) dengan teorema Stokes.
Jawab: -2π .
30. Hitunglah sirkulasi medan vektor berikut mengelilingi kurva yang diberikan. Gunakan integrasi langsung maupun teorema Stokes. (a) $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ mengelilingi sebuah segitiga dengan sudut pada titik asal, $(1, 0, 0)$ dan $(0, 0, 4)$. (b) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ mengelilingi sebuah lingkaran satuan dalam bidang xy dengan pusat pada titik asal.
Jawab: $2, 0$.
31. Periksa aturan perkalian

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

dengan menghitung tiap suku secara terpisah untuk fungsi $\mathbf{A} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \sin y\mathbf{i} + \sin x\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$.

32. Periksa hubungan

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

dengan menghitung tiap suku secara terpisah untuk $\mathbf{A} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.

33. Buktikan bahwa $\nabla \times (\varphi \nabla \varphi) = 0$.

34. Buktikan bahwa

$$\iiint_V (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \, dV = \iiint_V (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \, dV + \oiint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \, da$$

dengan S adalah permukaan yang melingkupi volum V .

35. Buktikan untuk permukaan S tertutup sebarang

$$\oiint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \, da = 0.$$

36. Berapakah nilai, jika ada, konstanta a dan b agar medan vektor berikut irrotasional

$$\mathbf{F} = (y \cos x + axz)\mathbf{i} + (b \sin x + z)\mathbf{j} + (x^2 + y)\mathbf{k}.$$

Jawab: $a = 2, b = 1$.

37. (a) Buktikan bahwa $\mathbf{F} = (2xy + 3)\mathbf{i} + (x^2 - 4z)\mathbf{j} - 4y\mathbf{k}$ merupakan medan konservatif.

(b) Carilah potensial skalar φ sehingga $\nabla\varphi = -\mathbf{F}$.

(c) Hitunglah integral $\int_{3,-1,2}^{2,1,-1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Jawab: (a) $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, (b) $\varphi = -x^2y - 3x + 4yz$, (c) 6.

38. (a) Buktikan bahwa $\mathbf{F} = y^2z\mathbf{i} - (z^2 \sin y - 2xyz)\mathbf{j} + (2z \cos y + y^2x)\mathbf{k}$ irrotasional.

(b) Carilah fungsi φ sehingga $\nabla\varphi = \mathbf{F}$.

(c) Hitunglah integral $\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ dengan Γ sepanjang kurva $x = \sin(\pi t/2)$, $y = t^2 - t$, $z = t^4$, $0 \leq t \leq 1$.

Jawab: (a) $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, (b) $\varphi = z^2 \cos y + xy^2z$, (c) 1.

39. Jika \mathbf{A} irrotasional, buktikan bahwa $\mathbf{A} \times \mathbf{r}$ solenoidal.

40. Vektor \mathbf{B} dibentuk oleh perkalian dua buah gradien

$$\mathbf{B} = (\nabla u) \times (\nabla v),$$

dengan u dan v fungsi skalar.

(a) Buktikan bahwa \mathbf{B} solenoidal.

(b) Buktikan bahwa

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(u\nabla v - v\nabla u)$$

merupakan vektor potensial untuk \mathbf{B} dengan $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

41. Buktikan bahwa jika $\nabla^2\varphi = 0$ dalam volum V maka

$$\oiint_S \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} \, da = 0,$$

dengan S merupakan permukaan yang membatasi volum V .

42. Dua buah medan f dan g dihubungkan dengan persamaan Poisson $\nabla^2 f = g$. Buktikan bahwa

$$\iiint_V g \, dV = \oiint_S \nabla f \cdot \mathbf{n} \, da,$$

dengan S adalah permukaan yang membatasi volum V .

43. Gunakan teorema Stokes untuk membuktikan

$$\oint_C f \nabla g \cdot d\mathbf{r} = - \oint_C g \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

untuk kurva C tertutup sebarang dan medan terdiferensialkan f dan g .

Petunjuk: pertama buktikan $\oint_C f \nabla g \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla f \times \nabla g \cdot \mathbf{n} \, da$.

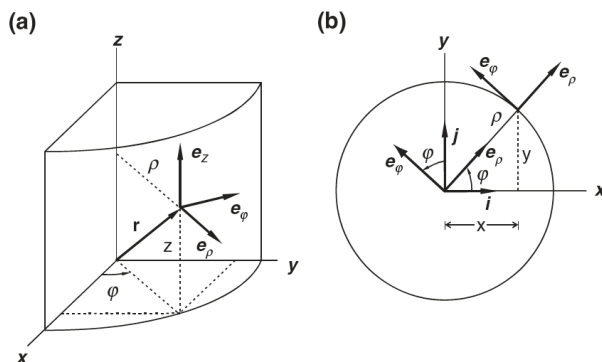
3

Koordinat Lengkung

Sampai sekarang kita hanya menggunakan koordinat Cartesian (persegi) dengan vektor satuan konstan. Sering, karena geometri persoalan yang kita tinjau, sistem koordinat lain lebih sesuai. Terdapat banyak sistem koordinat, masing-masing bisa dianggap sebagai kasus khusus sistem koordinat lengkung. Akan lebih efisien jika kita pertama membentuk teori tentang koordinat lengkung dan kemudian memperkenalkan tiap sistem koordinat sebagai contoh khusus. Tetapi, untuk alasan pedagogik, kita akan melakukannya setelah kita langsung mentransformasikan rumus vektor dalam koordinat persegi ke dalam koordinat silinder dan koordinat bola, dua buah koordinat yang paling sering digunakan. Prosedur ini memiliki keuntungan untuk menekankan arti fisis operator gradien, divergensi, curl dan Laplacian yang tidak berubah dalam sistem koordinat berbeda. Kemunculan yang berbeda hanya karena dinyatakan dalam ekspresi yang berbeda. Selanjutnya, ekspresi dalam koordinat silinder dan bola akan menjadi contoh familiar dalam mengklarifikasi suku dalam sistem lengkung umum. Sebagai contoh yang lebih lanjut, sistem koordinat eliptikal dibahas secara detail karena kegunaannya dalam persoalan dua buah pusat. Dalam kerangka koordinat lengkung, kita juga memperkenalkan determinan Jacobian untuk integral lipat pada Subbab 3.5.

3.1 Koordinat Silinder

Sistem koordinat silinder secara formal dikenal sebagai sistem koordinat silinder lingkaran atau silinder polar. Dalam sistem ini, posisi suatu titik dinyatakan dalam (ρ, φ, z) seperti pada Gambar 3.1.(a): ρ adalah jarak tegak lurus dari sumbu- z , φ adalah sudut antara sumbu- x dan proyeksi ρ pada bidang- xy dan z adalah koordinat yang sama dengan koordinat Cartesian. Tiga buah vektor satuan \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z , memiliki arah yang sama dengan bertambahnya koordinat. Hubungan dengan koordinat Cartesian dapat dengan mudah dilihat dari Gambar 3.1.(b) dengan memindahkan



Gambar 3.1: Koordinat silinder. (a) Sebuah titik dinyatakan dalam (ρ, φ, z) , vektor satuan $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ mengarah ke arah bertambahnya koordinat yang bersangkutan, (b) $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi$ dipindahkan pada titik asal untuk mencari hubungan dengan vektor satuan koordinat Cartesian \mathbf{i}, \mathbf{j} .

$\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi$ pada titik asal:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \quad (3.1)$$

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{j}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{i} + \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \mathbf{j}. \quad (3.3)$$

$$\mathbf{i} = \cos \varphi \mathbf{e}_\rho - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{j} = \sin \varphi \mathbf{e}_\rho + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (3.5)$$

Diperoleh

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{\rho \cos \varphi}{\rho} = \cos \varphi, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho} = \sin \varphi, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho}. \quad (3.10)$$

Hubungan antara \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_z dapat dengan mudah dikerjakan, sebagai contoh,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho &= (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) \cdot (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\varphi &= (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) \cdot (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) = 0, \\ \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi &= (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) \times (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) = \cos^2 \varphi \mathbf{k} + \sin^2 \varphi \mathbf{k} = \mathbf{k} = \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Jika diambil bersamaan, kita peroleh sebuah himpunan basis ortonormal

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1, \\ \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\rho = 0, \\ \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Vektor posisi \mathbf{r} , dari pusat ke titik sebarang, jelas terlihat pada Gambar 3.1 yaitu

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z.\tag{3.12}$$

Rumus ini dapat juga diperoleh langsung dengan mentransformasikan $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ke dalam koordinat silinder.

Vektor sebarang dapat dinyatakan dalam suku-suku tersebut. Jika vektor merupakan sebuah fungsi posisi, maka

$$\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = A_\rho(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z)\mathbf{e}_z.\tag{3.13}$$

Secara umum, tiap komponen adalah sebuah fungsi ρ , φ , z . Tidak seperti vektor satuan konstan \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} dalam sistem koordinat persegi, hanya $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$ yang tetap, arah \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_φ berubah ketika titik berputar. Perhatikan bahwa baik \mathbf{e}_ρ dan \mathbf{e}_φ bergantung pada φ . Secara khusus

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\rho &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}) = -(\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) = -\mathbf{e}_\rho, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\rho &= \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi = 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Contoh 3.1.1. Tunjukkan bahwa percepatan dalam koordinat silinder dapat dinyatakan dengan

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z,$$

dengan dot adalah turunan terhadap waktu t .

Solusi 3.1.1. Karena vektor posisi diberikan oleh $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$, kecepatannya $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z,$$

dengan \mathbf{e}_z adalah vektor satuan konstan dan \mathbf{e}_ρ bergantung φ . Karena dengan (3.14)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_\rho &= \frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\varphi} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Percepatan adalah laju berubahnya kecepatan, maka $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z.$$

Kembali dengan (3.14)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_\varphi &= \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi} = \dot{\varphi} (-\mathbf{e}_\rho), \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_\rho + \ddot{z} \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z.$$

3.1.1 Operasi Diferensial

Gradien

Mulai dengan definisi gradien dalam koordinat Cartesian, kita dapat menggunakan transformasi koordinat untuk menyatakannya dalam (ρ, φ, z) . Dengan menggunakan (3.3) dan (3.5)

$$\begin{aligned}\nabla \Phi &= \mathbf{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ &= (\cos \varphi \mathbf{e}_\rho - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (\sin \varphi \mathbf{e}_\rho + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi) \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ &= \left(\cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(-\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Dengan aturan rantai dan (3.6)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\rho \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \rho \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (3.17)$$

Dengan rumus ini, (3.15) menjadi

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (3.18)$$

Sehingga operator gradien dalam koordinat silinder dapat dituliskan sebagai

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.19)$$

Konsekuensi langsungnya adalah

$$\nabla \rho = \mathbf{e}_\rho, \quad \nabla \varphi = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi, \quad \nabla z = \mathbf{e}_z. \quad (3.20)$$

Hal ini bukan merupakan hasil yang mengejutkan. Setelah semuanya, ∇u adalah sebuah vektor tegak lurus pada permukaan $u = \text{konstan}$.

Divergensi

Divergensi sebuah vektor

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (V_\rho \mathbf{e}_\rho + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z)$$

pertama dapat diekspansikan dengan hukum distributif perkalian dot. Sekarang,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V_\rho \mathbf{e}_\rho &= \nabla \cdot V_\rho (\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z) = \nabla \cdot V_\rho (\rho \nabla \varphi \times \nabla z) \\ &= \nabla (\rho V_\rho) \cdot (\nabla \varphi \times \nabla z) + \rho V_\rho \nabla \cdot (\nabla \varphi \times \nabla z). \end{aligned}$$

Tetapi $\nabla \cdot (\nabla \varphi \times \nabla z) = \nabla \times \nabla \varphi \cdot \nabla z - \nabla \times \nabla z \cdot \nabla \varphi = 0$, jadi

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V_\rho \mathbf{e}_\rho &= \nabla (\rho V_\rho) \cdot (\nabla \varphi \times \nabla z) = \nabla (\rho V_\rho) \cdot \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z \right) = \frac{1}{\rho} \nabla (\rho V_\rho) \cdot \mathbf{e}_\rho \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \rho V_\rho}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho V_\rho}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \rho V_\rho}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{e}_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho). \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot V_\varphi \mathbf{e}_\varphi &= \nabla \cdot V_\varphi (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho) = \nabla \cdot V_\varphi (\nabla z \times \nabla \rho) \\ &= \nabla V_\varphi \cdot (\nabla z \times \nabla \rho) + V_\varphi \nabla \cdot (\nabla z \times \nabla \rho) \\ &= \nabla V_\varphi \cdot (\nabla z \times \nabla \rho) = \nabla V_\varphi \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho) = \nabla V_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi \\ &= \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial V_\varphi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sehingga

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (3.23)$$

Laplacian

Dari definisi Laplacian Φ diberikan oleh

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \right). \quad (3.24)$$

Dengan menggunakan ekspresi divergensi, kita mempunyai

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right).$$

Sehingga

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (3.25)$$

Karena Laplacian adalah operator skalar, maka lebih mudah jika kita mengubahnya langsung dari definisinya dalam koordinat persegi

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

Sekarang dengan aturan rantai dan (3.7) dan (3.9), kita memiliki

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \\ &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right] - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right] \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial \rho} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] = \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] \\ &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right] \\ &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} \\ &\quad + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial \rho} - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Jelaslah Laplacian yang didapatkan dengan cara ini identik dengan (3.25).

Curl

Curl sebuah vektor dapat dinyatakan dengan

$$\nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times (V_\rho \mathbf{e}_\rho + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi + V_z \mathbf{e}_z). \quad (3.26)$$

Sekarang

$$\nabla \times V_\rho \mathbf{e}_\rho = \nabla \times V_\rho \nabla \rho = \nabla V_\rho \times \nabla \rho + V_\rho \nabla \times \nabla \rho.$$

Karena $\nabla \times \nabla \rho = 0$,

$$\begin{aligned} \nabla \times V_\rho \mathbf{e}_\rho &= \nabla V_\rho \times \nabla \rho = \nabla V_\rho \times \mathbf{e}_\rho \\ &= \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \right) \times \mathbf{e}_\rho \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \mathbf{e}_z + \frac{\partial V_\rho}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times V_\varphi \mathbf{e}_\varphi &= \nabla \times V_\varphi (\rho \nabla \varphi) = \nabla (\rho V_\varphi) \times \nabla \varphi + \rho V_\varphi \nabla \times \nabla \varphi \\ &= \nabla (\rho V_\varphi) \times \nabla \varphi = \nabla (\rho V_\varphi) \times \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\varphi \\ &= \frac{1}{\rho} \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \rho V_\varphi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho V_\varphi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \rho V_\varphi}{\partial z} \right) \times \mathbf{e}_\varphi \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho V_\varphi}{\partial \rho} \mathbf{e}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho V_\varphi}{\partial z} \mathbf{e}_\rho, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times V_z \mathbf{e}_z &= \nabla V_z \times \mathbf{e}_z = \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial V_z}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \times \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{\partial V_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\rho. \end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho V_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi \\ &\quad + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Contoh 3.1.2. (a) Tunjukkan bahwa medan vektor

$$\mathbf{F} = \left(A - \frac{B}{\rho^2} \right) \cos \varphi \mathbf{e}_\rho - \left(A + \frac{B}{\rho^2} \right) \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi$$

tidak berotasi ($\nabla \times \mathbf{F} = 0$). (b) Carilah potensial skalar Φ sehingga $\nabla \Phi = \mathbf{F}$. (c) Tunjukkan bahwa Φ memenuhi persamaan Laplace ($\nabla^2 \Phi = 0$).

Contoh 3.1.2. (a) Semua turunan terhadap z sama dengan nol, karena tidak ada kebergantungan terhadap z . Selanjutnya $V_z = 0$. Sehingga

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \left(-A - \frac{B}{\rho^2} \right) \sin \varphi \right] \mathbf{e}_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(A - \frac{B}{\rho^2} \right) \cos \varphi \right] \mathbf{e}_z \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\left(-A + \frac{B}{\rho^2} \right) \sin \varphi + \left(A - \frac{B}{\rho^2} \right) \sin \varphi \right] \mathbf{e}_z = 0.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\nabla \Phi &= \mathbf{e}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ &= \left(A - \frac{B}{\rho^2} \right) \cos \varphi \mathbf{e}_\rho - \left(A + \frac{B}{\rho^2} \right) \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} &= \left(A - \frac{B}{\rho^2} \right) \cos \varphi; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = - \left(A + \frac{B}{\rho^2} \right) \sin \varphi.\end{aligned}$$

Jelas, dengan sebuah konstanta tambahan

$$\Phi = \left(A\rho + \frac{B}{\rho} \right) \cos \varphi.$$

(c)

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(A\rho + \frac{B}{\rho} \right) \cos \varphi \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(A\rho + \frac{B}{\rho} \right) \cos \varphi \\ &= \frac{1}{\rho} \left(A + \frac{B}{\rho^2} \right) \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \left(A + \frac{B}{\rho^2} \right) \cos \varphi = 0.\end{aligned}$$

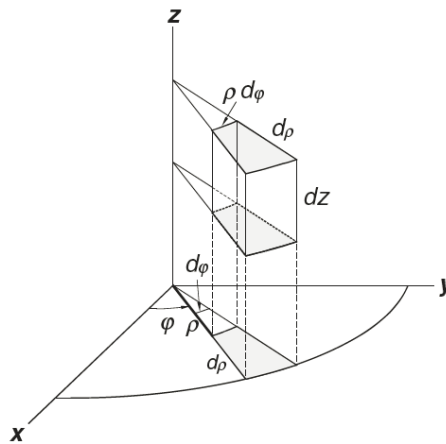
3.1.2 Elemen Infinitesimal

Ketika sebuah titik pada (x, y, z) dipindahkan ke $(x + dx, y + dy, z + dz)$, vektor perpindahan infinitesimalnya adalah $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$. Dengan cara yang sama, ketika sebuah titik pada (ρ, φ, z) dalam koordinat silinder dipindahkan ke $(\rho + d\rho, \varphi + d\varphi, z + dz)$, vektor perpindahan infinitesimalnya adalah

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\varphi \rho d\varphi + \mathbf{e}_z dz. \quad (3.30)$$

Perhatikan bahwa jarak dalam arah \mathbf{e}_φ adalah $\rho d\varphi$ seperti pada Gambar 3.1. Panjang elemen infinitesimal adalah

$$ds = (d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})^{1/2} = [(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2]^{1/2}. \quad (3.31)$$



Gambar 3.2: Elemen diferensial dalam koordinat silinder. Perhatikan bahwa panjang diferensial dalam arah φ sama dengan $\rho d\varphi$. Elemen volumn diferensialnya adalah $\rho d\varphi d\rho dz$.

Gradien didefinisikan sebagai turunan vektor terhadap jarak dalam tiga arah yang saling tegak lurus. Sehingga gradien dalam koordinat silinder adalah

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

yang identik dengan (3.19) yang diperoleh dari transformasi langsung.

Elemen volumn infinitesimal dV adalah hasil perkalian perpindahan tegak lurus infinitesimal

$$dV = (d\rho)(\rho d\varphi)(dz) = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (3.32)$$

Selang yang mungkin untuk ρ adalah dari 0 ke ∞ , φ dari 0 ke 2π dan z dari $-\infty$ sampai ∞ . Elemen permukaan infinitesimal bergantung pada orientasi permukaan. Sebagai contoh, pada permukaan sisi sebuah silinder yang paralel terhadap sumbu- z dengan jari-jari konstan ρ , elemen permukaan berarah ke luar adalah $\mathbf{n} da = \rho d\varphi dz \mathbf{e}_\rho$. Elemen permukaan pada bidang- xy arah ke atas adalah $\mathbf{n} da = \rho d\varphi d\rho \mathbf{e}_z$.

Contoh 3.1.3. Buktikan teorema divergensi

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oiint_s \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

dengan sebuah medan vektor

$$\mathbf{F} = \rho(2 + \sin^2 \varphi) \mathbf{e}_\rho + \rho \sin \varphi \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi + 3z^2 \mathbf{e}_z$$

pada sebuah silinder dengan jari-jari 2 dan tinggi 5.

Solusi 3.1.3.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho} 2\rho(2 + \sin^2 \varphi) + \frac{1}{\rho} \rho(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 6z \\ &= 4 + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 6z = 5 + 6z.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV &= \iiint_V (5 + 6z)\rho \, d\varphi \, d\rho \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \, d\rho \int_0^5 (5 + 6z) \, dz = 400\pi.\end{aligned}$$

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da,$$

dengan S_1 adalah permukaan sisi silinder, S_2 permukaan bawah dan S_3 permukaan atas silinder.

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\rho \, da = \int_0^{2\pi} \int_0^5 [\rho(2 + \sin^2 \varphi)\rho]_{\rho=2} \, d\varphi \, dz = 100\pi.$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{e}_z) \, da = \iint_{S_2} [-3z^2]_{z=0} \, da = 0,$$

$$\iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{e}_z) \, da = \int_0^{2\pi} \int_0^2 [3z^2]_{z=5} \rho \, d\varphi \, d\rho = 300\pi.$$

Sehingga,

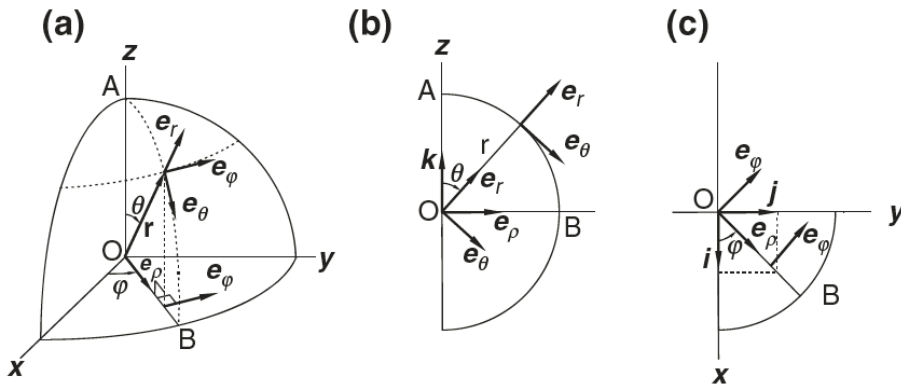
$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = 100\pi + 300\pi = 400\pi.$$

Jelaslah,

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

3.2 Koordinat Bola

Sistem koordinat bola polar lebih sering dikenal dengan sistem koordinat bola. Lokasi sebuah titik dinyatakan dengan (r, θ, φ) seperti ditunjukkan Gambar 3.3, dengan r adalah jarak dari pusat, θ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor r dengan sumbu- z positif yang sering disebut sudut polar, dan φ adalah sudut yang dibentuk oleh sumbu- x positif dengan memproyeksikan r pada bidang- xy , sudut ini dikenal



Gambar 3.3: Koordinat bola. (a) Sebuah titik dinyatakan dengan (r, θ, φ) dengan r adalah jarak dari pusat, θ adalah sudut yang dibentuk oleh vektor r dengan sumbu- z positif dan φ adalah sudut yang dibentuk oleh sumbu- x positif dengan memproyeksikan r pada bidang- xy . Tiga buah vektor satuan e_r, e_θ, e_φ searah dengan bertambahnya r, θ, φ . Vektor satuan tambahan e_ρ berarah pada proyeksi r pada bidang- xy . (b) Vektor satuan e_r dan e_θ dipindahkan ke titik asal untuk mencari hubungannya dengan k dan e_ρ . (c) Dalam bidang- xy e_φ dipindahkan ke titik asal untuk mencari hubungannya dengan e_ρ dan i, j .

sebagai sudut azimut. Hubungan antara kordinat Cartesian dengan koordinat bola ditunjukkan pada Gambar 3.3. (b) dan (c)

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \tag{3.33}$$

dan

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \tan \theta = \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}, \tag{3.34}$$

$$\sin \theta = \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}, \quad \cos \theta = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}, \tag{3.35}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}. \tag{3.36}$$

Gambar 3.3 juga menunjukkan himpunan tiga buah vektor satuan yang saling tegak lurus e_r, e_θ, e_φ yang searah dengan bertambahnya r, θ, φ . Dalam sistem ini, vektor posisi \mathbf{r} adalah

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}} = r\mathbf{e}_r. \tag{3.37}$$

Hubungan antara vektor satuan dalam koordinat bola dan dalam koordinat Cartesian dapat dilihat pada Gambar 3.3.(b). Dalam bidang AOB, kita telah menggambar e_r dan e_θ dari titik asal. Terlihat

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \mathbf{e}_\rho + \cos \theta \mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \mathbf{e}_\rho - \sin \theta \mathbf{k},$$

dengan \mathbf{e}_ρ adalah vektor satuan sepanjang OB. Dalam Gambar 3.3.(c) \mathbf{e}_ρ dan \mathbf{e}_θ digambarkan dari titik asal, jelaslah

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}.\end{aligned}$$

Maka,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Hubungan invers dapat dilihat dari gambar yang sama, atau dapat diperoleh dari persamaan di atas

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{j} &= \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{k} &= \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ membentuk sebuah himpunan ortonormal dan memenuhi hubungan berikut

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = 1, \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_r = 0, \\ \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Sebuah vektor sebarang dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi,\tag{3.41}$$

dengan A_r adalah komponen radial, A_θ komponen polar dan A_φ komponen azimut dari \mathbf{A} . Turunan vektor satuan dapat dengan mudah diperoleh dari (3.38)

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0,\tag{3.42}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k} = \mathbf{e}_\theta,\tag{3.43}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \cos \theta \mathbf{k} = -\mathbf{e}_r,\tag{3.44}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = -\sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{e}_\varphi,\tag{3.45}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = -\cos \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{j} = \cos \theta \mathbf{e}_\varphi,\tag{3.46}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\cos \varphi \mathbf{i} - \sin \varphi \mathbf{j} = -(\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta).\tag{3.47}$$

3.2.1 Operasi Diferensial

Gradien

Operator gradien ∇ dalam koordinat bola diperoleh dengan bantuan (3.39) yaitu

$$\begin{aligned}
 \nabla &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = (\sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) \frac{\partial}{\partial x} \\
 &\quad + (\sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi) \frac{\partial}{\partial y} + (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \frac{\partial}{\partial z} \\
 &= \mathbf{e}_r \left[\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
 &\quad + \mathbf{e}_\theta \left[\cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
 &\quad + \mathbf{e}_\varphi \left[-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right]. \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

Kuantitas dalam kurung dapat dikenali jika kita menggunakan (3.33) dan aturan rantai turunan

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \\
 &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z} \\
 &= r \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} \\
 &= -r \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

Sehingga (3.48) dapat dituliskan sebagai

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{3.52}$$

Diperoleh

$$\nabla r = \mathbf{e}_r, \quad \nabla \theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad \nabla \varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi. \tag{3.53}$$

Divergensi

Divergensi sebuah vektor dalam koordinat bola adalah

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{V} &= \nabla \cdot (V_r \mathbf{e}_r + V_\theta \mathbf{e}_\theta + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \\
 &= \nabla V_r \cdot \mathbf{e}_r + V_r \nabla \cdot \mathbf{e}_r + \nabla V_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta + V_\theta \nabla \cdot \mathbf{e}_\theta \\
 &\quad + \nabla V_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi + V_\varphi \nabla \cdot \mathbf{e}_\varphi. \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

Meskipun divergensi dalam koordinat bola dapat dikerjakan seperti yang kita lakukan dalam koordinat silinder. Lebih mudah jika kita menggunakan turunan dari (3.42)–(3.47),

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{e}_r &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \mathbf{e}_r \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \sin \theta \mathbf{e}_\varphi = \frac{2}{r},\end{aligned}\quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{e}_\theta &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \mathbf{e}_\theta \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot (-\mathbf{e}_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \cos \theta \mathbf{e}_\varphi = \frac{1 \cos \theta}{r \sin \theta},\end{aligned}\quad (3.56)$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{e}_\varphi &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \mathbf{e}_\varphi \\ &= \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi \cdot (-\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) = 0.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Lebih dari itu

$$\nabla V_r \cdot \mathbf{e}_r = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\partial V_r}{\partial r}.\quad (3.58)$$

Dengan cara yang sama,

$$\nabla V_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}, \quad \nabla V_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}.\quad (3.59)$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V} &= \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1 \cos \theta}{r \sin \theta} V_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} V_\varphi.\end{aligned}\quad (3.60)$$

Laplacian

Laplacian dalam koordinat bola dapat dituliskan sebagai

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right).$$

Dengan menganggap $\nabla\Phi$ sebagai sebuah vektor dan menggunakan rumus untuk divergensi, kita mempunyai

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right). \quad (3.61)$$

Sehingga operator Laplacian dapat dituliskan

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (3.62)$$

Curl

Curl sebuah vektor dalam koordinat bola adalah

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \nabla \times (V_r \mathbf{e}_r + V_\theta \mathbf{e}_\theta + V_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \\ &= \nabla V_r \times \mathbf{e}_r + V_r \nabla \times \mathbf{e}_r + \nabla V_\theta \times \mathbf{e}_\theta + V_\theta \nabla \times \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \nabla V_\varphi \times \mathbf{e}_\varphi + V_\varphi \nabla \times \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Kita akan menggunakan turunan dari (3.42)–(3.47) untuk menurunkan rumus curl dalam koordinat bola,

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e}_r &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \times \mathbf{e}_r \\ &= \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi \times \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial\varphi} \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi \times \sin\theta \mathbf{e}_\varphi = 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e}_\theta &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \times \mathbf{e}_\theta \\ &= \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi \times \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial\varphi} \\ &= \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times (-\mathbf{e}_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi \times \cos\theta \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e}_\varphi &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \times \mathbf{e}_\varphi \\ &= \mathbf{e}_r \times \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi \times \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi} \\ &= \frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_\varphi \times (-\sin\theta \mathbf{e}_r + \cos\theta \mathbf{e}_\theta) = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Lebih dari itu,

$$\begin{aligned}\nabla V_r \times \mathbf{e}_r &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right) \times \mathbf{e}_r \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta,\end{aligned}\quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}\nabla V_\theta \times \mathbf{e}_\theta &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \times \mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r,\end{aligned}\quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}\nabla V_\varphi \times \mathbf{e}_\varphi &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right) \times \mathbf{e}_\varphi \\ &= -\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_r,\end{aligned}\quad (3.69)$$

Kombinasikan enam buah suku ini

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{V} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1 \cos \theta}{r \sin \theta} V_\varphi \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} V_\varphi \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} V_\theta \right) \mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (3.70)$$

3.2.2 Elemen Infinitesimal

Dalam koordinat bola, vektor perpindahan infinitesimal antara sebuah titik pada (r, θ, φ) dan pada $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ adalah

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\varphi r \sin \theta d\varphi.\quad (3.71)$$

Perhatikan dari Gambar 3.4 hanya dalam arah \mathbf{e}_r , penambahan $d\mathbf{r}$ hanyalah sebuah elemen panjang. Baik $d\theta$ maupun $d\varphi$ hanyalah sudut infinitesimal. Bahkan keduanya tidak memiliki satuan panjang. Elemen panjang pada arah \mathbf{e}_θ adalah $r d\theta$ dan dalam arah \mathbf{e}_φ adalah $r \sin \theta d\varphi$. Sehingga kita berharap gradien dalam koordinat bola adalah

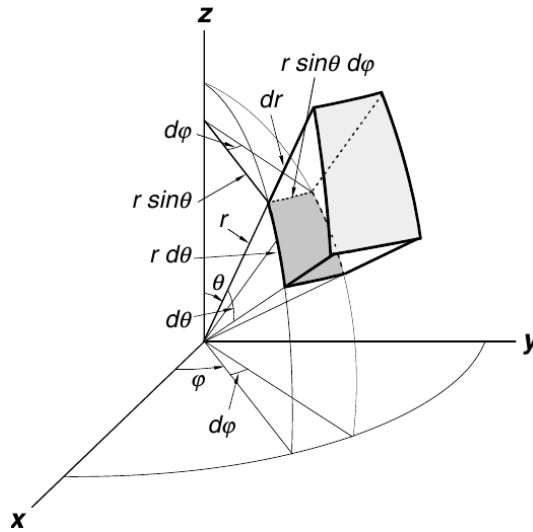
$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

yang merupakan kasus pada (3.52).

Volum elemen infinitesimal adalah hasil perkalian tiga buah perpindahan infinitesimal yang saling tegak lurus

$$dV = (dr)(r d\theta)(r \sin \theta d\varphi) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.\quad (3.72)$$

Selang yang mungkin untuk r adalah dari 0 sampai ∞ , θ dari 0 sampai π dan φ dari 0 sampai 2π . Perhatikan bahwa θ hanya dari 0 sampai π , bukan 2π . Jika sampai 2π maka semua titik dihitung 2 kali.



Gambar 3.4: Elemen diferensial dalam koordinat bola. Panjang diferensial dalam arah θ adalah $r d\theta$. Panjang diferensial dalam arah φ adalah $r \sin\theta d\varphi$. Elemen volum diferensialnya adalah $r^2 \sin^2\theta dr d\theta d\varphi$.

Contoh 3.2.1. Gunakan koordinat bola untuk mencari

$$\nabla r, \quad \nabla \cdot \mathbf{r}, \quad \nabla r^n, \quad \nabla \cdot r^n \mathbf{e}_r, \quad \nabla^2 r^n, \quad \nabla \times f(r) \mathbf{e}_r.$$

Solusi 3.2.1. Karena fungsi ini hanya bergantung r , kita hanya perlu mempertahankan suku yang mengandung variabel r saja

$$\begin{aligned} \nabla r &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} r = \mathbf{e}_r = \hat{\mathbf{r}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{r} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r) = 3, \\ \nabla r^n &= \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} r^n = \mathbf{e}_r n r^{n-1}, \\ \nabla \cdot r^n \mathbf{e}_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r^n) = (n+2)r^{n-1}, \\ \nabla^2 r^n &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} r^n \right) = n \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^{n+1} = n(n+1)r^{n-2}, \\ \nabla \times f(r) \mathbf{e}_r &= \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f(r)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi = 0. \end{aligned}$$

Contoh 3.2.2. Nyatakan $\mathbf{r} \times \nabla$ dalam koordinat bola. (Dalam mekanika kuantum, operator momentum sudut \mathbf{L} didefinisikan sebagai $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, dengan \mathbf{p} adalah operator

momentum linier yaitu $-i\hbar\nabla$.)

Solusi 3.2.2.

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \nabla &= r \mathbf{e}_r \times \left[\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\ &= r \left[\mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \\ &= \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

3.3 Sistem Koordinat Lengkung Umum

3.3.1 Permukaan Koordinat dan Kurva Koordinat

Dalam subbab ini, kita akan membentuk sebuah teori umum tentang sistem koordinat lengkung. Anggap terdapat hubungan satu-satu antara sistem koordinat Cartesian (x, y, z) dan sistem koordinat lengkung lain (u_1, u_2, u_3) . Hal ini berarti (x, y, z) dapat dituliskan dalam u_i ,

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3), \quad (3.73)$$

dan sebaliknya

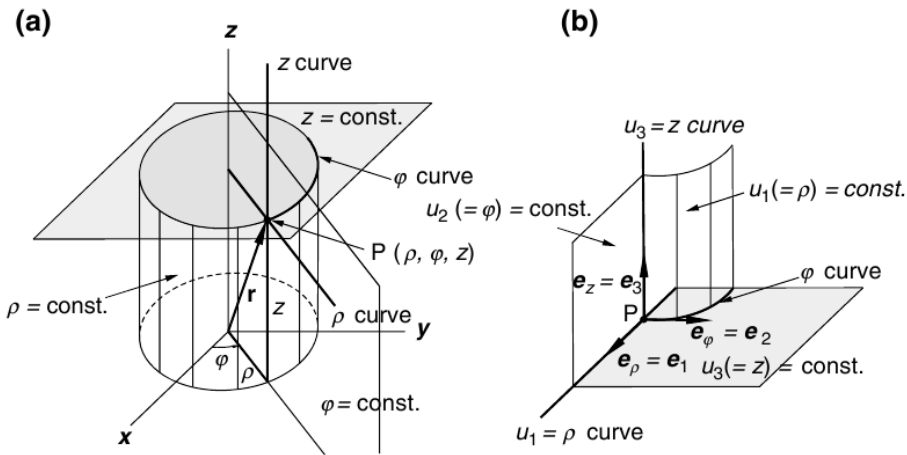
$$u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z). \quad (3.74)$$

Permukaan $u_i = \text{konstanta}$ dinamakan sebagai permukaan koordinat dan perpotongan antara tiga buah permukaan adalah kurva koordinat. Sebagai contoh, jika sistem lengkung adalah sistem koordinat silinder, maka $u_1 = \rho$, $u_2 = \varphi$, $u_3 = z$ seperti pada Gambar 3.5. Sehingga $u_1 = \text{konstanta}$ adalah permukaan silinder, $u_2 = \text{konstanta}$ adalah bidang vertikal dan $u_3 = \text{konstanta}$ adalah bidang horizontal pada gambar. Perpotongan bidang vertikal dan bidang horizontal adalah kurva u_1 yang berupa garis ditunjukkan sebagai kurva ρ . Perpotongan bidang horizontal dengan permukaan silinder adalah kurva u_2 yang berupa lingkaran ditunjukkan sebagai kurva φ . Perpotongan antara silinder dengan bidang vertikal adalah kurva u_1 yang berupa garis vertikal ditunjukkan sebagai kurva z .

Sekarang vektor posisi \mathbf{r} dapat dinyatakan dalam u_i

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3), \quad (3.75)$$

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3. \quad (3.76)$$



Gambar 3.5: Permukaan koordinat dan kurva koordinat sistem koordinat silinder. (a) Permukaan sisi silinder ($\rho = \text{konstanta}$), bidang horizontal ($z = \text{konstanta}$), dan bidang dengan sumbu- z ($\varphi = \text{konstanta}$) merupakan permukaan koordinat. Perpotongannya adalah kurva koordinat. (b) Secara lokal, tiga buah vektor satuan sepanjang kurva koordinat membentuk himpunan basis ortogonal.

Turunan parsial $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1$ berarti perubahan variasi \mathbf{r} terhadap u_1 , sedangkan u_2 dan u_3 dijaga tetap. Sehingga vektor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1$ berada pada permukaan koordinat u_2 dan u_3 dan sehingga sepanjang kurva koordinat u_1 . Hal ini memungkinkan kita mendefinisikan sebuah vektor satuan \mathbf{e}_1 didefinisikan dalam arah kurva u_1

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} / h_1, \tag{3.77}$$

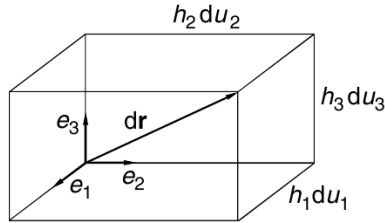
dengan h_1 adalah besar dari $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1$

$$h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|, \tag{3.78}$$

dikenal sebagai faktor skala. Vektor satuan \mathbf{e}_2 dan \mathbf{e}_3 dan faktor skalanya h_2 dan h_3 didefinisikan dengan cara yang sama. Dalam kasus koordinat silinder, \mathbf{e}_1 adalah vektor satuan sepanjang kurva ρ , yang sebelumnya didefinisikan sebagai \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_2 adalah vektor satuan menyinggung kurva φ , yang sebelumnya didefinisikan sebagai \mathbf{e}_φ dan \mathbf{e}_3 adalah vektor satuan sepanjang kurva z , yang sebelumnya didefinisikan sebagai $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$.

Dengan vektor satuan dan faktor skala, vektor perpindahan $d\mathbf{r}$ dari (3.76) dapat dituliskan sebagai

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 h_1 du_1 + \mathbf{e}_2 h_2 du_2 + \mathbf{e}_3 h_3 du_3. \tag{3.79}$$



Gambar 3.6: Elemen volum sebuah sistem koordinat lengkung ortogonal. Sebuah perubahan dalam u_i sebesar du_i menyebabkan perubahan jarak $h_i du_i$ dalam arah \mathbf{e}_i .

Jika vektor satuannya ortogonal, yaitu

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (3.80)$$

maka kurva koordinat saling tegak lurus di tempat perpotongan. Sistem koordinat seperti ini dinamakan koordinat lengkung ortogonal. Kita juga mengasumsikan bahwa sistem koordinat mengikuti aturan tangan kanan, sehingga

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2. \quad (3.81)$$

Sehingga, secara lokal \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 membentuk sebuah vektor basis satuan ortogonal untuk sistem koordinat (u_1, u_2, u_3) , meskipun vektor tersebut dapat berubah arah dari titik ke titik. Dalam sistem koordinat ini, sebuah perubahan dalam u_i sebesar du_i menyebabkan perubahan jarak $h_i du_i$ dalam arah \mathbf{e}_i . Secara sistematis ditunjukkan pada Gambar 3.6.

Dari (3.79) dan Gambar 3.6 panjang busur ds sebuah elemen garis sepanjang $d\mathbf{r}$ diberikan oleh

$$ds = (d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})^{1/2} = [(h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2]^{1/2}. \quad (3.82)$$

Elemen permukaan berarah sepanjang \mathbf{e}_1 yang dibangkitkan oleh perpindahan du_2 dan du_3 adalah

$$\mathbf{e}_1 da = \mathbf{e}_2 h_2 du_2 \times \mathbf{e}_3 h_3 du_3, \quad (3.83)$$

dan dengan cara yang sama untuk elemen permukaan $\mathbf{e}_2 da$ dan $\mathbf{e}_3 da$. Terakhir, elemen volum dV yang disebabkan oleh perpindahan du_1 , du_2 , du_3 diberikan oleh

$$dV = |\mathbf{e}_1 h_1 du_1 \cdot (\mathbf{e}_2 h_2 du_2 \times \mathbf{e}_3 h_3 du_3)| = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3, \quad (3.84)$$

karena $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = 1$.

3.3.2 Operasi Diferensial dalam Sistem Koordinat Lengkung

Gradien

Gradien $\nabla\Phi$ sebuah fungsi skalar adalah sebuah vektor tegak lurus terhadap permukaan $\Phi = \text{konstanta}$, didefinisikan oleh persamaan

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} \quad (3.85)$$

Untuk mencari rumus $\nabla\Phi$ dalam sistem koordinat lengkung, marilah kita asumsikan

$$\nabla\Phi = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3. \quad (3.86)$$

Karena

$$d\mathbf{r} = h_1 du_1\mathbf{e}_1 + h_2 du_2\mathbf{e}_2 + h_3 du_3\mathbf{e}_3,$$

diperoleh

$$\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} = f_1 h_1 du_1 + f_2 h_2 du_2 + f_3 h_3 du_3. \quad (3.87)$$

Di lain pihak

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} du_3. \quad (3.88)$$

Dengan menyamakan dua buah persamaan terakhir

$$f_1 h_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial u_1}, \quad f_2 h_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial u_2}, \quad f_3 h_3 = \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}. \quad (3.89)$$

Sehingga (3.86) menjadi

$$\nabla\Phi = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3}. \quad (3.90)$$

Sehingga operator del dalam koordinat lengkung dapat dituliskan sebagai

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}. \quad (3.91)$$

Secara khusus,

$$\nabla u_1 = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial u_1}{\partial u_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial u_1}{\partial u_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial u_1}{\partial u_3}.$$

Karena u_1, u_2, u_3 adalah variabel bebas

$$\frac{\partial u_1}{\partial u_1} = 1, \quad \frac{\partial u_1}{\partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial u_3} = 0.$$

Maka

$$\nabla u_1 = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1}. \quad (3.92)$$

Dengan cara yang sama

$$\nabla u_2 = \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2}, \quad \nabla u_3 = \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3}. \quad (3.93)$$

Divergensi

Rumus divergensi sebuah medan vektor $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ dalam koordinat lengkung dapat dihitung langsung dengan operator del

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3),$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A_1\mathbf{e}_1 &= \nabla \cdot A_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \nabla \cdot A_1h_2h_3(\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\ &= (\nabla A_1h_2h_3) \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) + A_1h_2h_3 \nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3). \end{aligned}$$

Suku $\nabla \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) = \nabla \times \nabla u_2 \cdot \nabla u_3 - \nabla \times \nabla u_3 \cdot \nabla u_2$ hilang karena $\nabla \times \nabla f = 0$. Sehingga,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A_1\mathbf{e}_1 &= (\nabla A_1h_2h_3) \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \\ &= (\nabla A_1h_2h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{h_2h_3} = (\nabla A_1h_2h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}. \end{aligned}$$

Menggunakan operator del (3.91), kita mempunyai

$$\begin{aligned} \nabla(A_1h_2h_3) &= \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_3}, \\ (\nabla A_1h_2h_3) \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3} &= \frac{1}{h_1h_2h_3} \frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\nabla \cdot A_1\mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_1h_2h_3} \frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1}. \quad (3.94)$$

Dengan rumus yang mirip

$$\begin{aligned} \nabla \cdot A_2\mathbf{e}_2 &= \frac{1}{h_1h_2h_3} \frac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial u_2}, \\ \nabla \cdot A_3\mathbf{e}_3 &= \frac{1}{h_1h_2h_3} \frac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial u_3}. \end{aligned}$$

kita memperoleh

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3} \left[\frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial u_3} \right]. \quad (3.95)$$

Laplacian

Laplacian diperoleh dari definisinya

$$\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi.$$

Karena $\nabla\Phi$ diberikan oleh

$$\nabla\Phi = \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3},$$

divergensi vektor ini

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \Phi = & \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} h_2 h_3 \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} h_3 h_1 \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} h_1 h_2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Jadi

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right]. \quad (3.96)$$

Curl

Curl sebuah medan vektor dalam koordinat lengkung dapat dihitung secara langsung

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3), \\ \nabla \times A_1 \mathbf{e}_1 &= \nabla \times A_1 h_1 \nabla u_1 = \nabla(A_1 h_1) \times \nabla u_1 + A_1 h_1 \nabla \times \nabla u_1. \end{aligned}$$

Karena $\nabla \times \nabla u_1 = 0$,

$$\nabla \times A_1 \mathbf{e}_1 = \nabla(A_1 h_1) \times \nabla u_1 = \nabla(A_1 h_1) \times \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}$$

Sekarang

$$\begin{aligned} \nabla(A_1 h_1) &= \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3}, \\ \nabla(A_1 h_1) \times \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} &= -\mathbf{e}_3 \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\nabla \times A_1 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3}.$$

Dengan rumus yang mirip untuk $\nabla \times A_2 \mathbf{e}_2$ dan $\nabla \times A_3 \mathbf{e}_3$, kita mempunyai

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{e}_1 \left[\frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_3} \right] \\ &+ \mathbf{e}_2 \left[\frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_1} \right] \\ &+ \mathbf{e}_3 \left[\frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} \right]. \end{aligned}$$

Rumus ini dapat dinyatakan dalam bentuk yang simetrik sehingga mudah diingat

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \frac{h_1 \mathbf{e}_1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_3} \right] + \frac{h_2 \mathbf{e}_2}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_1} \right] \\ &\quad + \frac{h_3 \mathbf{e}_3}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}\quad (3.97)$$

Contoh 3.3.1. Untuk koordinat silinder $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, dengan $u_1 = \rho$, $u_2 = \varphi$, $u_3 = z$, (a) Carilah faktor skala h_1 , h_2 dan h_3 . (b) Carilah gradien, divergensi, Laplacian dan curl dalam koordinat silinder dari rumus umum yang diturunkan pada subbab ini.

Solusi 3.3.1. Karena $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dan x, y, z adalah fungsi dari u_1, u_2, u_3 , jadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} &= \frac{\partial x}{\partial u_i} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u_i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u_i} \mathbf{k}, \\ h_i &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2 \right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Sekarang

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u_1} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, & \frac{\partial y}{\partial u_1} &= \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi, & \frac{\partial z}{\partial u_1} &= \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial u_2} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi, & \frac{\partial z}{\partial u_2} &= \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} &= \frac{\partial x}{\partial z} = 0, & \frac{\partial y}{\partial u_3} &= \frac{\partial y}{\partial z} = 0, & \frac{\partial z}{\partial u_3} &= \frac{\partial z}{\partial z} = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_1 &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{1/2} = 1, \\ h_2 &= (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} = \rho, \\ h_3 &= (1)^{1/2} = 1.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\nabla \Phi &= \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \\ &= \mathbf{e}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(A_\rho \rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(A_z \rho)}{\partial z} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\varphi) \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi \\ &\quad + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Contoh 3.3.2. Untuk koordinat bola $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \varphi$, dan $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$. (a) Carilah faktor skala h_1 , h_2 dan h_3 . (b) Carilah gradien, divergensi, Laplacian dan curl dalam koordinat silinder dari rumus umum yang diturunkan pada subbab ini.

Solusi 3.3.2. (a)

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Sekarang

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u_1} &= \frac{\partial x}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi, & \frac{\partial y}{\partial u_1} &= \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \sin \varphi, & \frac{\partial z}{\partial u_1} &= \frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta, \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi, & \frac{\partial y}{\partial u_2} &= \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \sin \varphi, & \frac{\partial z}{\partial u_2} &= \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial u_3} &= \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \sin \theta \cos \varphi, & \frac{\partial z}{\partial u_3} &= \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_1 &= (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta)^{1/2} = 1, \\ h_2 &= (r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta)^{1/2} = r, \\ h_3 &= (r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^{1/2} = r \sin \theta.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\nabla\Phi &= \mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} \\ &= \mathbf{e}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}.\end{aligned}$$

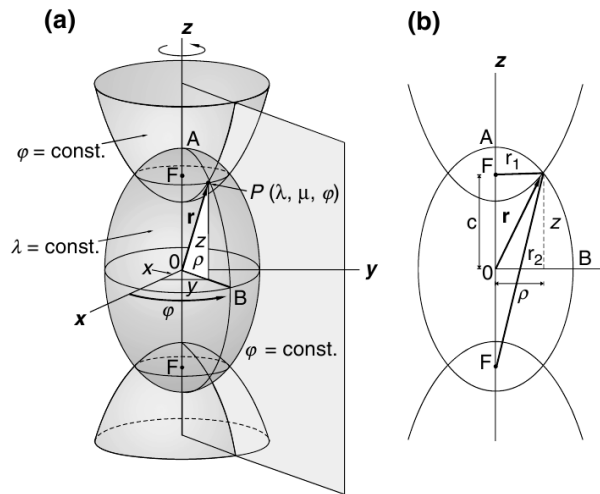
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial(A_r r^2 \sin\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta r \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_\varphi r)}{\partial\varphi} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} (A_\varphi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial u_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1 h_1 & A_2 h_2 & A_3 h_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin\theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} (r \sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi} (r A_\theta) \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} (A_r) - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin\theta A_\varphi) \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta} (A_r) \right) \mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}$$

3.4 Koordinat Eliptikal

Terdapat banyak sistem koordinat. Dalam buku klasik Morse and Feshbach, "Methods of Theoretical Physics," lebih dari 13 sistem koordinat dibicarakan. Masing-masing sesuai untuk persoalan khusus. Tetapi karena adanya komputer berkecepatan tinggi, kebutuhan sistem koordinat tersebut berkurang. Dalam subbab ini, kita akan membicarakan sistem koordinat eliptikal sebagai satu contoh sistem koordinat khusus. Sistem koordinat ini bermanfaat dalam persoalan dua buah pusat dalam molekul diatomik.



Gambar 3.7: Sistem koordinat eliptikal. (a) Sistem koordinat dibangkitkan oleh sebuah elips, dua buah hiperbola dan sebuah bidang yang mengandung sumbu mayor elips. (b) Dua buah elips konfokal diberikan oleh $r_2 + r_1 = \text{konstanta}$, dan dua buah konfokal hiperbola diberikan oleh $r_2 - r_1 = \text{konstanta}$.

3.4.1 Permukaan Koordinat

Koordinat eliptikal adalah famili dari elips dan hiperbola dalam dua dimensi. Dengan merotasikannya pada sumbu mayor elips, permukaan bola prolate dan hiperboloid dibangkitkan. Permukaan ini bersama-sama dengan bidang yang mengandung sumbu mayor membentuk sistem koordinat tiga dimensi yang disebut dengan koordinat eliptikal. Permukaan koordinat ditunjukkan pada Gambar 3.7.(a). Misalkan r_1 dan r_2 adalah jarak dari dua buah titik fokus yang dipisahkan sejauh $2c$ pada sumbu- z seperti pada Gambar 3.7.(b). Sebuah titik ditentukan oleh r_1 dan r_2 , jarak dari dua buah titik fokus, dan sudut φ pada sumbu- z . Koordinat sebuah titik adalah λ , μ dan φ dengan

$$\lambda = \frac{r_2 + r_1}{2c}, \quad (3.98)$$

$$\mu = \frac{r_2 - r_1}{2c}. \quad (3.99)$$

Untuk $\lambda = \text{konstanta}$, (3.98) memetakan sebuah bola prolate dalam ruang, pada $\varphi = \text{bidang konstan sebarang}$, ini hanyalah sebuah elips seperti ditunjukkan Gambar 3.7.(b). hal ini dapat dilihat sebagai berikut:

$$r_2 = [(z + c)^2 + \rho^2]^{1/2}, \quad (3.100)$$

$$r_1 = [(z - c)^2 + \rho^2]^{1/2}, \quad (3.101)$$

$$r_2 + r_1 = 2c\lambda. \quad (3.102)$$

Kuadratkan kedua ruas $r_2 = 2c\lambda - r_1$ dan kumpulkan suku-sukunya, menjadi

$$z = c\lambda^2 - \lambda r_1.$$

Kuadratkan lagi kedua ruas

$$(\lambda^2 - 1)z^2 + \lambda^2 \rho^2 = c^2 \lambda^2 (\lambda^2 - 1).$$

Persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk standar elips

$$\frac{z^2}{c^2 \lambda^2} + \frac{\rho^2}{c^2 (\lambda^2 - 1)} = 1, \quad (3.103)$$

yang memotong sumbu- z pada $\pm c\lambda$, sumbu ρ pada $\pm c(\lambda^2 - 1)^{1/2}$. Selang λ jelaslah $\infty \geq \lambda \geq 1$. Ketika $\lambda = 1$, elips menjadi sebuah garis yang menghubungkan dua buah titik fokus.

Mulai dengan

$$r_2 - r_1 = 2c\mu$$

dan mengikuti prosedur yang sama, kita peroleh

$$\frac{z^2}{c^2 \mu^2} + \frac{\rho^2}{c^2 (\mu^2 - 1)} = 1,$$

yang merupakan bentuk yang sama dengan elips. Tetapi dalam kasus ini, terlihat dari Gambar 3.7.(b) bahwa

$$r_1 + 2c \geq r_2,$$

yang sederhananya mengatakan jumlah dua buah sisi segitiga haruslah lebih besar dari sisi ketiga. Mengikuti hal ini

$$2c \geq r_2 - r_1 = 2c\mu.$$

Sehingga $1 \geq \mu$. Jadi persamaannya terlihat dalam bentuk hiperbola:

$$\frac{z^2}{c^2 \mu^2} - \frac{\rho^2}{c^2 (1 - \mu^2)} = 1, \quad (3.104)$$

yang memotong sumbu- z pada $\pm c\mu$. Terdapat dua buah lembaran hiperbola, satunya untuk nilai μ positif dan satu lagi untuk μ negatif. Sehingga selang untuk μ adalah $1 \geq \mu \geq -1$. Ketika $\mu = 0$, hiperbola menjadi sebuah garis lurus yang tegak lurus sumbu- z melewati titik asal. Ketika $\mu = 1$, hiperbola ini menjadi sebuah garis dari $z = c$ sepanjang sumbu- z menuju ∞ . Ketika $\mu = -1$, hiperbola ini menjadi sebuah garis dari $z = -c$ sepanjang sumbu- z menuju $-\infty$

Permukaan hiperboloid dibangkitkan dengan merotasikan hiperbola ini pada sumbu $-z$. Sudut rotasinya memiliki selang $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

3.4.2 Hubungan dengan Koordinat Persegi

Transformasi antara (x, y, z) dan (λ, μ, φ) dapat dilihat pada (3.100) dan (3.101):

$$\begin{aligned} r_2^2 &= z^2 + 2zc + c^2 + \rho^2, \\ r_1^2 &= z^2 - 2zc + c^2 + \rho^2. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$r_2^2 - r_1^2 = 4zc.$$

Karena

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = (2c\mu)(2c\lambda),$$

sehingga $4zc = 4c^2\mu\lambda$ yang memberikan

$$z = c\mu\lambda. \quad (3.105)$$

Masukkan pada (3.103), kita mempunyai

$$\frac{c^2\mu^2\lambda^2}{c^2\lambda^2} + \frac{\rho^2}{c^2(\lambda^2 - 1)} = 1,$$

yang memberikan

$$\rho^2 = c^2(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2). \quad (3.106)$$

Sekarang dari Gambar 3.7. (a)

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (3.107)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} x &= c[(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)]^{1/2} \cos \varphi, \\ y &= c[(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)]^{1/2} \sin \varphi, \\ z &= c\mu\lambda. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Dari vektor posisi

$$\mathbf{r} = x(\lambda, \mu, \varphi)\mathbf{i} + y(\lambda, \mu, \varphi)\mathbf{j} + z(\lambda, \mu, \varphi)\mathbf{k}, \quad (3.109)$$

kita dapat mencari vektor satuan sepanjang kurva koordinat λ, μ, φ . Tiga buah vektor satuan didefinisikan sebagai

$$\mathbf{e}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} / h_\lambda, \quad \mathbf{e}_\mu = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} / h_\mu, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} / h_\varphi. \quad (3.110)$$

Karena

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} &= \frac{\partial x}{\partial \lambda} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \mathbf{k} = \frac{c\lambda(1 - \mu^2)}{[(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)]^{1/2}} \cos \varphi \mathbf{i} \\ &+ \frac{c\lambda(1 - \mu^2)}{[(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)]^{1/2}} \sin \varphi \mathbf{j} + c\mu \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} &= \frac{\partial x}{\partial \mu} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \mu} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \mu} \mathbf{k} = \frac{-c\lambda(\lambda^2 - 1)}{[(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)]^{1/2}} \cos \varphi \mathbf{i} \\ &+ \frac{-c\lambda(\lambda^2 - 1)}{[(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)]^{1/2}} \sin \varphi \mathbf{j} + c\lambda \mathbf{k},\end{aligned}\quad (3.112)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \mathbf{k} = -c[(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)]^{1/2} \sin \varphi \mathbf{i} \\ &+ [(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)]^{1/2} \cos \varphi \mathbf{j},\end{aligned}\quad (3.113)$$

faktor skalanya

$$\begin{aligned}h_\lambda &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \right| = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\frac{c^2(\lambda^2 - \mu^2)}{1 - \mu^2} \right]^{1/2},\end{aligned}\quad (3.114)$$

$$h_\mu = \left[\frac{c^2(\lambda^2 - \mu^2)}{1 - \mu^2} \right]^{1/2}, \quad h_\varphi = [c^2(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)]^{1/2}.\quad (3.115)$$

Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa

$$\mathbf{e}_\lambda \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\mu, \quad \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\lambda, \quad \mathbf{e}_\mu \times \mathbf{e}_\lambda = \mathbf{e}_\varphi.\quad (3.116)$$

Sehingga \mathbf{e}_λ , \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_μ membentuk himpunan basis ortogonal. Perhatikan bahwa dalam sistem tangan kanan urutannya adalah $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\mu)$ bukan $(\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\varphi)$.

Elemen volum dalam sistem ini adalah

$$dV = h_\lambda h_\varphi h_\mu \, d\lambda \, d\varphi \, d\mu = c^3(\lambda^2 - \mu^2) \, d\lambda \, d\varphi \, d\mu.\quad (3.117)$$

Contoh 3.4.1. Gunakan koordinat eliptikal untuk mencari volum bola prolate yang dibangkitkan oleh elips berotasi

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{\rho^2}{b^2} = 1$$

terhadap sumbu mayornya z .

Solusi 3.4.1. Dalam koordinat eliptikal, elips memiliki bentuk

$$\frac{z^2}{c^2\lambda^2} + \frac{\rho^2}{c^2(\lambda^2 - 1)} = 1,$$

dengan $2c$ adalah jarak antara dua buah titik fokus. Untuk mencari batas atas λ , kita perhatikan bahwa $a^2 = c^2\lambda^2$ atau

$$\lambda = a/c$$

Selanjutnya,

$$b^2 = c^2(\lambda^2 - 1) = c^2[(a/c)^2 - 1] = a^2 - c^2.$$

Maka volumenya diberikan oleh

$$\begin{aligned} V &= \iiint dV = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_1^{a/c} c^3(\lambda^2 - \mu^2) d\lambda d\mu d\varphi \\ &= 2\pi c^3 \left[\int_{-1}^1 d\mu \int_1^{a/c} \lambda^2 d\lambda - \int_1^{a/c} d\lambda \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu \right], \\ \int_{-1}^1 d\mu \int_1^{a/c} \lambda^2 d\lambda &= \frac{2}{3} \left[\left(\frac{a}{c}\right)^3 - 1 \right], \quad \int_1^{a/c} d\lambda \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = \frac{2}{3} \left[\frac{a}{c} - 1 \right]. \\ V &= \frac{4\pi}{3} c^3 \left[\left(\frac{a}{c}\right)^3 - \frac{a}{c} \right] = \frac{4\pi}{3} a(a^2 - c^2) = \frac{4\pi}{3} ab^2. \end{aligned}$$

Contoh 3.4.2. Hitunglah integral berikut terhadap seluruh ruang

$$I = \iiint e^{-r_1} e^{-r_2} dV,$$

dengan r_1 dan r_2 adalah jarak dari dua buah titik tetap yang dipisahkan jarak R . (Ini ditemukan dalam integral overlap pada molekul ion H_2^+).

Solusi 3.4.2.

$$I = \iiint e^{-r_1} e^{-r_2} dV = \iiint e^{-(r_1+r_2)} dV$$

Dengan koordinat eliptikal

$$r_1 + r_2 = 2c\lambda = R\lambda,$$

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{R}{2}\right)^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_1^{\infty} e^{-R\lambda}(\lambda^2 - \mu^2) d\lambda d\mu d\varphi \\ &= \left(\frac{R}{2}\right)^3 2\pi \left[\int_{-1}^1 d\mu \int_1^{\infty} e^{-R\lambda} \lambda^2 d\lambda - \int_1^{\infty} e^{-R\lambda} d\lambda \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu \right] \\ &= \pi \left(1 + R + \frac{1}{3}R^2 \right) e^{-R}. \end{aligned}$$

3.4.3 Koordinat Bola Prolate

Transformasi (3.108) dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih kompak tetap dengan penggantian variabel lain. Dengan menggunakan identitas

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta, \quad \sinh^2 \eta = 1 + \cosh^2 \eta,$$

kita dapat memilih

$$\lambda = \cosh \eta, \quad \mu = \cos \theta. \quad (3.118)$$

Dengan variabel ini, transformasi (3.108) menjadi

$$\begin{aligned} x &= c \sinh \eta \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= c \sinh \eta \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= c \cosh \eta \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Himpunan koordinat (η, θ, φ) dikenal sebagai sistem koordinat bola prolate. Selang η adalah $0 \leq \eta \leq \infty$, selang θ adalah $0 \leq \theta \leq \pi$. Faktor skala sistem ini

$$h_\eta = c (\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad (3.120)$$

$$h_\theta = h_\eta, \quad h_\varphi = c \sinh \eta \sin \theta. \quad (3.121)$$

Elemen volum sistem ini

$$dV = c^3 (\sinh^3 \eta \sin \theta + \sin^3 \theta \sinh \eta) d\eta d\theta d\varphi.$$

Perhatikan bahwa $h_\eta h_\theta h_\varphi \neq h_\lambda h_\varphi h_\mu$, karena $d\lambda d\mu$ tidak sama dengan $d\eta d\theta$.

3.5 Integral Lipat

Sejauh ini kita telah melihat bagaimana mencari elemen permukaan dan elemen luas untuk sebuah integral lipat dalam sistem koordinat ortogonal. Dalam subbab ini, kita akan membuktikan bahwa mengikuti alasan yang sama, metode ini dapat juga digunakan untuk perubahan variabel sebarang dalam integral lipat, tanpa memperhatikan koordinat barunya ortogonal atau tidak.

3.5.1 Jacobian untuk Integral Lipat Dua

Perhatikan integral lipat dua dalam koordinat Cartesian $\iint_S f(x, y) da$ dengan elemen luas da hanyalah $dx dy$. Sangat sering variabel integrasi (x, y) bukan yang paling sesuai untuk menghitung integral. Kadang kita perlu mendefinisikan integral lipat dua dalam pasangan koordinat lengkung umum.

Misalkan koordinat lengkungnya (u, v) dan terdapat transformasi satu-satu antara (x, y) dengan (u, v) :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \quad (3.122)$$

Vektor posisi dari titik asal ke sebuah titik pada S adalah

$$\mathbf{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j}. \quad (3.123)$$

Sehingga, \mathbf{r} dapat juga dipandang sebagai sebuah fungsi koordinat lengkung, yaitu $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Jadi,

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv. \quad (3.124)$$

Sekarang $(\partial \mathbf{r} / \partial u) du$ adalah sebuah vektor infinitesimal sepanjang garis dengan v pada $\mathbf{r}(u, v)$ dijaga konstan dan $(\partial \mathbf{r} / \partial v) dv$ adalah sebuah vektor infinitesimal sepanjang garis dengan u dijaga konstan. Vektor tersebut mungkin tidak ortogonal, luas paralelogram yang dibentuk diberikan oleh perkalian silangnya

$$da = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv. \quad (3.125)$$

Dari (3.123)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j}, \quad (3.126)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j}. \quad (3.127)$$

Sehingga perkalian silang dua buah vektor adalah

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (3.128)$$

Determinan terakhir dikenal sebagai determinan Jacobian (atau hanya Jacobian) dituliskan sebagai $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$,

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (3.129)$$

Dari (3.125) bahwa elemen luas sama dengan nilai mutlak Jacobian dikalikan $du dv$

$$da = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv. \quad (3.130)$$

Sehingga integral lipat duanya dapat dituliskan sebagai

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv. \quad (3.131)$$

Integran pada ruas kanan adalah fungsi dari u dan v . Sekarang anggap kita ingin mengubahnya sebagai sebuah integral terhadap x dan y , kita harus mempunyai

$$\iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = \iint_S f(x, y) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} dx dy$$

Ruas kanan persamaan harus identik dengan ruas kiri (3.131). Jadi

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1. \quad (3.132)$$

Notasi ini sangat berguna. Kadang kita memerlukan $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, tetapi $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ lebih mudah dihitung. Dalam kasus ini, kita bisa memilih

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right]^{-1}.$$

Sekarang kita harus berhati-hati untuk tidak menyatakan $dxdy$ sama dengan $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$. Keduanya sama hanya dalam tanda integral yaitu elemen area $dxdy$ dapat dirubah dengan $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$, yang diberikan oleh luas S yang dilingkupi oleh (x, y) dan juga oleh (u, v) . Secara lokal keduanya tidak bisa sama.

Dari (3.132) kita mempunyai

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad (3.133)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad (3.134)$$

Jika kita kalikan dx dengan dy , jelaslah tidak sama dengan $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$.

Transformasi diferensial secara identik dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (J) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}, \quad (3.135)$$

dengan (J) dikenal sebagai matriks Jacobian. Matriks ini berhubungan dengan determinan Jacobian $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$. Determinan Jacobian dan matriks Jacobian ditemukan pertama kali oleh matematikawan Jerman Carl Jacobi (1804-1851). Keduanya sangat berguna, tetapi kita jangan menjadi bingung olehnya.

3.5.2 Jacobian untuk Integral Lipat Tiga

Definisi untuk integral lipat tiga $\iiint_V f(x, y, z) dV$ pada sebuah daerah V analog dengan definisi untuk integral lipat dua. Jika x, y, z adalah koordinat Cartesian, maka $dV = dx dy dz$, kadang dalam integral lipat tiga kita lebih mudah menghitungnya dalam koordinat lengkung u_1, u_2, u_3 . Misalkan

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3), \quad (3.136)$$

dan vektor posisi

$$\mathbf{r} = x(u_1, u_2, u_3)\mathbf{i} + y(u_1, u_2, u_3)\mathbf{j} + z(u_1, u_2, u_3)\mathbf{k}, \quad (3.137)$$

maka

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3. \quad (3.138)$$

Turunan parsial $(\partial \mathbf{r} / \partial u_1)$ adalah laju variasi \mathbf{r} dengan u_2 dan u_3 dijaga tetap. Sehingga $(\partial \mathbf{r} / \partial u_1) du_1$ adalah sebuah vektor infinitesimal sepanjang koordinat kurva u_1 . Dengan cara yang sama $(\partial \mathbf{r} / \partial u_2) du_2$ dan $(\partial \mathbf{r} / \partial u_3) du_3$ masing-masing merupakan vektor sepanjang koordinat kurva u_2 dan u_3 . Tanpa memperhatikan apakah ketiganya ortogonal atau tidak, volume paralelepiped yang dibentuk oleh tiga buah vektor ini sama dengan perkalian skalarnya

$$dV = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 \right). \quad (3.139)$$

Dari (3.137)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = \frac{\partial x}{\partial u_1} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u_1} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u_1} \mathbf{k}. \quad (3.140)$$

Dengan rumus yang mirip untuk $\partial \mathbf{r} / \partial u_2$ dan $\partial \mathbf{r} / \partial u_3$, perkalian skalarnya dapat dituliskan sebagai

$$dV = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} du_1 du_2 du_3. \quad (3.141)$$

Determinan Jacobiannya dapat dituliskan sebagai

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x}{\partial u_3} & \frac{\partial y}{\partial u_3} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix}. \quad (3.142)$$

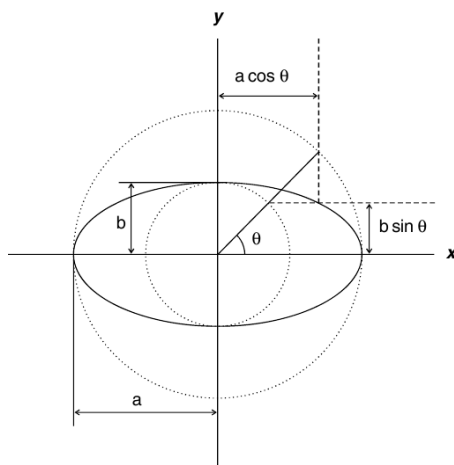
Sehingga jika sebuah daerah dilingkupi x, y, z dan u_1, u_2, u_3 sama, maka

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V F(u_1, u_2, u_3) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} du_1 du_2 du_3, \quad (3.143)$$

dengan $F(u_1, u_2, u_3) = f(x(u_1, u_2, u_3), y(u_1, u_2, u_3), z(u_1, u_2, u_3))$.

Kita juga katakan bahwa dapat dibuktikan dengan induksi integral lipat dengan n variabel dapat ditransformasikan dengan cara yang sama, yaitu

$$\begin{aligned} & \iiint \cdots \int_V f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \iiint \cdots \int_V F(u_1, u_2, \dots, u_n) \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} du_1 du_2 \cdots du_n. \end{aligned} \quad (3.144)$$



Gambar 3.8: Bentuk parametrik sebuah elips. Secara parametrik sebuah elips dapat dituliskan $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$.

Contoh 3.5.1. Hitunglah integral

$$I = \iint x^2 y^2 \, dx \, dy$$

pada interior sebuah elips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Solusi 3.5.1. Koordinat sebuah titik pada elips secara parametrik dapat dituliskan

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta,$$

karena

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \theta}{b^2} = 1.$$

Hal ini ditunjukkan pada Gambar 3.8. Sebarang titik di dalam elips dapat dinyatakan sebagai

$$x = \gamma a \cos \theta, \quad y = \gamma b \sin \theta,$$

dengan $\gamma < 1$. Sehingga, kita dapat mengambil γ dan θ sebagai koordinat lengkung. (Perhatikan bahwa elips dengan $\gamma = \text{konstanta}$, dan garis lurus dengan $\theta = \text{konstanta}$ tidak ortogonal kecuali $a = b$.) Sehingga integralnya dapat dituliskan sebagai

$$I = \iint (\gamma a \cos \theta)^2 (\gamma b \sin \theta)^2 \frac{\partial(x, y)}{\partial(\gamma, \theta)} \, d\gamma \, d\theta$$

dengan Jacobian diberikan oleh

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\gamma, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \gamma} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & b \sin \theta \\ -\gamma a \sin \theta & \gamma b \cos \theta \end{vmatrix} = \gamma ab.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\gamma a \cos \theta)^2 (\gamma b \sin \theta)^2 \gamma ab \, d\gamma \, d\theta \\ &= a^3 b^3 \int_0^1 \gamma^5 \, d\gamma \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, d\theta = a^3 b^3 \left(\frac{1}{6}\right) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24} a^3 b^3. \end{aligned}$$

Contoh 3.5.2. Hitunglah integral

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^2 + y^2}{1 + (x^2 - y^2)} \exp(-2xy) \, dx \, dy$$

dengan mengganti variabel

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Solusi 3.5.2. Perhatikan bahwa selang u adalah $-\infty$ ke ∞

$$I = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 + y^2}{1 + (x^2 - y^2)} \exp(-2xy) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \, du \, dv.$$

Jacobian $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ tidak mudah dihitung, tetapi

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2).$$

Sehingga

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right]^{-1} = \frac{1}{4(x^2 + y^2)}.$$

Jadi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 + y^2}{1 + (x^2 - y^2)} \exp(-2xy) \frac{1}{4(x^2 + y^2)} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + (x^2 - y^2)} \exp(-2xy) \, du \, dv \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + u^2} \exp(-v) \, du \, dv = \frac{1}{4} \int_0^\infty \exp(-v) \, dv \times 2 \int_0^\infty \frac{1}{1 + u^2} \, du \\ &= \frac{1}{4} [-\exp(-v)]_0^\infty 2 [\tan^{-1} u]_0^\infty = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3.6 Latihan

1. Nyatakan vektor $\mathbf{v} = 2x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ dalam koordinat silinder.

Jawab. $\mathbf{v} = (2\rho \cos^2 \varphi - z \sin \varphi)\mathbf{e}_\rho - (2\rho \cos \varphi \sin \varphi - z \cos \varphi)\mathbf{e}_\varphi + \rho \sin \varphi \mathbf{e}_z$.

2. Carilah curl \mathbf{A} dengan $\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \ln(1/\rho)$ dalam koordinat silinder.

Jawab. $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho}$. (Vektor potensial magnetik sebuah kawat panjang membawa sebuah arus I dalam arah z adalah $\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \frac{\mu I}{2\pi} \ln(1/\rho)$. Medan magnetnya diberikan oleh $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu I}{2\pi} \ln(1/\rho)$.)

3. Tunjukkan bahwa $\ln \rho$ memenuhi persamaan Laplace ($\nabla^2 \ln \rho = 0$), (a) gunakan koordinat silinder, (b) gunakan koordinat bola ($(\rho = r \sin \theta)$.) (c) gunakan koordinat Cartesian ($\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$).
4. Tunjukkan bahwa $1/r$ memenuhi persamaan Laplace ($\nabla^2(1/r) = 0$) untuk $r \neq 0$,. (a) Dengan koordinat silinder ($r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$), (b) dengan koordinat bola, (c) dengan koordinat Cartesian ($r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$).

5. (a) Tunjukkan dalam koordinat silinder

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{e}_\rho \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{e}_\varphi \rho \frac{d\varphi}{dt} + \mathbf{e}_z \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{ds}{dt} = \left[\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \left(\rho \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2}$$

dengan ds adalah panjang busur diferensial.

- (b) Carilah panjang sebuah spiral yang secara parametrik dinyatakan dengan $\rho = a$, $\varphi = t$, $z = bt$ dari $t = 0$ sampai $t = 5$.

Jawab. $5(a^2 + b^2)^{1/2}$.

6. Dengan medan vektor \mathbf{A} yang diberikan oleh $\mathbf{A} = \rho \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z$ dalam koordinat silinder. (a) Buktikan bahwa $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. (b) Carilah potensial skalar Φ sedemikian rupa sehingga $\nabla \Phi = \mathbf{A}$.

Jawab. $\frac{1}{2}\rho^2 + z$

7. Gunakan elemen volum infinitesimal ΔV dari Gambar 3.2 dan definisi divergensi

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

untuk menurunkan rumus divergensi dalam sistem koordinat silinder.

Petunjuk: Carilah enam buah elemen permukaan ΔV dan jumlahkan integral

permukaan yang berlawanan. Sebagai contoh

$$\begin{aligned} \iint_{kiri} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da + \iint_{kanan} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da &= -F_\rho(\rho, \varphi, z) \rho \, d\varphi \, dz \\ &+ F_\rho(\rho + d\rho, \varphi, z)(\rho + d\rho) d\varphi \, dz = \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) d\rho \, d\varphi \, dz. \end{aligned}$$

Dengan dua buah pasangan lainnya identik dengan (3.23).

8. Sebuah partikel bergerak di dalam ruang. Buktikan bahwa komponen kecepatan dan percepatannya dalam koordinat bola adalah

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r}, & v_\theta &= r\dot{\theta}, & v_\varphi &= r \sin \theta \dot{\varphi}, \\ a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2, \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \cos \theta \sin \theta \dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \sin \theta \dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

9. Mulai dengan rumus $\nabla\Phi$ dalam koordinat bola, nyatakan $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ dalam $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, kemudian samakan $\nabla\Phi$ dalam koordinat Cartesian. Dalam cara ini, buktikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \cos \theta \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \cos \theta \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

10. Gunakan elemen volum inifinitesimal ΔV dari Gambar 3.4 dan definisi divergensi

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\Delta V} \oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

untuk menurunkan rumus divergensi dalam sistem koordinat bola.

11. Carilah rumus Laplacian ∇^2 dalam koordinat bola dengan mentransformasikannya secara langsung $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ke dalam koordinat bola menggunakan hasil soal sebelumnya.

12. Tunjukkan bahwa tiga buah bentuk $\nabla^2\Phi(r)$ ekuivalen:

$$(a) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} \Phi(r) \right], \quad (b) \frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \Phi(r), \quad (c) \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\Phi(r)].$$

13. (a) Buktikan bahwa medan vektor

$$\mathbf{F} = \left(A - \frac{B}{r^3} \right) \cos \theta \mathbf{e}_r - \left(A + \frac{B}{2r^3} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

tidak berotasi ($\nabla \times \mathbf{F} = 0$).

(b) Carilah potensial skalar Φ sehingga $\nabla\Phi = \mathbf{F}$.

(c) Buktikan bahwa Φ memenuhi persamaan Laplace $\nabla^2\Phi = 0$.

Jawab. $\Phi = \left(Ar + \frac{B}{2r^2} \right) \cos \theta$.

14. Gunakan koordinat bola untuk menghitung integral berikut terhadap sebuah bola berjari-jari R berpusat di tengahnya

$$(a) \iiint dV, \quad (b) \iiint x^2 dV, \quad (c) \iiint y^2 dV, \quad (d) r^2 dV.$$

Jawab. $\frac{4\pi}{3}R^3, \frac{4\pi}{15}R^3, \frac{4\pi}{15}R^3, \frac{4\pi}{5}R^3$.

15. Misalkan

$$L = -i \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

Buktikan bahwa

(a) $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{L} = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$,

(b) $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$. Hal ini adalah operator momentum sudut L_z, L^2 dalam mekanika kuantum dengan $\hbar = 1$.

16. Carilah luas permukaan Bumi yang berada di sebelah utara garis 45° lintang utara. Asumsikan bumi berbentuk bola dengan jari-jari R .

Jawab. $\pi R^2(2 - \sqrt{2})$ yang hanya 15% dari luas keseluruhan permukaan Bumi ($4\pi R^2$).

17. Gunaakan koordinat bola untuk membuktikan teorema divergensi

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

dengan

$$\mathbf{F} = r^2 \cos \theta \mathbf{e}_r + r^2 \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - r^2 \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi$$

terhadap sebuah bola berjari-jari R .

Jawab. Kedua ruas sama dengan nol.

18. Gunakan koordinat eliptikal untuk menghitung integral berikut terhadap seluruh ruang

$$I = \iiint \frac{1}{r^2} \exp(-2r_1) dV,$$

dengan r_1 dan r_2 adalah jarak dari dua buah titik tetap yang dipisahkan sebuah jarak R . (Integral ini dinamakan sebagai integral Coloumb untuk molekul H_2 .)

Jawab. $\frac{\pi}{R} \left[\frac{1}{R} - \exp(-2R) \left(1 + \frac{1}{R} \right) \right]$.

Petunjuk: $r_2 = \frac{1}{2}R(\lambda + \mu), \quad r_1 = \frac{1}{2}R(\lambda - \mu)$.

19. Koordinat parabolik (u, v, w) berhubungan dengan koordinat Cartesian (x, y, z) dengan hubungan $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = w$. (a) Carilah faktor skala h_u, h_v, h_w . (b) Tunjukkan bahwa (u, v, w) adalah sistem koordinat ortogonal.
Jawab. $2(u_2 + v^2)^{1/2}, 2(u_2 + v^2)^{1/2}, 1$.

20. Tunjukkan dalam koordinat bola prolate, persamaan Laplace ($\nabla^2\Phi = 0$) diberikan oleh:

$$\frac{1}{(\sinh^2 \eta + \sin^2 \theta)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \Phi + \coth \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Phi + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi \right] + \frac{1}{\sinh^2 \eta \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi = 0.$$

21. Sebuah sistem koordinat ortogonal (u_1, u_2, u_3) dihubungkan dengan sistem koordinat Cartesian (x, y, z) oleh

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3).$$

Buktikan bahwa:

$$(a) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = h_1 h_2 h_3, \quad (b) \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{1}{h_1} \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_3},$$

$$(c) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}, \quad (d) \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3 = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x, y, z)}.$$

22. Gunakan transformasi $x + y = u$, $x - y = v$ untuk menghitung integral lipat dua

$$I = \iint (x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

terhadap sebuah persegi yang puncaknya $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(1, -1)$.

Jawab. $8/3$.

Petunjuk: Ingat bahwa Jacobian adalah nilai mutlak dari determinan $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

Gambarkan persegi tersebut, tunjukkan empat buah sisi persegi tersebut adalah $v = 0$, $u = 2$, $v = 2$, $u = 0$.

Transformasi Vektor dan Tensor Cartesian

Hukum-hukum fisika secara universal paling baik jika dideskripsikan dengan kuantitas matematik yang bebas kerangka acuan. Tetapi persoalan fisika yang dinyatakan dalam hukum-hukum ini hanya bisa diselesaikan dengan, dalam kebanyakan kasus, hanya jika kuantitas relevannya diuraikan/dipisahkan dalam suatu sistem koordinat. Sebagai contoh, jika kita perhatikan sebuah balok yang bergerak dalam bidang miring, gerakan balok tersebut jelas dapat dinyatakan dalam hukum dinamika Newton II $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, tanpa koordinat yang muncul. Tetapi untuk mendapatkan nilai yang benar dari kecepatan, percepatan dan lain sebagainya dari balok, kita harus memilih suatu sistem koordinat. Kita akan mendapatkan jawaban yang benar tidak peduli bagaimana orientasi sumbu yang kita pilih, meskipun ada beberapa pilihan yang lebih sesuai. Kita bisa saja memilih sumbu x sepanjang bidang datar atau bidang miring. Jelaslah komponen x dan y dari \mathbf{F} dan \mathbf{a} dalam dua koordinat ini berbeda nilainya, tetapi kombinasi keduanya memberikan hasil yang sama. Dengan kata lain, jika sistem koordinat kita rotasikan, komponen sebuah vektor tentu akan berubah. Tetapi perubahannya sedemikian rupa sehingga persamaan vektornya tetap valid. Untuk alasan ini, medan vektor paling baik didefinisikan dalam suku perilaku komponen terhadap rotasi sumbu.

Ketika sistem koordinat dirotasikan, transformasi komponen vektor posisi \mathbf{r} dapat dinyatakan dalam suku matriks rotasi. Kita akan menggunakan matriks rotasi untuk mendefinisikan semua vektor yang lain. Sifat-sifat matriks rotasi ini akan digunakan untuk analisis beberapa cara untuk mengkombinasikan komponen dua buah vektor atau lebih. Pendekatan pada analisis vektor ini dapat dengan mudah digeneralisasi untuk vektor berdimensi lebih dari tiga. Hal ini juga secara alami membawa kita pada analisis tensor.

Beberapa kuantitas fisika tidak berupa skalar maupun vektor. Sebagai contoh, rapat arus listrik \mathbf{J} yang bergerak pada sebuah material dihubungkan secara linier dengan medan listrik \mathbf{E} yang menyebabkannya. Jika materialnya isotropik, tiga buah komponen \mathbf{J} dan \mathbf{E} dihubungkan dengan konstanta yang sama dalam hukum Ohm

$$J_i = \sigma E_i,$$

dengan σ dikenal sebagai konduktivitas. Tetapi, jika materialnya anisotropik (non-isotropik), arah arus berbeda dengan arah medan. Dalam kasus ini hukum Ohm berbentuk

$$J_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} E_j,$$

dengan σ_{ij} tensor konduktivitas. Ini merupakan tensor rank dua karena memiliki dua buah subscript i dan j , yang masing-masing bergerak dari 1 ke 3. Sehingga semuanya terdiri dari 9 komponen. Sifat-sifat untuk mendefinisikan sebuah tensor adalah, ketika kita merotasikan sumbu koordinat, komponen-komponennya harus berubah menurut aturan transformasi tertentu, analog dengan transformasi vektor. Sebenarnya, sebuah vektor dengan satu subscript pada komponennya, merupakan tensor rank satu. Sebuah tensor dengan rank n memiliki n subscript. Dalam bab ini, kita akan mempelajari tensor dalam koordinat Cartesian, sehingga dinamakan tensor Cartesian.¹

4.1 Sifat-sifat Transformasi Vektor

4.1.1 Transformasi Vektor Posisi

Kerangka koordinat yang kita gunakan untuk mendeskripsikan posisi dalam ruang jelaslah sebarang, tetapi terdapat aturan transformasi spesifik untuk mengubah vektor dari satu kerangka ke kerangka lain. Anggap sistem koordinat persegi kita rotasikan berlawanan arah jarum jam pada sumbu- z sebesar sudut θ . Titik P berada pada posisi (x, y, z) sebelum rotasi. Setelah rotasi letaknya tidak berubah hanya koordinatnya menjadi (x', y', z') , seperti pada Gambar 4.1. Sehingga posisi vektor dalam sistem koordinat asalnya adalah

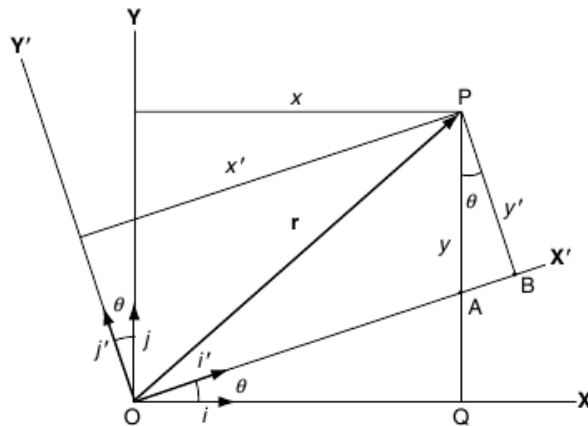
$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (4.1)$$

dan dalam sistem koordinat yang dirotasikan

$$\mathbf{r} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}', \quad (4.2)$$

dengan $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ dan $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ berturut-turut adalah vektor satuan dalam koordinat asal dan dirotasikan. Hubungan antara sistem aksien dan tak aksien dapat dengan

¹Tensor yang lebih umum bisa dipelajari dalam Teori Relativitas Khusus dan Umum.



Gambar 4.1: Sistem koordinat yang dirotasikan pada sumbu- z . Kuantitas aksis adalah dalam sistem dirotasikan dan kuantitas tak aksis (biasa) dalam sistem koordinat asal.

mudah diperoleh karena

$$\begin{aligned} x' &= \mathbf{i}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{i}' \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i})x + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j})y + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k})z \\ &= x \cos \theta + y \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = x \cos \theta + y \sin \theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

dan

$$\begin{aligned} y' &= \mathbf{j}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{j}' \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i})x + (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j})y + (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k})z \\ &= x \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + y \cos \theta = -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Karena $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ maka

$$z' = z.$$

Jelas bahwa hubungan ini merupakan pernyataan geometrik dari rotasi. Terlihat dalam Gambar 4.1

$$\begin{aligned} x' &= OA + AB = \frac{OQ}{\cos \theta} + PA \sin \theta = \frac{OQ}{\cos \theta} + (PQ - AQ) \sin \theta \\ &= \frac{x}{\cos \theta} + (y - x \tan \theta) \sin \theta = x \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right) + y \sin \theta \\ &= x \cos \theta + y \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= PA \cos \theta = (PQ - AQ) \cos \theta = (y - x \tan \theta) \cos \theta \\ &= y \cos \theta - x \sin \theta, \end{aligned}$$

yang identik dengan (4.3) dan (4.4).

Dengan matriks, hubungan ini dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Matriks 3×3 ini dikenal sebagai matriks rotasi.

4.1.2 Persamaan Vektor

Kuantitas vektor digunakan untuk menyatakan hukum-hukum fisika yang bebas kerangka koordinat. Sebagai contoh, hukum Newton II tentang dinamika

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (4.6)$$

menghubungkan gaya \mathbf{F} dengan massa partikel m dan juga percepatannya \mathbf{a} . Tidak ada koordinat yang muncul secara eksplisit dalam persamaan, seperti yang seharusnya karena hukum ini berlaku universal. Tetapi biasanya kita lebih mudah mencari dengan memilih satu sistem koordinat dan bekerja dengan masing-masing komponen. Dalam sistem koordinat tertentu, tiap vektor dinyatakan dalam tiga buah komponen. Ketika kita mengubah kerangka acuan, komponen-komponennya akan berubah. Tetapi perubahannya haruslah tertentu sehingga (4.6) terpenuhi. Koordinat akan berubah karena adanya translasi dan/atau rotasi sumbu. Sebuah translasi mengubah titik asal sistem koordinat dan menghasilkan konstanta tambahan dalam komponen \mathbf{r} . Karena turunan konstanta adalah nol, translasi tidak akan mengubah vektor \mathbf{F} dan \mathbf{a} . Sehingga perubahan penting disebabkan oleh rotasi sumbu.

Pertama jika kita perhatikan (4.6) berlaku untuk satu sistem koordinat maka ini juga berlaku untuk semua koordinat yang lain. Persamaannya dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (4.7)$$

dan dibawah rotasi sumbu, vektor nol akan tetap nol dalam sistem koordinat yang baru. Dalam suku komponen-komponennya pada sistem koordinat Cartesian (4.7) dapat dituliskan sebagai

$$(F_x - ma_x)\mathbf{i} + (F_y - ma_y)\mathbf{j} + (F_z - ma_z)\mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (4.8)$$

sehingga

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y, \quad F_z = ma_z. \quad (4.9)$$

Sekarang jika sistem dirotasikan berlawanan arah jarum jam pada sumbu- z sebesar sudut θ seperti Gambar 4.1, (4.7) menjadi

$$(F'_{x'} - ma'_{x'})\mathbf{i}' + (F'_{y'} - ma'_{y'})\mathbf{j}' + (F'_{z'} - ma'_{z'})\mathbf{k}' = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

dengan definisi

$$\begin{aligned} a'_{x'} &= \frac{d^2}{dt^2} x' = \frac{d^2}{dt^2} (x \cos \theta + y \sin \theta) \\ &= a_x \cos \theta + a_y \sin \theta, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} a'_{y'} &= \frac{d^2}{dt^2} y' = \frac{d^2}{dt^2} (-x \sin \theta + y \cos \theta) \\ &= -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$a'_{z'} = \frac{d^2}{dt^2} z' = \frac{d^2}{dt^2} z = a_z. \quad (4.13)$$

Masing-masing komponen (4.10) harus identik sama dengan nol. Hal ini memberikan

$$\begin{aligned} F'_{x'} &= ma'_{x'} = m(a_x \cos \theta + a_y \sin \theta), \\ F'_{y'} &= ma'_{y'} = m(-a_x \sin \theta + a_y \cos \theta), \\ F'_{z'} &= ma'_{z'} = ma_z. \end{aligned}$$

Dengan (4.9), kita memiliki

$$\begin{aligned} F'_{x'} &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \\ F'_{y'} &= -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta, \\ F'_{z'} &= F_z \end{aligned}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks, hubungan ini dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} F'_{x'} \\ F'_{y'} \\ F'_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

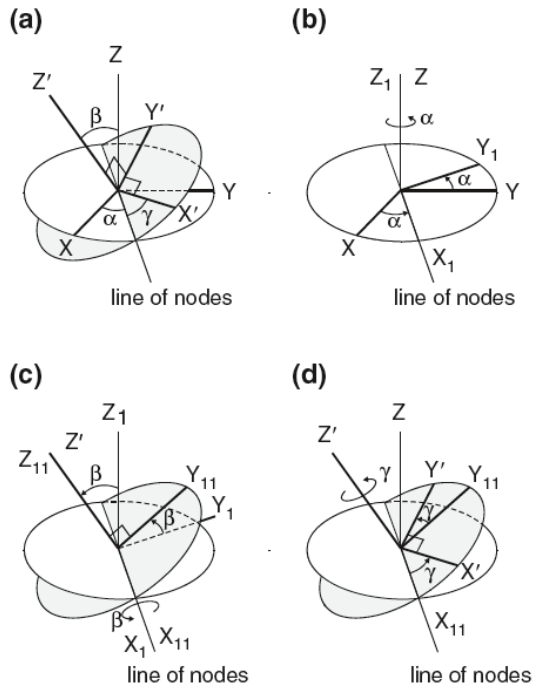
Dengan membandingkan (4.5) dan (4.14), kita melihat bahwa matriks rotasi benar-benar sama. Dengan kata lain komponen vektor \mathbf{F} bertransformasi dengan cara yang serupa dengan komponen vektor posisi \mathbf{r} .

Dalam aplikasi fisis, hal ini berarti agar sebuah kuantitas dapat dipandang sebagai sebuah vektor, nilai yang terukur dari komponen-komponennya dalam sistem terotasi haruslah dihubungkan dengan cara ini pada sistem koordinat asalnya.

Orientasi antara dua buah sistem koordinat tidak hanya dibatasi pada sebuah rotasi pada sumbu tertentu. Jika kita mengetahui orientasi relatif sistem, kita dapat mengikuti prosedur (4.3) untuk memperoleh hubungan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}) & (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}) & (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}) \\ (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}) & (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}) & (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}) \\ (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}) & (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j}) & (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dalam Subbab 4.1.3 kita akan mempelajari rotasi sebenarnya yang mengubah $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ menjadi $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$.



Gambar 4.2: Sudut Euler. (a) Orientasi relatif dua buah sistem koordinat persegi XYZ dan $X'Y'Z'$ dengan titik asal biasa yang dinyatakan dalam tiga buah sudut Euler α , β , γ . Transformasi matriksnya merupakan hasil perkalian tiga buah matriks untuk tiga buah rotasi berikut. (b) Mero-tasikan α sepanjang sumbu Z , bawa sumbu X agar berhimpit dengan garis simpul (line of nodes). (c) Rotasikan β pada garis simpul. (d) Terakhir rotasikan γ sepanjang sumbu Z' .

4.1.3 Sudut Euler

Kita kadang perlu menyatakan matriks transformasi dalam suku rotasi konkrit yang mengubah sumbu koordinat dalam orientasi tertentu. Secara umum rotasi dapat dianggap sebagai kombinasi tiga rotasi yang dilakukan berurutan dalam tiga arah berbeda. Deskripsi paling bermanfaat untuk hal ini adalah dalam suku sudut Euler α , β , γ yang sekarang kita definisikan.

Dua buah sistem koordinat ditunjukkan pada Gambar 4.2(a). Misalkan XYZ adalah koordinat sistem mula-mula, $X'Y'Z'$ merupakan sistem koordinat akhir. Perpotongan bidang XY dan $X'Y'$ dikenal sebagai garis simpul (line of nodes). Orientasi relatif dua buah sistem dispesifikasi tiga buah sudut α , β , γ . Seperti yang terlihat pada Gambar 4.2(a), α adalah sudut antara sumbu X dengan garis simpul, β adalah sudut antara sumbu Z dengan Z' , dan γ adalah sudut antara garis simpul dengan sumbu X' .

Matriks transformasi dari XYZ menjadi $X'Y'Z'$ dapat diperoleh dengan menu-liskannya sebagai perkalian tiga buah rotasi terpisah yang masing-masing memiliki

matriks rotasi yang relatif sederhana. Pertama kita rotasikan sumbu mula-mula XYZ sebesar sudut α berlawanan arah jarum jam pada sumbu Z . Sistem koordinat resultannya kita berikan label X_1, Y_1, Z_1 seperti pada Gambar 4.2(b). Pada langkah kedua sumbu menengahnya (intermediate) dirotasikan pada sumbu X_1 berlawanan arah dengan jarum jam sebesar sudut β untuk memperoleh sumbu menengah X_{11}, Y_{11}, Z_{11} seperti pada Gambar 4.2(c). Terakhir X_{11}, Y_{11}, Z_{11} dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar sudut γ pada sumbu Z_{11} untuk memperoleh sumbu $X'Y'Z'$ seperti pada Gambar 4.2(d).

Setelah rotasi pertama, koordinat \mathbf{r} dalam sistem mula-mula (x, y, z) menjadi (x_1, y_1, z_1) dalam sistem X_1, Y_1, Z_1 . Keduanya dihubungkan matriks rotasi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Rotasi kedua pada sumbu X_1 . Setelah rotasi (x_1, y_1, z_1) menjadi (x_{11}, y_{11}, z_{11}) dengan hubungan

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Setelah rotasi terakhir pada sumbu Z_{11} koordinat \mathbf{r} menjadi (x', y', z') yang diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Jelas dari (4.15)-(4.17) bahwa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

dengan

$$(A) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Maka matriks (A) 3×3 merupakan matriks transformasi yang lengkap. hasil perkalian tiga buah matriks memberikan elemen (A) yaitu

$$(A) = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \cos \beta \sin \alpha & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \beta \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \\ -\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \cos \beta \sin \alpha & -\sin \gamma \sin \alpha + \cos \gamma \cos \beta \cos \alpha & \cos \gamma \sin \beta \\ \sin \beta \sin \alpha & -\sin \beta \cos \alpha & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Tidak terlalu sulit untuk membuktikan bahwa hasil kali matriks (A) dengan transposenya $(A)^T$ adalah matriks identitas I

$$(A)(A^T) = (I).$$

Maka matriks inversnya A^{-1} diberikan oleh matriks transposenya $(A)^T$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (A^T) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Hal ini adalah sifat umum dari matriks rotasi yang akan kita buktikan pada Subbab 4.1.4.

Perlu diperhatikan di sini penulis lain mendefinisikan sudut Euler sedikit berbeda, karena urutan rotasi yang digunakan dalam mendefinisikan orientasi akhir sistem koordinat boleh sebarang. Di sini kita mengadopsi definisi yang digunakan secara luas dalam buku mekanika klasik.

4.1.4 Sifat-sifat Matriks Rotasi

Untuk mempelajari sifat-sifat ruang vektor, akan lebih nyaman jika kita menggunakan notasi yang lebih sistematis. Misalkan (x, y, z) adalah (x_1, x_2, x_3) ; $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ adalah $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dan (V_x, V_y, V_z) adalah (V_1, V_2, V_3) . Kuantitas dalam sistem terotasi diberikan label sebagai kuantitas aksien. Salah satu keuntungan notasi baru adalah memungkinkan kita untuk menggunakan simbol jumlah \sum untuk menuliskan persamaan dalam bentuk yang lebih kompak. Ortogonalitas $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ dinyatakan sebagai

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j) = \delta_{ij},$$

dengan simbol δ_{ij} dikenal sebagai delta Kronecker didefinisikan sebagai

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Secara umum, vektor posisi \mathbf{r} yang sama dinyatakan dalam dua buah sistem koordinat berbeda dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^3 x'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^3 x_j \mathbf{e}_j. \quad (4.21)$$

Dengan mengambil perkalian dot $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}$ kita mempunyai

$$\mathbf{e}_i \cdot \sum_{j=1}^3 x'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j) x'_j = \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} x'_j = x'_i. \quad (4.22)$$

Perkalian dot yang sama dari (4.21) memberikan

$$\mathbf{e}'_i \cdot \sum_{j=1}^3 x'_j \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) x_j = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j. \quad (4.23)$$

Dari (4.22) dan (4.23) diperoleh

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) x_j = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j, \quad (4.24)$$

dengan

$$a_{ij} = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) \quad (4.25)$$

adalah arah cosinus antara \mathbf{e}'_i dan \mathbf{e}_j . Perhatikan bahwa i dalam (4.24) tetap sebagai sebuah parameter yang memberikan tiga buah persamaan berbeda ketika kita masukkan nilai 1, 2, dan 3. Dalam notasi matriks, (4.24) dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Jika kita mengambil $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}$, bukan $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{r}$, dan mengikuti prosedur yang sama kita memperoleh

$$x_i = \sum_{j=1}^3 (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j) x'_j,$$

karena $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j)$ adalah cosinus sudut antara \mathbf{e}_i dengan \mathbf{e}'_j yang dapat dinyatakan juga dengan $(\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i)$ dan dengan definisi (4.25) $(\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i) = a_{ji}$, maka

$$x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} x'_j, \quad (4.27)$$

atau

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Jika kita bandingkan (4.26) dengan (4.28) kita melihat bahwa inverse matriks rotasi sama dengan transposenya

$$(a_{ij})^{-1} = (a_{ji}) = (a_{ij})^T. \quad (4.29)$$

Transformasi sebarang yang memenuhi kondisi ini dikenal sebagai transformasi ortogonal.

Jika kita memberikan nama ulang pada indeks i dan j , kita dapat menuliskan (4.27) sebagai

$$x_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} x'_i. \quad (4.30)$$

Jelas dari (4.24) dan persamaan terakhir bahwa

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}. \quad (4.31)$$

Kita tekankan di sini bahwa hubungan ini hanya berlaku untuk sistem koordinat Cartesien.

Sembilan buah elemen matriks rotasi tidak saling bebas satu dengan yang lainnya. Salah satu cara untuk menurunkan hubungan ini adalah dengan memperhatikan bahwa jika dua buah sistem koordinat memiliki titik asal yang sama maka panjang vektor posisi haruslah sama dalam dua sistem ini. Hal ini mengharuskan

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i'^2 = \sum_{i=1}^3 x_j^2. \quad (4.32)$$

Dengan menggunakan (4.24), kita mempunyai

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 x_i'^2 &= \sum_{i=1}^3 x'_i x'_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_j x_k \sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \sum_{j=1}^3 x_j^2. \end{aligned}$$

Hal ini berlaku untuk semua titik, jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \quad (4.33)$$

Kondisi ini dikenal sebagai syarat ortogonalitas. Matriks sebarang yang elemennya memenuhi syarat ini dikenal sebagai matriks rotasi. Matriks rotasi adalah matriks ortogonal. Dengan semua nilai i dan j yang mungkin, (4.33) terdiri dari enam buah persamaan. Himpunan persamaan ini ekuivalen dengan

$$\sum_{i=1}^3 a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}. \quad (4.34)$$

yang juga bisa didapatkan dari (4.32), tetapi mulai dari kanan ke kiri dengan transformasi (4.27).

Contoh 4.1.1. Tunjukkan bahwa determinan matriks ortogonal adalah $+1$ dan -1 .

Solusi 4.1.1. Misalkan matriks transformasinya (A). Karena $(A)(A^{-1}) = (I)$, determinan dari matriks identitas sama dengan 1, $|AA^{-1}| = 1$, untuk transformasi ortogonal $A^{-1} = A^T$, sehingga $|AA^T| = 1$ karena $|AA^T| = |A||A^T|$ dan $|A| = |A^T|$, maka $|A|^2 = 1$. Sehingga $|A| = \pm 1$.

Contoh 4.1.2. Tunjukkan bahwa determinan matriks rotasi adalah +1.

Solusi 4.1.2. Kita nyatakan \mathbf{e}'_i dalam $\{\mathbf{e}_k\} : \mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^3 b_{ik} \mathbf{e}_k$.

$$(\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^3 b_{ik} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^3 b_{ik} \delta_{kj} = b_{ij}.$$

Tetapi $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_{ij}$, sehingga $b_{ij} = a_{ij}$. Maka

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}'_2 = a_{21} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + a_{23} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}'_3 = a_{31} \mathbf{e}_1 + a_{32} \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3.$$

Seperti yang sudah dipelajari dalam analisis vektor, perkalian tiga buah skalar sama dengan determinan komponennya

$$\mathbf{e}'_1 \cdot (\mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

yang merupakan matriks rotasi. Di lain pihak

$$\mathbf{e}'_1 \cdot (\mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3) = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = +1.$$

sehingga

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +1$$

4.1.5 Definisi Vektor dan Skalar dalam Sifat Transformasi

Sekarang kita sampai mendefinisikan ulang secara aljabar sebuah vektor dan tensor.

Terhadap rotasi sumbu, koordinat vektor posisi dalam sistem mula-mula x_i bertransformasi menjadi x'_i dalam sistem terotasi menurut

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad (4.35)$$

dengan

$$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}. \quad (4.36)$$

Jika terhadap transformasi ini, kuantitas φ tidak berubah, maka φ dinamakan sebuah skalar. Hal ini berarti jika φ skalar maka

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3). \quad (4.37)$$

Perhatikan bahwa setelah koordinatnya ditransformasikan, bentuk fungsionalnya dapat berubah (yaitu φ'), tetapi sepanjang (x_1, x_2, x_3) dan (x'_1, x'_2, x'_3) sama, maka keduanya memiliki nilai yang juga sama.

Jika himpunan kuantitas (A_1, A_2, A_3) dalam sistem mula-mula ditransformasikan menjadi (A'_1, A'_2, A'_3) dalam sistem terotasi menurut

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j. \quad (4.38)$$

maka kuantitas $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ dinamakan vektor. Karena $(a_{ij})^{-1} = a_{ji}$, (4.38) ekuivalen dengan

$$A_i = \sum_j a_{ji} A'_j. \quad (4.39)$$

Definisi ini memungkinkan generalisasi dan menjamin bahwa kuantitas vektor bebas sistem koordinat.

Contoh 4.1.3. Anggap \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah vektor. Tunjukkan bahwa perkalian dotnya $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ adalah skalar.

Solusi 4.1.3. Karena \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah vektor, terhadap rotasi komponen-komponennya bertransformasi menurut

$$A'_i = \sum_j a_{ij} A_j; \quad B'_i = \sum_j a_{ij} B_j.$$

Untuk menunjukkan perkalian dot

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A_i B_i$$

adalah skalar, kita harus membuktikan nilainya pada sistem terotasi sama dengan nilainya pada sistem asalnya

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})' &= \sum_i A'_i B'_i = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} A_j \right) \left(\sum_k a_{ik} B_k \right) \\ &= \sum_j \sum_k \left(\sum_i a_{ij} a_{ik} \right) A_j B_k = \sum_j \sum_k \delta_{jk} A_j B_k = \sum_j A_j B_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Sehingga $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ adalah skalar.

Contoh 4.1.4. Tunjukkan bahwa jika (A_1, A_2, A_3) sedemikian rupa sehingga $\sum_i A_i B_i$ adalah skalar untuk tiap vektor \mathbf{B} , maka (A_1, A_2, A_3) adalah vektor.

Solusi 4.1.4. Karena $\sum_i A_i B_i$ adalah skalar dan \mathbf{B} adalah vektor

$$\sum_i A_i B_i = \sum_i A'_i B'_i = \sum_i A'_i \sum_j a_{ij} B_j.$$

Sekarang i dan j adalah indeks berjalan, kita dapat menamai ulang i sebagai j , dan j sebagai i . Sehingga

$$\sum_i A_i B_i = \sum_j A'_j \sum_i a_{ji} B_i = \sum_i \sum_j a_{ji} A'_j B_i.$$

Mengikuti hal ini

$$\sum_i \left(A_i - \sum_j a_{ji} A'_j \right) B_i = 0.$$

Karena identitas ini berlaku untuk tiap \mathbf{B} , kita harus memiliki

$$A_i = \sum_j a_{ji} A'_j.$$

Sehingga A_1, A_2, A_3 adalah komponen sebuah vektor.

Contoh 4.1.5. Tunjukkan dalam koordinat Cartesian, gradien fungsi skalar $\nabla\varphi$ adalah fungsi vektor.

Solusi 4.1.5. Sebagai skalar maka ini haruslah memiliki nilai yang sama pada titik yang diberikan, bebas dari orientasi sistem koordinat

$$\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3). \quad (4.40)$$

Turunkan terhadap x'_i dan gunakan aturan rantai, kita memiliki

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) = \frac{\partial}{\partial x'_i} \varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}. \quad (4.41)$$

Kita peroleh dari (4.31) dalam koordinat Cartesian

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = a_{ij},$$

sehingga

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}. \quad (4.42)$$

Sekarang komponen dari $\nabla\varphi$ adalah

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right).$$

Komponen ini terhadap rotasi sumbu bertransformasi persis sama dengan komponen vektor, sehingga $\nabla\varphi$ adalah fungsi vektor.

Sebuah vektor yang komponennya hanyalah berupa angka disebut vektor konstan. Semua vektor konstan berperilaku seperti vektor posisi. Ketika sumbunya dirotasikan, komponennya berubah menjadi himpunan angka sesuai dengan aturan transformasi. Sehingga himpunan tiga angka sebarang dapat dianggap sebagai vektor konstan.

Untuk medan vektor, komponennya berupa fungsi dari (x_1, x_2, x_3) . Terhadap rotasi, bukan hanya (x_1, x_2, x_3) berubah menjadi (x'_1, x'_2, x'_3) , kemunculan fungsi komponennya juga dapat berubah. Hal ini bisa menjadi suatu kerumitan.

Secara matematik aturan transformasi memberikan sedikit batasan dengan apa yang kita sebut sebagai sebuah vektor. Kita dapat membuat himpunan tiga buah fungsi sebarang komponen medan vektor hanya dengan mendefinisikan secara sederhana, dalam sistem terotasi, fungsi berkaitan yang diperoleh dari aturan transformasi yang benar sebagai komponen vektor dalam sistem tersebut.

Tetapi jika kita membicarakan entitas fisik, kita tidak sebebaskan itu dalam mendefinisikan komponennya dalam berbagai sistem. Komponen-komponen ini ditentukan oleh fakta fisik. Seperti yang sudah kita sebutkan di awal, semua hukum fisika yang benar haruslah bebas dari sistem koordinat. Dengan kata lain, kemunculan persamaan yang mendeskripsikan hukum fisika haruslah sama dalam semua sistem koordinat. Jika fungsi vektor mempertahankan kemunculannya dalam sistem terotasi, persamaan yang dituliskan dalam suku tersebut akan invarian terhadap rotasi. Sehingga kita memasukkan definisi medan vektor, sebuah syarat tambahan bahwa komponen yang ditransformasikan harus terlihat sama dengan komponen asalnya.

Sebagai contoh banyak penulis mendeskripsikan

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

sebagai medan vektor dalam ruang dua dimensi, tetapi yang lain sebaliknya. Jika kita menganggap (4.43) sebagai sebuah vektor, maka komponen vektor ini dalam sistem dengan sumbu yang dirotasikan sebesar sudut θ diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, koordinatnya haruslah berubah menurut

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Dengan mudah kita menunjukkan

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x'_1 \sin \theta \cos \theta + x'_2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ x'_1(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2x'_2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Secara matematik kita dapat mendefinisikan (4.44) sebagai komponen vektor dalam sistem terotasi, tetapi bentuknya tidak sama dengan (4.43).

Di lain pihak, perhatikan ekspresi yang sedikit berbeda

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Dengan aturan transformasi yang sama, kita peroleh

$$\begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ -x'_1(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_2 \\ -x'_1 \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

yang memiliki bentuk sama dengan (4.45). Dalam arti, kita mengatakan (4.45) invarian terhadap rotasi.

Dengan definisi kita (4.45) adalah vektor sedangkan (4.43) bukan vektor.

4.2 Tensor Cartesian

4.2.1 Definisi

Definisi sebuah vektor dapat diperluas untuk mendefinisikan jenis yang lebih umum sebuah objek yang dinamakan tensor, yang bisa memiliki subscript lebih dari satu.

Jika dalam sistem koordinat persegi ruang tiga dimensi dibawah rotasi koordinat

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$$

kuantitas $3^N T_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ (dengan tiap i_1, i_2, \dots, i_N merupakan indeks bebas berjalan dari 1 ke 3) bertransformasi menurut aturan

$$T'_{i_1, i_2, \dots, i_N} = \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \cdots \sum_{j_N=1}^3 a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_N j_N} T_{j_1, j_2, \dots, j_N}, \quad (4.47)$$

sehingga T_{i_1, i_2, \dots, i_N} adalah komponen dari tensor Cartesian rank N . Karena bahasan kita terbatas hanya pada tensor Cartesian, kecuali nanti diberitahukan, maka kata Cartesian kita buang di sini.

Rank sebuah tensor adalah jumlah subscript bebas. Sehingga tensor dengan rank nol hanya memiliki satu buah komponen ($3^0 = 1$). Sehingga kita bisa menganggapnya sebagai skalar. Tensor dengan rank satu memiliki tiga buah komponen ($3^1 = 3$). Aturan transformasi komponen-komponennya terhadap rotasi sama dengan aturan pada vektor. Sehingga vektor adalah tensor rank satu.

Kasus lainnya paling penting adalah tensor rank dua. Tensor ini memiliki sembilan buah komponen ($3^2 = 9$), T_{ij} mengikuti aturan transformasi

$$T'_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{il} a_{jm} T_{lm}. \quad (4.48)$$

Komponen-komponen tensor rank dua dapat dinyatakan dalam matriks 3×3

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Tetapi, hal ini tidak berarti tiap matriks 3×3 membentuk sebuah tensor. Syarat paling penting adalah komponen-komponennya memenuhi aturan transformasi.

Sebagai masalah terminologi, tensor rank dua dalam ruang tiga dimensi memiliki sembilan buah komponen T_{ij} . Tetapi sering T_{ij} dianggap sebagai “tensor” dibandingkan “komponen tensor” untuk sederhananya. Dengan kata lain, T_{ij} digunakan untuk menyatakan komponen keseluruhan sekaligus komponen individu. Konteks ini akan membuat artinya jelas.

Contoh 4.2.1. Tunjukkan bahwa dalam ruang dua dimensi, kuantitas berikut merupakan tensor rank dua

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & -x_1^2 \\ x_2^2 & -x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Solusi 4.2.1. Dalam ruang dua dimensi, tensor rank dua memiliki 4 ($2^2 = 4$) komponen. Jika ini adalah tensor maka dalam koordinat terotasi bentuknya haruslah

$$T'_{ij} = \begin{pmatrix} x'_1 x'_2 & -x'^2_1 \\ x'^2_2 & -x'_1 x'_2 \end{pmatrix},$$

dengan

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sekarang kita harus memeriksa jika tiap komponen memenuhi aturan transformasi

$$\begin{aligned} T'_{11} &= x'_1 x'_2 = (\cos \theta x_1 + \sin \theta x_2) \\ &= -\cos \theta \sin \theta x_1^2 + \cos^2 \theta x_1 x_2 - \sin^2 \theta x_2 x_1 + \sin \theta \cos \theta x_2^2. \end{aligned}$$

Hal ini harus dibandingkan dengan

$$\begin{aligned} T'_{11} &= \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 a_{1l} a_{1m} T_{lm} \\ &= a_{11} a_{11} T_{11} + a_{11} a_{12} T_{12} + a_{12} a_{11} T_{21} + a_{12} a_{12} T_{22} \\ &= \cos^2 \theta x_1 x_2 - \cos \theta \sin \theta x_1^2 + \sin \theta \cos \theta x_2^2 - \sin^2 \theta x_1 x_2. \end{aligned}$$

Terlihat bahwa dua buah ekspresi identik. Proses yang sama akan menunjukkan bahwa komponen-komponen lain juga memenuhi aturan transformasi. Sehingga T_{ij} adalah tensor rank dua dalam ruang dua dimensi.

Sifat-sifat transformasi ini tidak diambil begitu saja. Dalam contoh di atas, jika salah satu tanda aljabar kita rubah, aturan transformasinya tidak akan terpenuhi. Sebagai contoh jika T_{22} kita rubah menjadi $x_1 x_2$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & -x_1^2 \\ x_2^2 & x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

maka

$$T'_{11} \neq \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 a_{1l} a_{1m} T_{lm}.$$

Sehingga (4.49) bukanlah sebuah tensor.

4.2.2 Tensor Delta Kronecker dan Tensor Levi Civita

Tensor Delta Kronecker

Delta Kronecker yang sudah kita temui

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

merupakan tensor rank dua. Untuk membuktikan ini, perhatikan transformasi berikut

$$\delta'_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{il} a_{jm} \delta_{lm} = \sum_{l=1}^3 a_{il} a_{jl} = \delta_{ij}. \quad (4.50)$$

Maka

$$\delta'_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Sehingga δ_{ij} memenuhi aturan transformasi tensor dan invarian terhadap rotasi. Sebagai tambahan, tensor ini memiliki sifat khusus. Nilai numerik komponennya sama dalam semua sistem koordinat. Tensor dengan sifat ini disebut sebagai tensor isotropik.

Karena

$$\sum_k D_{ik} \delta_{jk} = D_{ij},$$

tensor delta Kronecker disebut sebagai tensor substitusi. Tensor ini disebut juga sebagai tensor satuan, karena representasi matriksnya

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tensor Levi-Civita

Simbol Levi-Civita ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{jika } (i, j, k) \text{ adalah permutasi genap dari } (1, 2, 3) \\ -1, & \text{jika } (i, j, k) \text{ adalah permutasi ganjil dari } (1, 2, 3) \\ 0, & \text{jika ada indeks berulang} \end{cases}$$

yang kita gunakan untuk mendefinisikan determinan orde ketiga, merupakan tensor isotropik rank tiga. Tensor ini dikenal sebagai tensor bolak-balik (*alternating tensor*). Untuk membuktikan ini, ingat definisi dari determinan orde ketiga

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{1l} a_{2m} a_{3n} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (4.51)$$

Sekarang jika indeks baris (1,2,3) diganti dengan (i, j, k) , kita memiliki

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}. \quad (4.52)$$

Hubungan ini dapat didemonstrasikan dengan menuliskan suku tak hilang dalam dua ruas. Hal ini dapat juga dibuktikan dengan memperhatikan hal berikut. Pertama

untuk $i = 1, j = 2, k = 3$, (4.52) akan tereduksi menjadi (4.51). Sekarang perhatikan efek jika kita mengubah i menjadi j dan sebaliknya. Ruas kiri berubah tanda karena

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{jl} a_{im} a_{kn} \varepsilon_{lmn} &= \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{jm} a_{il} a_{kn} \varepsilon_{mln} \\ &= - \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn}. \end{aligned}$$

Ruas kanan juga berubah tandanya karena dua buah baris determinan saling bertukar. Jika dua buah indeks i, j, k ada yang sama, maka kedua ruas nilainya nol. Ruas kiri sama dengan nol karena kuantitas tersebut sama dengan negatifnya. Ruas kanan sama dengan nol karena dua baris determinan identik. Hal ini cukup untuk membuktikan hasil karena semua permutasi i, j, k dapat diperoleh dengan pertukaran yang berurutan.

Mengikuti sifat-sifat determinan dan definisi ε_{ijk} yaitu

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.53)$$

dan (4.52) menjadi

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (4.54)$$

Hubungan ini berlaku untuk sebarang determinan. Sekarang jika a_{ij} adalah elemen matriks rotasi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1,$$

seperti pada Contoh 4.1.2.

Untuk menentukan apakah ε_{ijk} merupakan tensor, kita harus melihat nilainya dalam sistem terotasi. Aturan transformasi mengharuskan

$$\varepsilon'_{ijk} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn}.$$

Tetapi

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}.$$

Sehingga

$$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}. \quad (4.55)$$

Maka ε_{ijk} adalah tensor isotropik rank tiga.

Hubungan δ_{ijk} dengan ε_{ijk}

Terdapat sebuah hubungan yang penting dan menarik antara tensor delta Kronecker dan tensor Levi-Civita

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}. \quad (4.56)$$

Setelah kita jumlahkan terhadap indeks i , terdapat empat buah subscript bebas j, k, l, m . Sehingga (4.56) merepresentasikan 81 ($3^4 = 81$) persamaan. Tidak sulit untuk membuktikan (4.56) dengan pengamatan berikut:

1. Jika $j = k$ atau $l = m$, kedua buah ruas dalam (4.56) sama dengan nol. Jika $j = k$, ruas kiri sama dengan nol, karena $\varepsilon_{ikk} = 0$. Ruas kanan juga sama dengan nol karena $\delta_{kl} \delta_{km} - \delta_{km} \delta_{kl} = 0$. Hasil yang sama diperoleh untuk $l = m$. Sehingga kita hanya perlu memeriksa kasus untuk $j \neq k$ dan $l \neq m$.
2. Agar ruas kiri tidak hilang, i, j, k harus berbeda. Sehingga diberikan $j \neq k, i$ tetap. Perhatikan ε_{ilm} , karena i tetap dan i, l, m harus berbeda agar ε_{ilm} tidak hilang, sehingga $l = j, m = k$, atau $l = k, m = j$ hanyalah dua pilihan untuk tidak hilang.
3. Untuk $l = j$ dan $m = k$, $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ilm}$. Sehingga ε_{ijk} dan ε_{ilm} haruslah memiliki tanda yang sama. (Bisa keduanya +1 atau keduanya -1). Sehingga ruas kiri (4.56) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = +1$. Dan ruas kanan (4.56) juga sama dengan +1, karena $l \neq m$

$$\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} = \delta_{ll} \delta_{mm} - \delta_{lm} \delta_{ml} = 1 - 0 = 1.$$

4. Untuk $l = k$ dan $m = j$, $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{iml} = -\varepsilon_{ilm}$. Sehingga ε_{ijk} dan ε_{ilm} memiliki tanda yang berlawanan. (Satunya -1 dan yang lain +1, begitu juga sebaliknya). Sehingga ruas kiri (4.56) nilainya -1. Ruas kanan (4.56) juga nilainya -1 karena $l \neq m$

$$\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} = \delta_{ml} \delta_{lm} - \delta_{mm} \delta_{ll} = 0 - 1 = -1$$

Hal ini telah melingkupi 81 kasus. Dalam tiap kasus ruas kiri sama dengan ruas kanan. Sehingga (4.56) terbukti.

4.2.3 Outer Product

Jika $S_{i_1 i_2 \dots i_N}$ merupakan tensor rank N dan $T_{j_1 j_2 \dots j_M}$ merupakan tensor rank M , maka $S_{i_1 i_2 \dots i_N} T_{j_1 j_2 \dots j_M}$ merupakan tensor rank $(N + M)$.

Hal ini dikenal sebagai teorema *outer product*.² *Outer product* juga dikenal sebagai perkalian langsung. Teorema ini dapat dengan mudah dibuktikan. Pertama tensor ini

²perkalian luar

memiliki komponen sebanyak 3^{N+M} . Terhadap sebuah rotasi

$$S'_{i_1 i_2 \dots i_N} = \sum_{k_1 \dots k_N} a_{i_1 k_1} \dots a_{i_N k_N} S_{k_1 \dots k_N},$$

$$T'_{j_1 j_2 \dots j_M} = \sum_{l_1 \dots l_M} a_{j_1 l_1} \dots a_{j_M l_M} T_{l_1 \dots l_M},$$

kita telah menuliskan $\sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \dots \sum_{j_N=1}^3$ sebagai $\sum_{j_1 \dots j_N}$

$$\begin{aligned} (S_{i_1 i_2 \dots i_N} T_{j_1 j_2 \dots j_M})' &= S'_{i_1 i_2 \dots i_N} T'_{j_1 j_2 \dots j_M} \\ &= \sum_{k_1 \dots k_N} \sum_{l_1 \dots l_M} a_{i_1 k_1} \dots a_{i_N k_N} a_{j_1 l_1} \dots a_{j_M l_M} S_{k_1 \dots k_N} T_{l_1 \dots l_M}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

yaitu bagaimana tensor rank $(M + N)$ harus bertransformasi.

Sebagai contoh *outer product* dari dua buah vektor adalah tensor rank dua. Misalkan (A_1, A_2, A_3) dan (B_1, B_2, B_3) adalah vektor, sehingga keduanya adalah tensor rank satu. Hasil *outer product*-nya $A_i B_j$ adalah tensor rank dua. Sembilan buah komponennya dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$$A_i B_j = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 & A_1 B_3 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 & A_2 B_3 \\ A_3 B_1 & A_3 B_2 & A_3 B_3 \end{pmatrix}.$$

Karena \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah vektor

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} A_k; \quad B'_j = \sum_{l=1}^3 a_{jl} B_l,$$

mengikuti ini

$$A'_i B'_j = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ik} a_{jl} A_k B_l,$$

yang menunjukkan $A_i B_j$ adalah tensor rank dua, bersesuaian dengan teorema *outer product*.

Kita juga mengatakan di sini, tensor rank dua yang dibentuk dengan vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} kadang dinyatakan dengan \mathbf{AB} (tanpa apapun di antaranya). Ketika kita menuliskannya seperti ini, hal ini dinamakan dyad. Kombinasi linier beberapa dyad disebut dyadic. Karena segala sesuatu yang dapat dilakukan dengan vektor dan dyadic dapat juga dilakukan dengan tensor dan matriks, tetapi tidak dengan cara sebaliknya, maka kita tidak akan mendiskusikan dyadic lagi.

Contoh 4.2.2. Gunakan teorema *outer product* untuk membuktikan ekspresi pada Contoh 4.2.1

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & -x_1^2 \\ x_2^2 & -x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

adalah tensor rank dua dalam ruang dua dimensi.

Solusi 4.2.2. Vektor posisi dua dimensi diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dalam (4.46), telah kita buktikan bahwa

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

adalah vektor dalam ruang dua dimensi. *Outer product* dari keduanya adalah tensor rank dua

$$A_i B_j = \begin{pmatrix} x_1 x_2 & -x_1^2 \\ x_2^2 & -x_1 x_2 \end{pmatrix} = T_{ij}.$$

4.2.4 Kontraksi

Kita dapat menurunkan rank sebuah tensor dengan teorema berikut. *Jika $T_{i_1 i_2 i_3 \dots i_N}$ adalah tensor rank N , maka*

$$S_{i_3 \dots i_N} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \delta_{i_1 i_2} T_{i_1 i_2 i_3 \dots i_N}$$

adalah tensor rank $(N - 2)$.

Untuk membuktikan teorema ini, pertama kita perhatikan bahwa $S_{i_3 \dots i_N}$ memiliki 3^{N-2} komponen. Selanjutnya kita harus menunjukkan

$$S'_{i_3 \dots i_N} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \delta'_{i_1 i_2} T'_{i_1 i_2 i_3 \dots i_N} \quad (4.58)$$

memenuhi aturan transformasi tensor.

Dengan

$$\begin{aligned} \delta'_{i_1 i_2} &= \delta_{i_1 i_2}, \\ T'_{i_1, i_2, \dots, i_N} &= \sum_{j_1 \dots j_N} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1 j_2, \dots, j_N}, \end{aligned}$$

(4.58) menjadi

$$\begin{aligned} S'_{i_3 \dots i_N} &= \sum_{i_1 i_2} \delta_{i_1 i_2} \sum_{j_1 \dots j_N} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1, j_2, \dots, j_N} \\ &= \sum_{j_1 \dots j_N} \left(\sum_{i_1 i_2} \delta_{i_1 i_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \right) a_{i_3 j_3} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1, j_2, \dots, j_N}. \end{aligned}$$

Sekarang

$$\sum_{i_1 i_2} \delta_{i_1 i_2} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} = \sum_{i_1} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} = \delta_{j_1, j_2},$$

sehingga

$$\begin{aligned} S'_{i_3 \dots i_N} &= \sum_{j_1 \dots j_N} \delta_{i_1 i_2} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1, j_2, \dots, j_N} \\ &= \sum_{j_3 \dots j_N} \left(\sum_{j_1 j_2} \delta_{j_1 j_2} a_{j_1 j_2} T_{j_1, j_2, \dots, j_N} \right) a_{i_3 j_3} \dots a_{i_N j_N} \\ &= \sum_{j_3 \dots j_N} a_{i_3 j_3} \dots a_{i_N j_N} S_{j_3 \dots j_N}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Sehingga $S_{i_3 \dots i_N}$ adalah tensor rank $(N - 2)$.

Proses mengalikan dengan $\delta_{i_1 i_2}$ dan menjumlahkan pada i_1 dan i_2 disebut sebagai kontraksi. Sebagai contoh, kita telah menunjukkan bahwa $A_i B_j$ sebagai *outer product* dari vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} , adalah tensor rank dua. Kontraksi dari tensor rank dua adalah tensor rank nol yang tidak lain adalah skalar

$$\sum_{ij} \delta_{ij} A_i B_j = \sum_i A_i B_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Hal ini tidak lain adalah perkalian dot antara \mathbf{A} dan \mathbf{B} .

Kita bisa menyatakan dengan sederhana, tensor baru dengan rank $(N - 2)$ akan diperoleh jika dua buah indeks tensor rank N dibuat sama kemudian dijumlahkan. (Kontraksi dalam Bahasa Jerman *verjüngung* yang dapat diartikan sebagai *rejuvenation* (Inggris)/peremajaan (Indonesia).) Jika rank sebuah tensor 3 atau lebih, kita dapat mengkontraksi dua buah indeks sebarang. Secara umum kita memperoleh tensor $(N - 2)$ yang berbeda jika kita kontraksikan pasangan indeks yang berbeda juga. Sebagai contoh dalam tensor rank tiga $T_{i_1 i_2 i_3} = A_{i_1} B_{i_2} C_{i_3}$, jika i_1 dan i_2 kita kontraksikan, diperoleh

$$\sum_i T_{i i i_3} = \sum_i A_i B_i C_{i_3} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) C_{i_3},$$

(ingat bahwa C_{i_3} dapat merepresentasikan komponen tertentu dari \mathbf{C} , dapat juga merepresentasikan komponen keseluruhan, yaitu vektor \mathbf{C} sendiri). Di lain pihak jika i_2 dan i_3 kita kontraksikan, diperoleh vektor yang lain

$$\sum_i T_{i_1 i i} = \sum_i A_{i_1} B_i C_i = A_{i_1} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Sehingga dengan mengkontraksikan indeks pertama dan kedua diperoleh sebuah skalar dikalikan dengan sebuah vektor \mathbf{C} , sedangkan kontraksi indeks kedua dan ketiga diperoleh sebuah skalar dikalikan dengan sebuah vektor \mathbf{A} .

Kontraksi merupakan salah satu operasi yang sangat penting dalam tensor. Sehingga harus diingat.

4.2.5 Konvensi Penjumlahan

Konvensi/perjanjian penjumlahan yang ditemukan Albert Einstein memberikan analisis tensor lebih menarik. Kita perhatikan bahwa dalam definisi tensor, (4.47), semua indeks yang dijumlahkan merupakan indeks berulang. Lebih dari itu, selang penjumlahannya (1 sampai 3) sudah kita ketahui dari pembahasan. Sehingga, tanpa mengurangi informasi, kita bisa membuang tanda penjumlahan dengan pemahaman subscript berulang haruslah dijumlahkan pada selang ini. Subscript berulang ini dinamakan subscript “dummy”. Subscript ini hanya bisa muncul paling banyak dua kali dalam satu suku. Pemilihan subscript dummy ini bebas. Menggantikan salah satu indeks dummy dengan yang lain merupakan cara/trik yang sering kita temui dalam analisis tensor yang harus dipelajari. Sebagai contoh, perkalian dot $\mathbf{A}\mathbf{B}$ dapat secara sama dinyatakan dengan $A_i B_i$ atau $A_k B_k$, karena keduanya menyatakan hal yang sama, yaitu

$$A_k B_k = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = \sum_{j=1}^3 A_j B_j = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Contoh 4.2.3. Nyatakan ekspresi $A_i B_j C_i$ dengan konvensi penjumlahan dalam suku notasi vektor biasa.

Solusi 4.2.3.

$$A_i B_j C_i = \left(\sum_{i=1}^3 A_i C_i \right) B_j = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) B_j.$$

Perhatikan di contoh tersebut bahwa indeks yang menentukan vektor mana yang harus kita kalikan dot, bukan dari urutan vektor. Urutan di sini tidak penting. Sehingga $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) B_j = A_k C_k B_j$ tetap valid. Huruf j di sini adalah subscript bebas, dan dapat digantikan dengan indeks lainnya kecuali subscript dummy. Tetapi, jika suku yang digunakan dalam persamaan, maka subscript bebas tiap suku dalam persamaan tersebut harus dinyatakan dengan huruf yang sama.

Dari sekarang dan selanjutnya, jika kita menuliskan sebuah kuantitas dengan N subscript, jika semua subscriptnya berbeda, maka kita mengasumsikan bahwa itu adalah tensor rank N . Jika dua di antaranya ada yang sama, maka tensor ini terkontraksi sehingga ranknya $(N - 2)$.

Contoh 4.2.4. (a) Berapakah rank dari tensor $\varepsilon_{ijk}A_lB_m$? (b) Berapakah rank dari tensor $\varepsilon_{ijk}A_jB_k$? (c) Nyatakan $\varepsilon_{ijk}A_jB_k$ dalam vektor biasa.

Solusi 4.2.4. (a) Karena ε_{ijk} adalah tensor rank tiga dan A_lB_m tensor rank dua, maka dengan teorema *outer product* $\varepsilon_{ijk}A_lB_m$ adalah tensor rank 5. (b) $\varepsilon_{ijk}A_jB_k$ terkontraksi dua kali sehingga menjadi tensor rank 1 ($5-4=1$). (c)

$$\varepsilon_{ijk}A_jB_k = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk}A_jB_k.$$

Jika $i = 1$, maka suku tak nol-nya berasal dari $j = 2$ atau 3 , karena ε_{ijk} sama dengan nol jika terdapat dua indeks yang sama. Maka jika $j = 2$ nilai $k = 3$. Jika $j = 3$ maka k haruslah 2 . Sehingga

$$\varepsilon_{1jk}A_jB_k = \varepsilon_{123}A_2B_3 + \varepsilon_{132}A_3B_2 = A_2B_3 - A_3B_2 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

Dengan cara yang sama

$$\varepsilon_{2jk}A_jB_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_2, \quad \varepsilon_{3jk}A_jB_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_3.$$

Sehingga

$$\varepsilon_{ijk}A_jB_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i.$$

Contoh 4.2.5. Tunjukkan bahwa

$$\varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Solusi 4.2.5.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}A_iB_jC_k &= (\varepsilon_{ijk}A_iB_j)C_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k C_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \\ &= \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dengan konvensi penjumlahan (4.56) secara sederhana

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.} \quad (4.60)$$

Banyak identitas vektor dapat dengan cepat dan elegan dibuktikan dengan persamaan ini.

Contoh 4.2.6. Tunjukkan bahwa

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Solusi 4.2.6.

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_i &= \varepsilon_{ijk} B_j C_k \\ [\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_l &= \varepsilon_{lmn} A_m (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_n = \varepsilon_{lmn} A_m \varepsilon_{njk} B_j C_k = \varepsilon_{nlm} \varepsilon_{njk} A_m B_j C_k \\ &= \varepsilon_{nlm} \varepsilon_{njk} A_m B_j C_k = (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) A_m B_j C_k \\ &= A_k B_l C_k - A_j B_j C_l = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) B_l - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) C_l. \end{aligned}$$

Karena komponen yang berkaitan sesuai, identitas tersebut terbukti.

Contoh 4.2.7. Tunjukkan bahwa

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Solusi 4.2.7.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \varepsilon_{kij} A_i B_j \varepsilon_{klm} C_l D_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_i B_j C_l D_m = A_l B_m C_l D_m - A_m B_l C_l D_m \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}). \end{aligned}$$

4.2.6 Medan Vektor

Sebuah medan tensor rank N , $T_{i_1 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3)$ adalah keseluruhan fungsi 3^N yang pada titik tertentu di ruang (x_1, x_2, x_3) memberikan sebuah tensor rank N .

Medan skalar adalah medan tensor rank nol. Kita telah menunjukkan dalam contoh 4.1.5 bahwa gradien medan skalar adalah medan vektor. Terdapat sebuah teorema untuk hubungan medan tensor.

Jika $T_{i_1 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3)$ adalah medan tensor rank N , maka

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T_{i_1 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3)$$

adalah medan tensor rank $N + 1$.

Bukti teorema ini adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} T_{i_1 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3) \right)' &= \frac{\partial}{\partial x'_i} T_{i_1 \dots i_N}(x'_1, x'_2, x'_3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'_i} \sum_{j_1 \dots j_N} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1 \dots j_N}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Dengan aturan rantai dan (4.31)

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

sehingga

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} T_{i_1 \dots i_N}(x_1, x_2, x_3) \right)' = \sum_j \sum_{j_1 \dots j_N} a_{ij} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_N j_N} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{j_1 \dots j_N}(x_1, x_2, x_3), \quad (4.61)$$

yang menunjukkan bagaimana tensor rank $N + 1$ bertransformasi. Sehingga teoremanya terbukti.

Untuk menyederhanakan penulisan, kita perkenalkan notasi lain yang berguna. Dari sekarang dan selanjutnya, operator diferensial $\partial/\partial x_i$ dinotasikan dengan ∂_i . Sebagai contoh

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = \partial_i \varphi,$$

yang merupakan komponen ke- i dari $\nabla \varphi$. Hal ini juga bisa merepresentasikan secara keseluruhan dari

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right).$$

Maka $\partial_i \varphi$ adalah sebuah vektor. (Perhatikan hanya memiliki sebuah subscript.)

Dengan cara yang sama

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_i \partial_i A_i = \partial_i A_i,$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \partial_i (\nabla \varphi)_i = \partial_i \partial_i \varphi.$$

Dengan notasi ini, identitas medan vektor dengan mudah didapatkan.

Contoh 4.2.8. Buktikan $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.

Solusi 4.2.8.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \partial_i (\nabla \times \mathbf{A})_i = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_i A_k && (\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i) \\ &= -\varepsilon_{jik} \partial_j \partial_i A_k \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k && (\text{ganti nama } i \text{ dan } j) \\ &= -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}).\end{aligned}$$

Sehingga $2\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. Maka $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$.

Contoh 4.2.9. Buktikan $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$.

Solusi 4.2.9.

$$\begin{aligned}[\nabla \times \nabla \varphi]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \varphi)_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi = -\varepsilon_{ikj} \partial_j \partial_k \varphi \\ &= -\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \varphi && (\text{ganti nama } j \text{ dan } k) \\ &= -[\nabla \times \nabla \varphi]_i.\end{aligned}$$

Dari sini $\nabla \times \nabla \varphi = 0$.

Contoh 4.2.10. Buktikan $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$.

Solusi 4.2.10.

$$\begin{aligned}[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\nabla \times \mathbf{A})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \\ &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l A_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m \\ &= \partial_m \partial_i A_m - \partial_l \partial_l A_i = \partial_i \partial_m A_m - \partial_l \partial_l A_i \\ &= [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})]_i - (\nabla^2 \mathbf{A})_i.\end{aligned}$$

Sehingga $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla^2 \mathbf{A})$, karena komponen yang berkaitan sesuai.

Contoh 4.2.11. Buktikan $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$.

Solusi 4.2.11.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \partial_i (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \partial_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k = \varepsilon_{ijk} \partial_i (A_j B_k) \\ &= \varepsilon_{ijk} (\partial_i A_j) B_k + \varepsilon_{ijk} A_j (\partial_i B_k) = (\varepsilon_{ijk} \partial_i A_j) B_k - A_j (\varepsilon_{ijk} \partial_i B_k) \\ &= (\nabla \times \mathbf{A})_k B_k - A_j (\nabla \times \mathbf{B})_j = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

Contoh 4.2.12. Buktikan

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}.$$

Solusi 4.2.12.

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} A_l B_m \\ &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \partial_j (A_l B_m) = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (B_m \partial_j A_l + A_l \partial_j B_m) \\ &= B_m \partial_m A_i - B_i \partial_l A_l + A_i \partial_m B_m - A_l \partial_l B_i \\ &= [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}]_i. \end{aligned}$$

Karena komponen yang berkaitan sesuai, dua ruas persamaan tersebut haruslah sama.

4.2.7 Aturan Pembagian

Cara lain untuk menentukan kuantitas dengan dua buah subscript adalah tensor rank dua adalah dengan aturan pembagian berikut ini.

Jika untuk sebarang vektor \mathbf{B} , hasil dari menjumlahkan indeks j pada perkalian $K_{ij}B_j$ adalah vektor lain \mathbf{A}

$$A_i = K_{ij}B_j, \quad (4.62)$$

dan (4.62) berlaku untuk semua sistem koordinat Cartesian, maka K_{ij} adalah benar-benar tensor rank dua.

Untuk membuktikan aturan pembagian, kita menguji komponen \mathbf{A} dalam sistem terotasi

$$A'_i = a_{il}A_l = a_{il}K_{lm}B_m.$$

Karena \mathbf{B} adalah sebuah vektor

$$B_m = a_{jm}B'_j.$$

Diperoleh

$$A'_i = a_{il}K_{lm}B_m = a_{il}K_{lm}a_{jm}B'_j = a_{il}a_{jm}K_{lm}B'_j.$$

Tetapi karena (4.62) berlaku untuk semua sistem

$$A'_i = K'_{ij}B'_j.$$

Dengan mengurangi kedua persamaan terakhir

$$(K'_{ij} - a_{il}A_{jm}K_{lm})B'_j = 0.$$

Karena B'_j sebarang

$$K'_{ij} = a_{il}a_{jm}K_{lm}.$$

Sehingga K_{ij} adalah tensor rank dua.

Dengan prosedur yang sama, kita dapat menunjukkan bahwa sebuah tensor rank M berhubungan secara linier dengan tensor rank N melalui sebuah kuantitas T dengan subscript sejumlah $M + N$, dan hubungan ini berlaku untuk semua sistem, maka T adalah tensor rank $M + N$.

Contoh 4.2.13. Jika $T_{ij}x_ix_j$ sama dengan sebuah skalar S , tunjukkan bahwa T_{ij} adalah tensor rank dua.

Solusi 4.2.13. Karena x_ix_j merupakan *outer product* dua buah vektor posisi, maka ini adalah tensor rank dua. Skalar S adalah tensor rank nol, sehingga dengan aturan pembagian T_{ij} adalah tensor rank dua ($2 + 0 = 2$). Kita bisa menunjukkannya dengan melihat komponennya dalam sistem terotasi

$$\begin{aligned} S &= T_{ij}x_ix_j = T_{lm}x_lx_m. \quad x_l = a_{il}x'_i; \quad x_m = a_{jm}x'_j. \\ S &= T_{lm}a_{il}x'_ia_{jm}x'_j = a_{il}a_{jm}T_{lm}x'_ix'_j, \\ S' &= T'_{ij}x'_ix'_j, \quad S' = S. \end{aligned}$$

Sehingga

$$(T'_{ij} - a_{il}a_{jm}T_{lm})x'_ix'_j = 0; \quad T'_{ij} = a_{il}a_{jm}T_{lm}.$$

Maka T_{ij} adalah tensor rank dua.

4.2.8 Sifat Simetri Tensor

Sebuah tensor $S_{ijk\dots}$ disebut simetrik dalam indeks i dan j jika

$$S_{ijk\dots} = S_{jik\dots}$$

Sebuah tensor $A_{ijk\dots}$ disebut anti simetrik dalam indeks i dan j jika

$$A_{ijk\dots} = -A_{jik\dots}$$

Sebagai contoh *outer product* \mathbf{r} dengan dirinya $x_i x_j$ adalah tensor simetrik rank dua, delta Kronecker δ_{ij} juga merupakan tensor simetrik rank dua. Di sisi lain tensor Levi-Civita ε_{ijk} adalah anti simetrik pada dua indeksnya, karena $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$.

Simetri adalah sifat fisik tensor. Sifat ini invarian dalam transformasi koordinat. Sebagai contoh, jika S_{ij} adalah tensor simetrik dalam sistem koordinat tertentu, dalam sebuah sistem terotasi

$$S'_{lm} = a_{li} a_{mj} S_{ij} = a_{mj} a_{li} S_{ji} = S'_{ml}.$$

Maka S_{ij} juga merupakan tensor simetrik dalam sistem yang baru. Hasil yang sama juga diperoleh untuk tensor anti simetrik.

Tensor simetrik rank dua S_{ijk} dapat dituliskan dalam bentuk

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix},$$

sedangkan tensor anti simetrik A_{ijk} memiliki bentuk

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

Sehingga sebuah tensor simetrik rank dua memiliki enam buah komponen bebas, sedangkan sebuah tensor anti simetrik rank dua hanya memiliki tiga buah komponen bebas.

Tensor rank dua sebarang T_{ij} dapat direpresentasikan sebagai jumlah sebuah tensor simetrik dan sebuah tensor anti simetrik. Jika diberikan T_{ij} , kita dapat membangun

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), \quad A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

Jelas bahwa S_{ij} simetrik dan A_{ij} anti simetrik. Selanjutnya

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij}.$$

Sehingga sebuah tensor rank dua sebarang memiliki bagian simetrik dan anti simetrik.

Dalam teori matriks sudah kita pelajari bahwa enam buah elemen bebas sebuah matriks dapat direpresentasikan dengan permukaan kuadrat. Dengan cara yang sama, sebuah tensor simetrik rank dua dapat dinyatakan dengan sebuah elipsoid yang unik

$$T_{ij} x_i x_j = \pm 1,$$

dengan tanda \pm adalah untuk determinan $|T_{ij}|$.

Tiga buah komponen bebas sebuah tensor anti simetrik rank dua juga dapat dinyatakan secara geometrik dengan sebuah vektor.

4.2.9 Pseudotensor

Salah satu alasan mengapa tensor berguna adalah tensor memungkinkan kita merumuskan hukum-hukum fisika yang bebas terhadap arah ruang tertentu. Kita juga mengharapkan bahwa tensor juga bebas apakah kita menggunakan sistem sumbu tangan kanan maupun sistem sumbu tangan kiri. Tetapi tidak semua tensor berperilaku sama ketika kita mentransformasikannya dari sistem sumbu tangan kanan menjadi tangan kiri.

Sejauh ini pembahasan kita terbatas pada rotasi dengan aturan tangan kanan. Aturan tangan kanan dinyatakan dengan menamai tiga buah vektor basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sedemikian rupa sehingga jempol memiliki arah \mathbf{e}_3 sedangkan empat buah jari lainnya dapat berputar (curl) dari \mathbf{e}_1 ke \mathbf{e}_2 tanpa harus melalui negatif \mathbf{e}_2 . Sebuah sistem tangan kanan dapat dirotasikan menjadi sistem tangan kanan yang lain. Determinan matriks rotasi sama dengan satu seperti pada contoh 4.1.2.

Sekarang mari kita perhatikan akibat inversi (balikan). Tiga buah vektor basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ dirubah menjadi $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ sehingga

$$\mathbf{e}'_1 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_3 = -\mathbf{e}_3.$$

Sumbu koordinat baru ini adalah sistem tangan kiri. Dinamakan aturan tangan kiri karena ketika kita menggunakan tangan kiri, jempol memiliki arah \mathbf{e}'_3 sedangkan empat buah jari lainnya dapat berputar (curl) dari \mathbf{e}'_1 ke \mathbf{e}'_2 tanpa harus melalui negatif \mathbf{e}'_2 . Perhatikan kita tidak dapat merotasikan aturan tangan kanan menjadi aturan tangan kiri.

Jika kita menggunakan aturan tangan kanan yang sama untuk definisi perkalian silang dalam semua sistem, sehingga dengan sumbu tangan kanan

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1,$$

dan dengan sumbu tangan kiri

$$(\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3 = -1.$$

Vektor posisi

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

jika dinyatakan dalam sistem yang dibalik menjadi

$$\mathbf{r}' = -x_1\mathbf{e}'_1 - x_2\mathbf{e}'_2 - x_3\mathbf{e}'_3.$$

Dengan kata lain hal ini adalah vektor yang sama $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, kecuali dalam sistem aksis koefisiennya menjadi negatif karena sumbunya dibalik. Vektor berperilaku seperti

ini ketika koordinatnya dirubah dari sistem tangan kanan menjadi sistem tangan kiri disebut vektor polar (kutub). Vektor ini adalah vektor reguler.

Perbedaan mendasar muncul ketika kita menemui perkalian silang dua buah vektor polar. Komponen $\mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ diberikan oleh

$$C_1 = A_2B_3 - A_3B_2,$$

dan begitu seterusnya. Sekarang jika sumbu koordinatnya dibalik, A_i menjadi $-A_i$, B_i menjadi $-B_i$ tetapi C_i menjadi $+C_i$ karena merupakan hasil perkalian dua buah bilangan (vektor) negatif. Hal ini tidak berperilaku seperti vektor polar terhadap inversi. Untuk membedakan, perkalian silang disebut *pseudo vektor*, juga dikenal sebagai vektor aksial.

Sebagai tambahan pada inversi, pencerminan (membalik satu sumbu) dan menukar dua buah sumbu juga mentransformasi sistem tangan kanan menjadi sistem tangan kiri. Matriks transformasi dari operasi kanan-kiri adalah sebagai berikut.

Inversi:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Pencerminan terhadap bidang x_2x_3

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Menukar sumbu x_1 dan x_2

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$x'_i = a_{ij}x_j.$$

Jelas bahwa determinan dari matriks transformasi $|a_{ij}|$ semuanya sama dengan -1. Sebuah sistem tangan kiri dapat dirotasikan menjadi sistem tangan kiri yang lain dengan sudut Euler sama seperti sistem tangan kanan. Maka, jika matriks (a_{ij}) mentransformasikan sistem tangan kanan menjadi sistem tangan kiri, atau sebaliknya, determinan $|a_{ij}|$ selalu sama dengan -1. Selanjutnya, kita dapat menunjukkan, dengan cara yang sama dengan matriks rotasi, elemennya juga memenuhi syarat ortogonalitas:

$$a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}.$$

Sehingga transformasi ini juga merupakan transformasi ortogonal.

Maka transformasi ortogonal dapat dibagi menjadi dua jenis: transformasi proper (sejati) dengan determinan $|a_{ij}|$ sama dengan 1, dan transformasi improper dengan determinan sama dengan -1. Jika transformasinya merupakan sebuah rotasi, maka ini merupakan transformasi proper. Jika transformasinya mengubah sistem tangan kanan menjadi sistem tangan kiri, maka transformasinya improper.

Sebuah pseudovektor dapat didefinisikan memenuhi aturan transformasi berikut

$$V'_i = |a_{ij}| a_{ij} V_j.$$

Jika transformasinya proper, vektor polar dan pseudotensor bertransformasi dengan cara yang sama. Jika transformasinya improper, vektor polar bertransformasi sebagai vektor reguler, tetapi pseudovektor berubah arah.

Pseudotensor didefinisikan dengan cara yang sama. Komponen sebuah pseudotensor rank N bertransformasi menurut aturan

$$T'_{i_1 \dots i_N} = |a_{ij}| a_{i_1 j_1} \dots a_{i_N j_N} T_{j_1 \dots j_N}, \quad (4.63)$$

yang benar-benar sama dengan tensor reguler, kecuali determinan $|a_{ij}|$.

Dari definisi ini:

1. *Outer product* dua buah pseudotensor rank M dan N adalah tensor reguler rank $M + N$.
2. *Outer product* sebuah pseudotensor rank M dan sebuah tensor rank N memberikan sebuah pseudotensor rank $M + N$.
3. Kontraksi sebuah pseudotensor rank N adalah sebuah pseudotensor rank $N - 2$.

Pseudotensor rank nol adalah sebuah pseudoskalar, yang berubah tanda terhadap inversi, sedangkan skalar tidak berubah. Sebuah contoh pseudoskalar adalah perkalian tiga skalar $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$. Perkalian silang $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ adalah pseudotensor rank satu, vektor polar \mathbf{C} adalah tensor reguler rank 1. Maka $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i \cdot C_i = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ adalah kontraksi pseudotensor rank dua $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i \cdot C_j$, sehingga sebuah pseudoskalar. Jika \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} adalah tiga buah sisi paralelepiped maka $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ adalah volumenya. Jika didefinisikan dengan cara ini, volume adalah pseudoskalar.

Kita telah menunjukkan ε_{ijk} adalah sebuah tensor isotropik rank tiga terhadap rotasi. Kita sekarang akan menunjukkan bahwa ε_{ijk} sama untuk kedua sistem baik tangan kanan maupun tangan kiri, maka ε_{ijk} dapat dianggap sebagai pseudotensor rank tiga. Hal ini karena jika kita menginginkan $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ terhadap transformasi proper dan improper, maka ε_{ijk} harus dinyatakan sebagai

$$\varepsilon'_{ijk} = |a_{ij}| a_{il} a_{jm} a_{nk} \varepsilon_{lmn}. \quad (4.64)$$

Karena

$$a_{il}a_{jm}a_{kn}\varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{ijk}|a_{ij}|,$$

seperti pada (4.54), mengikuti (4.64) yaitu

$$\varepsilon'_{ijk} = |a_{ij}|\varepsilon_{ijk}|a_{ij}| = |a_{ij}|^2\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}.$$

Sehingga ε_{ijk} adalah pseudotensor rank tiga.

Contoh 4.2.14. Misalkan T_{12}, T_{13}, T_{23} adalah komponen bebas sebuah tenor anti simetrik, buktikan bahwa $T_{23}, -T_{13}, T_{12}$ dapat dipandang sebagai komponen pseudovektor.

Solusi 4.2.14. Karena ε_{ijk} adalah pseudotensor rank tiga, T_{jk} adalah tensor rank dua, setelah kita kontraksikan dua kali

$$C_i = \varepsilon_{ijk}T_{jk}$$

hasilnya C_i adalah pseudotensor rank satu, yang tidak lain pseudovektor. Karena $T_{ij} = -T_{ji}$ maka

$$T_{21} = -T_{12}, T_{31} = -T_{13}, T_{32} = -T_{23}.$$

Sekarang

$$C_1 = \varepsilon_{123}T_{23} + \varepsilon_{132}T_{32} = T_{23} - T_{32} = 2T_{23},$$

$$C_2 = \varepsilon_{213}T_{13} + \varepsilon_{231}T_{31} = -T_{13} + T_{31} = -2T_{13},$$

$$C_3 = \varepsilon_{312}T_{12} + \varepsilon_{321}T_{21} = T_{12} - T_{21} = 2T_{12}.$$

Karena (C_1, C_2, C_3) adalah pseudovektor, maka $(T_{23}, -T_{13}, T_{12},)$ juga merupakan pseudovektor.

Contoh 4.2.15. Gunakan kenyataan bahwa ε_{ijk} adalah pseudotensor rank tiga untuk membuktikan $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ adalah sebuah pseudotensor.

Solusi 4.2.15. Misalkan $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sehingga

$$C_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k.$$

jika dinyatakan dalam sistem baru dengan $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ditransformasikan menjadi $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$, perkalian silangnya menjadi $\mathbf{C}' = \mathbf{A}' \times \mathbf{B}'$ yang dapat dituliskan dalam komponennya

$$C'_l = \varepsilon'_{lmn}A'_mB'_n$$

karena ε_{ijk} adalah pseudotensor

$$\varepsilon'_{lmn} = |a_{ij}| a_{li} a_{mj} a_{nk} \varepsilon_{ijk},$$

sehingga C'_l menjadi

$$C'_l = |a_{ij}| a_{li} a_{mj} a_{nk} \varepsilon_{ijk} A'_m B'_n.$$

Tetapi

$$A_j = a_{mj} A'_m, \quad B_k = a_{nk} B'_n,$$

sehingga

$$C'_l = |a_{ij}| a_{li} \varepsilon_{ijk} A_j B_k = |a_{ij}| a_{li} C_i.$$

Maka $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ adalah pseudovektor.

Karena persamaan matematik yang mendeskripsikan hukum-hukum fisika haruslah bebas sistem koordinat, kita tidak dapat menyamakan tensor dengan rank berbeda karena memiliki sifat yang berbeda terhadap rotasi. Sama seperti ini, dalam fisika klasik, kita tidak dapat menyamakan pseudotensor dengan tensor karena bertransformasi secara berbeda dengan inversi. Tetapi, terdapat kejutan alam dalam gaya lemah dapat membedakan sistem tangan kiri dengan sistem tangan kanan. Dengan memperkenalkan pseudotensor, peristiwa yang merusak paritas dapat dideskripsikan.

4.3 Contoh Fisika

4.3.1 Tensor Momen Inersia

Salah satu tensor rank dua yang paling sering ditemui adalah tensor momen inersia. Tensor ini menghubungkan momentum sudut \mathbf{L} dan kecepatan sudut $\boldsymbol{\omega}$ dari gerak rotasi sebuah benda tegar. Momentum sudut \mathbf{L} sebuah benda tegar yang berotasi pada titik tertentu diberikan oleh

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm,$$

dengan \mathbf{r} adalah vektor posisi dari titik tertentu (tetap) ke elemen massa dm dan \mathbf{v} adalah kecepatan dm . Kita telah menunjukkan

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \int \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \\ &= \int [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] dm. \end{aligned}$$

Jika kita tuliskan dalam notasi tensor dengan konvensi penjumlahan, komponen ke- i dari \mathbf{L} adalah

$$L_i = \int [r^2 \omega_i - x_j \omega_j x_i] dm.$$

Karena

$$r^2 \omega_i = r^2 \omega_j \delta_{ij},$$

$$L_i = \omega_j \int [r^2 \delta_{ij} - x_j x_i] dm = I_{ij} \omega_j,$$

dengan I_{ij} dikenal sebagai tensor momen inersia, diberikan oleh

$$I_{ij} = \int [x_k x_k \delta_{ij} - x_j x_i] dm. \quad (4.65)$$

Karena δ_{ij} dan $x_i x_j$ keduanya tensor rank dua, I_{ij} tensor simetrik rank dua. Secara eksplisit komponen tensor ini adalah

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \int (x_2^2 + x_3^2) dm & - \int x_1 x_2 dm & - \int x_1 x_3 dm \\ - \int x_2 x_1 dm & \int (x_1^2 + x_3^2) dm & - \int x_2 x_3 dm \\ - \int x_3 x_1 dm & - \int x_3 x_2 dm & \int (x_2^2 + x_1^2) dm \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

4.3.2 Tensor Stress

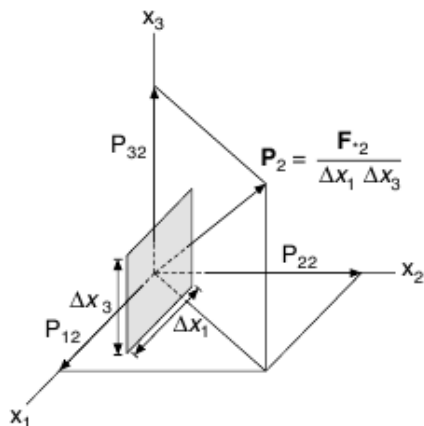
Nama tensor berasal dari gaya regangan dalam teori elastisitas. Di dalam benda elastik, terdapat gaya antara bagian bertetangga dari material. Bayangkan sebuah irisan pada benda, material di sebelah kanan memberikan gaya sebesar \mathbf{F} pada material di sebelah kiri, dan material pada sebelah kiri memberikan gaya yang sama dan berlawanan arah $-\mathbf{F}$ pada material di sebelah kanan.

Marilah kita uji material melalui luas yang kecil $\Delta x_1 \Delta x_3$, Gambar 4.3, dalam bidang imajiner yang tegak lurus sumbu x_2 . Jika luas daerah tersebut cukup kecil, kita mengharapkan gaya sebanding dengan luas. Sehingga kita dapat mendefinisikan stress/tekanan \mathbf{P}_2 sebagai gaya per satuan luas. Subscript 2 mengindikasikan bahwa gaya yang bekerja pada bidang tegak lurus sumbu x_2 positif. Komponen \mathbf{P}_2 sepanjang sumbu (x_1, x_2, x_3) secara berurutan diberikan oleh P_{12}, P_{22}, P_{32} . Sekarang kita dapat melihat pada luas daerah kecil pada bidang yang tegak lurus sumbu x_1 dan mendefinisikan komponen stress sebagai P_{11}, P_{21}, P_{31} . Sekarang bayangkan bahwa irisannya tegak lurus sumbu x_3 sehingga P_{13}, P_{23}, P_{33} juga bisa didefinisikan dengan cara yang sama. Jika $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ adalah vektor basis satuan, hubungan ini dapat dinyatakan

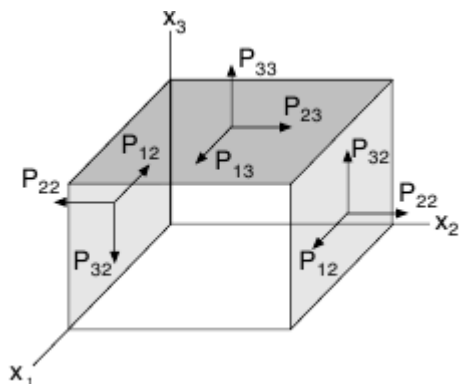
$$\mathbf{P}_j = P_{ij} \mathbf{e}_i. \quad (4.67)$$

Komponen stress berjumlah sembilan yaitu:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$



Gambar 4.3: Stress \mathbf{P}_2 , didefinisikan sebagai gaya per satuan luas, pada luas daerah yang kecil tegak lurus sumbu x_2 . Komponennya sepanjang tiga buah sumbu secara berurutan adalah P_{12} , P_{22} , P_{32}



Gambar 4.4: Sembilan buah komponen sebuah tensor stress pada sebuah titik dapat direpresentasikan sebagai gaya normal dan tangensial pada sebuah kubus tak hingga di sekeliling titik

Subscript pertama pada P_{ij} mengindikasikan arah dari komponen gaya, subscript kedua mengindikasikan arah normal pada permukaan tempat gaya bekerja.

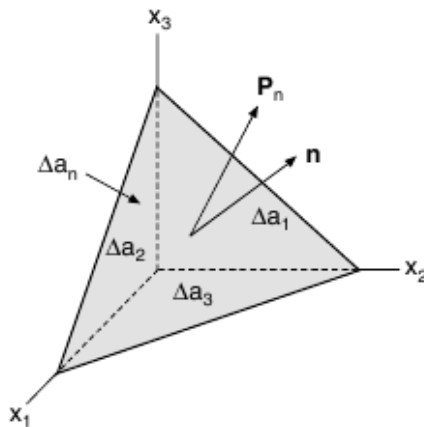
Arti fisis dari P_{ij} adalah sebagai berikut. Bayangkan kubus tak hingga banyaknya di sekeliling titik di dalam material, seperti Gambar 4.4. Agar jelas, gaya hanya dilukiskan dalam tiga permukaan. Terdapat gaya normal P_{ii} (regangan ditunjukkan tetapi dapat ditekan dengan panah terbalik) dan gaya tangensial/singgung P_{ij} ($i \neq j$, *shear*). Perhatikan bahwa dalam kesetimbangan, gaya dalam permukaan berlawanan haruslah sama besar dan berlawanan arah. Lebih dari itu (4.67) simetrik $P_{ij} = P_{ji}$, karena adanya kesetimbangan rotasional. Sebagai contoh gaya *shear* pada permukaan atas dalam arah x_2 adalah $P_{23}\Delta x_1\Delta x_2$. Torsi di sekitar sumbu x_1 karena gaya ini adalah $(P_{23}\Delta x_1\Delta x_2)\Delta x_3$. Torsi yang berlawanan karena gaya *shear* pada permukaan kanan adalah $(P_{32}\Delta x_3\Delta x_1)\Delta x_2$. Karena torsi di sekitar sumbu x_1 harus nol, maka

$$(P_{23}\Delta x_1\Delta x_2)\Delta x_3 = (P_{32}\Delta x_3\Delta x_1)\Delta x_2$$

dan kita memiliki

$$P_{23} = P_{32}.$$

Dengan argumen yang sama kita dapat membuktikan secara umum $P_{ij} = P_{ji}$, sehingga (4.68) simetrik.



Gambar 4.5: Gaya pada permukaan tetrahedron tak hingga. Syarat kesetimbangan mengharuskan tensor stress adalah tensor rank dua.

Sekarang kita akan membuktikan sembilan koeponen (4.68) adalah sebuah tensor, dikenal sebagai tensor stress. Untuk tujuan ini, kita membuat tetrahedron tak hingga dengan sisinya berarah sepanjang sumbu koordinat pada Gambar 4.5. Misalkan $\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3$ merupakan luas permukaan tegak lurus pada sumbu x_1, x_2, x_3 , gaya per satuan luasnya adalah $-\mathbf{P}_1, -\mathbf{P}_2, -\mathbf{P}_3$, karena permukaan ini arahnya ke sumbu negatif. Misalkan Δa_n adalah luas permukaan terinklinsi dengan satuan normal

eksterior \mathbf{n} dan \mathbf{P}_n adalah gaya per satuan luas permukaan ini. Gaya total pada keempat permukaan ini haruslah nol, meskipun terdapat gaya benda, seperti gravitasi. Gaya benda akan sebanding dengan volume, sedangkan semua gaya permukaan akan sebanding dengan luas. Karena dimensinya menuju nol, gaya benda akan sangat kecil dibandingkan dengan gaya permukaan dan dapat diabaikan. Sehingga

$$\mathbf{P}_n \Delta a_n - \mathbf{P}_1 \Delta a_1 - \mathbf{P}_2 \Delta a_2 - \mathbf{P}_3 \Delta a_3 = \mathbf{0}. \quad (4.69)$$

Karena Δa_1 adalah luas Δa_n yang diproyeksikan pada bidang $x_2 x_3$, sehingga

$$\Delta a_1 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \Delta a_n.$$

Dengan ekspresi yang sama untuk Δa_2 dan Δa_3 , kita dapat menuliskan (4.69) dalam bentuk

$$\mathbf{P}_n \Delta a_n = \mathbf{P}_1 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1) \Delta a_n + \mathbf{P}_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2) \Delta a_n + \mathbf{P}_3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) \Delta a_n,$$

atau

$$\mathbf{P}_n = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{P}_k. \quad (4.70)$$

Apa yang kita inginkan adalah mencari komponen tensor stress dalam sistem terotasi dengan sumbu $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Sekarang tanpa kehilangan generalisasi, kita dapat mengasumsikan sumbu ke- j sistem terotasi berarah sepanjang \mathbf{n} , yaitu

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}'_j.$$

Sehingga \mathbf{P}_n adalah \mathbf{P}'_j dalam sistem terotasi. Sehingga (4.70) menjadi

$$\mathbf{P}'_j = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{P}_k. \quad (4.71)$$

Dalam suku komponen-komponennya sepanjang sumbu koordinat, seperti pada (4.67)

$$\mathbf{P}'_j = P'_{ij} \mathbf{e}'_i, \quad \mathbf{P}_k = P_{lk} \mathbf{e}_l$$

persamaan terakhir dapat dituliskan

$$P'_{ij} \mathbf{e}'_i = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_k) P_{lk} \mathbf{e}_l.$$

Lakukan perkalian titik dengan \mathbf{e}'_i pada kedua ruas

$$P'_{ij} (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_i) = (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_k) P_{lk} (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}'_i).$$

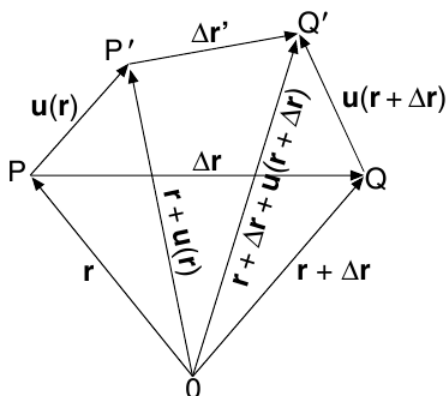
kita mempunyai

$$P'_{ij} = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_l) (\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_k) P_{lk}.$$

Karena $(\mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}_n) = a_{mn}$, kita melihat bahwa

$$P'_{ij} = a_{il} a_{jk} P_{lk}. \quad (4.72)$$

Sehingga barisan komponen stress (4.68) adalah tensor.



Gambar 4.6: Regangan dari sebuah benda elastik. Sebuah benda teregang apabila jarak relatif dua buah titik berdekatan berubah. Tensor strain bergantung pada variasi vektor perpindahan \mathbf{u} terhadap vektor posisi \mathbf{r} .

4.3.3 Tensor Strain dan Hukum Hooke

Jika kita memberikan gaya pada sebuah benda elastik, maka benda tersebut akan berdeformasi dan meregang. Deformasinya dikarakterisasi oleh perubahan jarak antara titik-titik bertetangga. Misalkan P pada \mathbf{r} dan Q pada $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ adalah dua titik berdekatan seperti pada Gambar 4.6. Ketika bendanya terdeformasi, P bergeser sejauh $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ ke titik P' dan Q sebesar $\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ ke titik Q' . Jika perubahan jarak kedua titik ini sama, yaitu jika $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$, posisi relatif kedua titik tidak berubah. Bagian benda tersebut tidak teregang, karena jarak PQ dan $P'Q'$ sama. Maka strain/regangan berasosiasi dengan variasi vektor perpindahan $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. Perubahan $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ dapat dituliskan

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}).$$

Dengan mengabaikan suku orde kedua dan yang lebih tinggi, komponen $\Delta\mathbf{u}$ dapat dituliskan

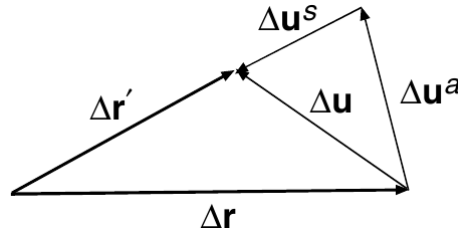
$$\begin{aligned} \Delta u_i &= u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \Delta x_3 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j. \end{aligned}$$

Karena u_i adalah vektor dan $\partial/\partial x_j$ adalah operator vektor, $\partial u_i/\partial x_j$ adalah *outer product* dari dua buah tensor rank satu. Sehingga $\partial u_i/\partial x_j$ adalah tensor rank dua. Tensor ini dapat didekomposisi dalam bagian simetrik dan anti simetrik

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.73)$$

Kita juga dapat membagi $\Delta\mathbf{u}$ menjadi dua bagian

$$\Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}^s + \Delta\mathbf{u}^a,$$



Gambar 4.7: Perubahan jarak antara dua buah titik berdekatan dalam benda elastik. Perubahan ini ditentukan oleh tensor strain simetrik.

dengan

$$\Delta u_i^s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta x_j,$$

$$\Delta u_i^a = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta x_j.$$

Suku anti simetrik (4.73) tidak mengubah jarak antara P dan Q karena hal berikut. Misalkan jarak $P'Q'$ adalah $\Delta \mathbf{r}'$. Jelas dari Gambar 4.6 yaitu

$$\Delta \mathbf{r}' = [\Delta \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})] - \mathbf{u}(\mathbf{r}).$$

Diperoleh

$$\Delta \mathbf{r}' - \Delta \mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^s + \mathbf{u}^a.$$

Sekarang

$$\mathbf{u}^a \cdot \Delta \mathbf{r} = \Delta u_i^a \Delta x_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Delta x_j \Delta x_i = 0.$$

Hal ini karena dalam ekspresi ini, baik i dan j adalah indeks yang dijumlahkan dan dapat ditukar. Sehingga $\Delta \mathbf{u}^a$ tegak lurus dengan $\Delta \mathbf{r}$ dan dapat dianggap sebagai panjang busur infinitesimal sebuah rotasi di sekitar ekor $\Delta \mathbf{r}$, seperti pada Gambar 4.7

Sehingga $\Delta \mathbf{u}^a$ tidak mengubah panjang vektor $\Delta \mathbf{r}$. Perubahan jarak antara dua titik berdekatan sebuah benda elastik ditentukan secara unik oleh suku simetrik (4.73)

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.74)$$

Kuantitas ini dinamakan tensor strain. Tensor strain ini memiliki peran penting dalam teori elastisitas karena mengukur derajat deformasi.

Karena gaya elastik satu dimensi dalam sebuah pegas diberikan oleh hukum Hooke $F = -kx$, kita bisa mengharapkan dalam media elastik tiga dimensi strain/regangan sebanding dengan stress/tekanan. Untuk kebanyakan benda padat dengan regangan

relatif beberapa persen, hal ini berlaku. Hubungan linier antara tensor strain dengan tensor stress diberikan oleh hukum Hooke

$$P_{ij} = c_{ijkl}E_{kl}, \quad (4.75)$$

dengan c_{ijkl} dikenal sebagai tensor elastisitas. Karena P_{ij} dan E_{kl} keduanya tensor rank dua, dengan aturan pembagian c_{ijkl} haruslah tensor rank empat. Terdapat 81 komponen dalam tensor rank empat, tetapi karena beberapa simetri jumlah komponen bebasnya dalam benda kristalin hanya 21. Jika bendanya isotropik, konstanta elastik direduksi lebih lanjut sehingga hanya dua. Kita tidak akan membahas hal ini secara mendalam karena merupakan subjek dari buku tentang elastisitas, di sini kita hanya menunjukkan konsep tensor sangat berguna dalam mendeskripsikan kuantitas fisik.

4.4 Latihan

1. Carilah matriks rotasi untuk

- (a) rotasi $\pi/2$ pada sumbu $-z$,
- (b) rotasi π pada sumbu x .

Jawab:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dengan menggunakan matriks transformasi (A) yang diberikan pada (4.20) tunjukkan bahwa

$$(A)(A^T) = (I),$$

dengan (I) adalah matriks identitas.

3. Dengan menggunakan matriks transformasi (A) yang diberikan pada (4.20), secara eksplisit buktikan bahwa

$$\sum_{i=1}^3 a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk},$$

(a) $j = 1, k = 1$ (b) $j = 1, k = 2$ (c) $j = 1, k = 3$.

4. Dengan menggunakan matriks transformasi (A) yang diberikan pada (4.20), secara eksplisit buktikan bahwa determinan (A) sama dengan 1.

5. Tunjukkan bahwa tidak terdapat tensor isotropik rank satu nontrivial (semuanya trivial).

Petunjuk: (1) Asumsikan terdapat sebuah tensor isotropik rank satu (A_1, A_2, A_3). Terhadap rotasi $A_1 = A'_1, A_2 = A'_2, A_3 = A'_3$ karena isotropik. (2) Lakukan rotasi sebesar $\pi/2$ pada sumbu x_3 dan tunjukkan bahwa $A_1 = 0, A_2 = 0$. (3) Rotasi pada sumbu x_1 akan memberikan $A_1 = 0$. (4) Sehingga hanya vektor nol yang merupakan tensor isotropik rank satu.

6. Misalkan

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Carilah kontraksi berikut

(a) $B_i = T_{ij}A_j$;

(b) $C_j = T_{ij}A_i$;

(c) $S = T_{ij}A_iA_j$.

Jawab: (a) $B_i = (5, 5, 10)$, (b) $C_j = (4, 6, 11)$, (c) $S = 35$.

7. Misalkan A_{ij} dan B_{ij} tensor rank dua dan

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Tunjukkan bahwa C_{ij} juga tensor rank dua.

8. Persamaan sebuah elips yang berpusat di titik asal berbentuk

$$A_{ij}x_ix_j = 1.$$

Buktikan bahwa A_{ij} tensor rank dua.

Petunjuk: Dalam sistem terotasi, persamaan permukaan $A'_{ij}x'_ix'_j = 1$.

9. Buktikan

$$A_i = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

adalah sebuah vektor 2 dimensi.

10. Buktikan bahwa matriks 2×2 berikut merepresentasikan tensor rank dua dalam ruang dua dimensi

$$\begin{aligned} \text{(a)} & \begin{pmatrix} -x_1x_2 & x_1^2 \\ -x_2^2 & x_1x_2 \end{pmatrix}, & \text{(b)} & \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}, \\ \text{(c)} & \begin{pmatrix} -x_1x_2 & -x_2^2 \\ x_1^2 & x_1x_2 \end{pmatrix}, & \text{(d)} & \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & x_2^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Petunjuk: Buktikan bahwa matriks tersebut merupakan *outer product* dari vektor posisi dalam persamaan terakhir.

11. Tunjukkan secara eksplisit bahwa

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}$$

dengan (a) menuliskan semua suku tak nol

$$\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn},$$

dan (b) mengekspansikan determinan

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix}$$

pada elemen baris pertama.

12. Tunjukkan bahwa ε_{ijk} dapat dituliskan

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}.$$

Petunjuk: Buktikan bahwa determinan tersebut memiliki sifat yang sama dengan ε_{ijk} .

13. Buktikan

- (a) $\sum_{ij} \varepsilon_{ijk} \delta_{ij} = 0$;
- (b) $\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$;
- (c) $\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$.

14. Persamaan berikut dituliskan dengan konvensi penjumlahan, buktikan

- (a) $\delta_{ij} \delta_{jk} \delta_{ki} = 3$;
- (b) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \varepsilon_{mni} = \varepsilon_{jnl}$.

Petunjuk: (a) Ingat bahwa δ_{ij} merupakan tensor substitusi, (b) Gunakan (4.60).

15. Dengan menggunakan konvensi penjumlahan, buktikan bahwa

- (a) $A_i \delta_{ij} = A_j$;
- (b) $B_j \delta_{ij} = B_i$;
- (c) $\delta_{1j} \delta_{j1} = 1$;

(d) $\delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{ii} = 3$;

(e) $\delta_{ij}\delta_{jl} = \delta_{il}$.

16. Dengan subscript dan konvensi penjumlahan tunjukkan bahwa

(a) $\partial_i x_j = \delta_{ij}$;

(b) $\partial_i (x_j x_j)^{1/2} = \frac{1}{(x_j x_j)^{1/2}} x_i$.

Petunjuk: (a) x_1, x_2, x_3 merupakan variabel bebas. (b) $\partial_i (x_j x_j) = 2x_j \partial_i x_j$.

17. Persamaan berikut dituliskan dengan konvensi penjumlahan

(a) $\partial_i x_i = 3$, (b) $\partial_i (x_j x_j)^{1/2} = (x_j x_j)^{-1/2} x_i$, nyatakan dalam notasi vektor biasa

Jawab: (a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$, (b) $\nabla r = \mathbf{r}/r$.

18. Persamaan berikut dituliskan dengan konvensi penjumlahan

(a) $V_i A_j B_i \mathbf{e}_j$; (b) $c A_i B_j \delta_{ij}$;
 (b) $A_l B_j \varepsilon_{ijk} \delta_{li} \mathbf{e}_k$; (d) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} A_i B_j C_l D_m$,

nyatakan dalam notasi vektor biasa

Jawab : (a) $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}$, (b) $c\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, (c) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, (d) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

19. Gunakan teknik tensor Levi-Civita untuk membuktikan identitas berikut

(a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$,

(b) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

20. Gunakan teknik tensor Levi-Civita untuk membuktikan identitas berikut

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \phi(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{A}.$$

21. Misalkan

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Carilah bagian simetrik dan anti simetrik dari T_{ij} .

Jawab: $S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 4 & 2.5 \\ 1.5 & 2.5 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1.5 \\ -1 & 0 & 2.5 \\ -1.5 & -2.5 & 0 \end{pmatrix}$.

22. Jika S_{ij} tensor simetrik dan A_{ij} tensor anti simetrik buktikan bahwa

$$S_{ij} A_{ij} = 0.$$

23. Misalkan φ sebuah skalar, V_i sebuah pseudovektor, T_{ij} adalah tensor rank dua, dan misalkan

$$A_{ijk} = \varepsilon_{ijk}\varphi, \quad B_{ij} = \varepsilon_{ijk}V_k, \quad C_i = \varepsilon_{ijk}T_{jk}.$$

Tunjukkan bahwa A_{ijk} adalah pseudotensor rank tiga, B_{ij} tensor rank dua dan C_i pseudovektor.

24. Carilah tensor strain untuk material isotropik elastik ketika dikenai

- (a) Sebuah deformasi tarikan $\mathbf{u} = (0, 0, \alpha x_3)$;
 (b) Sebuah deformasi shear $\mathbf{u} = (\beta x_3, 0, 0)$.

Jawab: (a) $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$; (b) $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bagian II

**Persamaan Diferensial dan
Transformasi Laplace**

5

Persamaan Diferensial Biasa

Hukum-hukum fisika yang penting dan signifikan berkaitan dengan persoalan dalam teknik dan ilmu alam biasanya dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial. Sebuah persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang melibatkan turunan sebuah fungsi yang tidak diketahui yang bergantung satu variabel atau lebih. Jika fungsi yang tidak diketahui hanya bergantung pada satu variabel bebas, maka persamaannya disebut sebagai persamaan diferensial biasa.

Dalam bab ini, setelah kita mengulang kembali metode standar untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu, kita akan memberikan perlakuan menyeluruh persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan, yang sering dijumpai dalam banyak persoalan fisis. Kita akan menggunakan getaran mekanik dan rangkaian listrik sebagai contoh yang ilustratif. Kemudian kita akan membicarakan sistem persamaan diferensial terdang dan aplikasinya.

Solusi deret persamaan diferensial akan kita bicarakan dalam bab fungsi khusus. Metode lain yang penting untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah transformasi Laplace yang akan kita bicarakan dalam bab setelah ini.

5.1 Persamaan Diferensial Orde Satu

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah mencari sebuah cara untuk mengeliminasi turunan dalam persamaan tersebut sehingga hubungan antara variabel bergantung dan bebas bisa diperoleh. Untuk persamaan diferensial orde satu, ini bisa dilakukan dengan integrasi. Persamaan diferensial paling sederhana berbentuk

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{5.1}$$

dengan $f(x)$ adalah fungsi dari x . Kita tahu dari kalkulus bahwa

$$y(x) = \int_a^x f(x') dx' \quad (5.2)$$

merupakan sebuah solusi. Persamaan (5.1) hanya mengandung turunan pertama dari y dan dinamakan sebagai persamaan diferensial orde satu. Orde persamaan diferensial sama dengan orde turunan paling tinggi dari persamaan tersebut. Solusi (5.2) disebut sebagai solusi umum dan mengandung konstanta integrasi sebarang. Jika integral (5.2) ada, maka dengan definisi terdapat sebuah fungsi $F(x)$, sedemikian rupa sehingga

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x), \quad dF(x) = f(x) dx$$

dan

$$y(x) = \int_a^x dF(x') = F(x) + (a).$$

Dengan pemahaman ini, kita biasa menggunakan notasi untuk integral tak tentu

$$y(x) = \int f(x) dx + C$$

dengan $C = F(a)$ merupakan konstanta sebarang. Jika kita mengetahui bahwa nilai y adalah y_0 ketika $x = x_0$, maka konstanta bisa diketahui. Syarat “ $y = y_0$ ketika $x = x_0$ ” disebut sebagai “kondisi awal” atau “syarat batas.” Agar memenuhi persamaan dan syarat batas, kita bisa menggunakan integral tentu berikut:

$$\int_{y_0}^y dy' = \int_{x_0}^x f(x') dx',$$

yang bisa dituliskan dalam bentuk

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x') dx' + y_0.$$

Ini dikenal sebagai solusi spesifik. (Istilah “solusi khusus” biasanya digunakan, tetapi, hal ini bisa membingungkan, karena “solusi khusus” juga digunakan dalam solusi persamaan tak homogen, yang akan kita bicarakan belakangan.) Dalam kebanyakan aplikasi fisis, solusi spesifik adalah yang kita cari. Persoalan fisis, ketika diformulasikan dalam bahasa matematik, biasanya mengandung sebuah persamaan diferensial dan sejumlah syarat batas dan/atau kondisi awal. Persoalan terselesaikan ketika solusi spesifik ditemukan.

5.1.1 Persamaan dengan Variabel Separabel

Jika sebuah persamaan bisa dituliskan dalam bentuk

$$f(x) dx + g(y) dy = 0$$

solusinya bisa dengan mudah diperoleh dalam bentuk

$$\int f(x) dx + \int g(y) dy = C.$$

Metode ini dinamakan sebagai solusi dengan separasi (pemisahan) variabel dan merupakan salah satu metode yang paling sering digunakan.

Sebagai contoh, persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

bisa diselesaikan dengan memperhatikan bahwa persamaannya dapat dituliskan sebagai

$$y dy + x dx = 0.$$

Jadi solusinya diberikan oleh

$$\int y dy + \int x dx = C$$

atau

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C.$$

Solusi umumnya bisa dituliskan sebagai

$$y(x) = (C' - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

yang ekuivalen dengan

$$F(x, y) = C'$$

dengan

$$F(x, y) = x^2 + y^2.$$

Jelaslah solusi umumnya adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari $\sqrt{C'}$ berpusat di titik asal. Jika $x = 5$, $y = 0$, adalah sebuah titik pada lingkaran, maka solusi spesifiknya adalah

$$x^2 + y^2 = 25$$

Solusi spesifik ini bisa juga diperoleh dari integral tentu

$$\int_0^y y' dy' + \int_5^x x' dx' = 0$$

yang memberikan hasil yang sama

$$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}5^2 = 0.$$

5.1.2 Persamaan Tereduksikan dalam Jenis Separabel

Persamaan tertentu dalam bentuk

$$g(x, y) dy = f(x, y) dx \quad (5.3)$$

yang tak separabel bisa dibentuk separabel dengan mengganti variabel. Hal ini selalu bisa dilakukan, jika rasio $f(x, y)/g(x, y)$ merupakan fungsi y/x .

Misalkan $u = y/x$ dan fungsi y/x adalah $h(u)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = h(u).$$

Karena y merupakan fungsi dari x , demikian juga dengan u . Diperoleh $y(x) = xu(x)$ dan

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}.$$

Jadi persamaan diferensialnya bisa dituliskan sebagai

$$u + x \frac{du}{dx} = h(u),$$

atau

$$x \frac{du}{dx} = h(u) - u.$$

Jelaslah bahwa ini separabel

$$\frac{du}{h(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

Jadi kita bisa memperoleh $u(x)$ dan solusi persamaan diferensial asalnya adalah

$$y = xu(x).$$

Sebagai contoh, jika

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + xy}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}$$

kemudian dengan $u = y/x$, $h(u) = u^2 + u$. Karena $h(u) - u = u^2$, jadi

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$

dan

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

yang memberikan

$$-\frac{1}{u} + C = \ln x.$$

Karena $u = y/x$, solusi persamaan diferensial asalnya diberikan oleh

$$\frac{x}{y} + \ln x = C.$$

5.1.3 Persamaan Diferensial Eksak

Anggap kita akan mencari sebuah persamaan diferensial untuk kurva berikut:

$$F(x, y) = C.$$

Pertama lihat dua titik yang berdekatan (x, y) dan $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, keduanya berada pada kurva yang spesifik. Jika kurva dikarakterisasi oleh $C = k$, maka

$$F(x, y) = k, \quad F(x + \Delta x, y + \Delta y) = k.$$

Jelaslah selisih keduanya sama dengan nol

$$\Delta F = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Selisihnya bisa dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) \\ &\quad + F(x, y + \Delta y) - F(x, y) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dengan pemahaman Δx dan Δy mendekati nol sebagai batas, kita bisa menggunakan definisi turunan parsial

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) &= \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x, \\ F(x, y + \Delta y) - F(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y \end{aligned}$$

untuk menuliskan (5.4) sebagai

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y$$

atau

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

Ini dikenal sebagai turunan total. Karena $\Delta F = 0$, maka kita mempunyai

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0. \quad (5.5)$$

Ini adalah persamaan diferensial yang merepresentasikan kurva $F(x, y) = C$. Dengan kata lain, solusi persamaan diferensial dalam bentuk (5.5) diberikan oleh $F(x, y) = C$.

Sekarang misalkan

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y) \quad (5.6)$$

jadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} g(x, y). \end{aligned}$$

Karena urutan penurunan bisa ditukarkan sepanjang fungsinya memiliki turunan parsial kontinu

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

kita mempunyai

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} g(x, y). \quad (5.7)$$

Persamaan diferensial sebarang dengan bentuk

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$$

yang memenuhi (5.7) dikenal sebagai persamaan eksak. Sebuah persamaan eksak bisa dinyatakan sebagai $dF = 0$, dengan dF adalah turunan total dan $F(x, y) = C$ merupakan solusinya. Fungsi $F(x, y)$ bisa diperoleh dengan mengintegrasikan dua buah persamaan pada (5.6).

Sebagai contoh, persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{xy^2}{2 + x^2y} = 0$$

bisa dituliskan dalam bentuk

$$(2 + x^2y) dy + xy^2 dx = 0.$$

Karena

$$\frac{\partial}{\partial x} (2 + x^2y) = 2xy, \quad \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) = 2xy$$

adalah sama, persamaan diferensialnya eksak. Jadi, kita bisa mencari solusi umum dalam bentuk

$$F(x, y) = C$$

dengan

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2 + x^2y, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = xy^2.$$

Persamaan pertama memberikan

$$F(x, y) = 2y + \frac{1}{2}x^2y^2 + p(x).$$

Persamaan kedua meminta

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = xy^2 + \frac{d}{dx}p(x) = xy^2.$$

Jadi

$$\frac{d}{dx}p(x) = 0, p(x) = k.$$

Maka solusinya adalah

$$F(x, y) = 2y + \frac{1}{2}x^2y^2 + k = C.$$

Kombinasikan dua buah konstanta, kita peroleh solusinya

$$2y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C'.$$

5.1.4 Faktor Integrasi

Sebuah faktor pengali yang mengubah persamaan diferensial tak eksak menjadi yang eksak disebut sebagai faktor integrasi. Sebagai contoh, persamaan

$$y \, dx + (x^2y^3 + x) \, dy = 0 \quad (5.8)$$

tidak eksak. Jika kita kalikan dengan $(xy)^{-2}$, hasilnya adalah

$$\frac{1}{x^2y} \, dx + \left(y + \frac{1}{xy^2} \right) \, dy = 0$$

yang eksak. Karena

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2y} \right) &= \frac{-1}{x^2y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(y + \frac{1}{xy^2} \right) &= \frac{-1}{x^2y^2}. \end{aligned}$$

Jadi dengan definisi, $(xy)^{-2}$ merupakan faktor integrasi.

Dengan metode persamaan diferensial eksak, kita mempunyai

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) &= \frac{1}{x^2y}, \\ F(x, y) &= -\frac{1}{xy} + q(y) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (x, y) &= \frac{1}{xy^2} + \frac{d}{dy} q(y) = y + \frac{1}{xy^2}, \\ \frac{d}{dy} q(y) &= y, \quad q(y) = \frac{1}{2}y^2. \end{aligned}$$

Maka solusi persamaan asalnya adalah

$$-\frac{1}{xy} + \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Kadang kita bisa mencari faktor integrasi dengan inspeksi. Sebagai contoh, kita bisa menuliskan ulang (5.8) sebagai

$$(y \, dx + x \, dy) + x^2y^2 \, dy = 0$$

dan menyadari $y \, dx + x \, dy = d(xy)$. Maka persamaan

$$d(xy) + x^2y^3 \, dy = 0$$

bisa diselesaikan dengan mengalikannya dengan faktor $(xy)^{-2}$, karena akan mengubah persamaannya menjadi

$$\frac{d(xy)}{(xy)^2} + y \, dy = 0$$

yang akan memberikan hasil

$$-\frac{1}{xy} + \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Secara teoretik sebuah faktor integrasi ada untuk setiap persamaan diferensial dalam bentuk $f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$. Sayangnya tidak ada aturan umum yang diketahui untuk mencarinya. Untuk kasus khusus persamaan diferensial tertentu, faktor integrasi bisa dicari secara sistematis.

Kita mengasumsikan bahwa

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$$

bukanlah persamaan diferensial eksak. Kita ingin mencari faktor integrasi μ , sehingga

$$\mu f(x, y) dx + \mu g(x, y) dy = 0$$

eksak. Agar persamaan ini eksak, maka harus memenuhi syarat

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu f) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu g)$$

yang memberikan

$$\mu \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial x} g - \frac{\partial \mu}{\partial y} f. \quad (5.9)$$

Sekarang kita perhatikan semua kemungkinan berikut.

Faktor Integrasi μ Hanya Merupakan Fungsi x

Dalam kasus ini (5.9) menjadi

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Jika ruas kiri persamaan ini juga merupakan fungsi x saja

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) + G(x),$$

maka jelaslah

$$\frac{d\mu}{\mu} = G(x) dx,$$

yang memberikan

$$\ln \mu = \int G(x) dx$$

atau

$$\mu = e^{\int G(x) dx}.$$

Sebagai contoh persamaan diferensial

$$(3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$$

tidak eksak. Jika kita tuliskan dalam bentuk $f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$, kita melihat bahwa

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3xy + y^2) = 3x + 2y, \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy) = 2x + y\end{aligned}$$

tidak sama. Tetapi

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}$$

merupakan fungsi x saja. Jadi faktor integrasinya diberikan oleh

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x.$$

Kalikan persamaan asalnya dengan x , diperoleh

$$(3x^2y + xy^2) dx + (x^3 + x^2y) dy = 0.$$

Persamaan ini eksak, karena

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + xy^2) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2y).$$

Integralkan kedua persamaan

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + xy^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + x^2y$$

kita memperoleh

$$F(x, y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2.$$

Jadi solusinya adalah

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C.$$

Faktor Integrasi μ Hanya Merupakan Fungsi y

Dalam kasus ini (5.9) menjadi

$$\frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y},$$

Jika ruas kiri persamaan juga hanya merupakan fungsi y , maka

$$\frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) = -H(y),$$

maka jelaslah

$$\frac{d\mu}{\mu} = H(y) dy$$

yang memberikan

$$\ln \mu = \int H(y) dy$$

atau

$$\mu = e^{\int H(y) dy}.$$

5.2 Persamaan Diferensial Linier Orde Satu

Persamaan diferensial orde satu yang penting memiliki bentuk

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad (5.10)$$

di sini baik variabel bergantung y dan turunan pertamanya y' berderajat satu, dan $p(x)$ maupun $q(x)$ merupakan fungsi kontinu dari variabel bebas x . Persamaan jenis ini dikenal sebagai persamaan diferensial orde satu. Kita akan menurunkan solusi umum persamaan ini.

Pertama, jika $q(x) = 0$, kita mempunyai

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y.$$

Dalam kasus ini

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx}.$$

Untuk kasus umum, kita memperkenalkan koefisien variabel

$$y(x) = f(x)e^{-\int p(x) dx}.$$

Dengan solusi uji ini, (5.10) menjadi

$$\frac{dF(x)}{dx} e^{-\int p(x) dx} - p(x)f(x)e^{-\int p(x) dx} + p(x)f(x)e^{-\int p(x) dx} = q(x),$$

atau

$$\frac{dF(x)}{dx} e^{-\int p(x) dx} = q(x).$$

Jadi

$$f(x) = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx + C.$$

Sehingga solusi persamaan diferensial linier orde satu (5.10) diberikan oleh

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x)e^{-\int p(x) dx} \\ &= e^{-\int p(x) dx} \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + Ce^{-\int p(x) dx}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Untuk menggunakan rumus ini, penting untuk mengingat persamaan diferensial dalam bentuk $y' + p(x)y = q(x)$. Dengan kata lain, koefisien turunan haruslah satu.

Solusi ini memungkinkan kita untuk melihat

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

yang merupakan faktor integrasi persamaan ini. Dalam suku $\mu(x)$, (5.11) bisa dituliskan sebagai

$$\mu(x)y = \int \mu(x)q(x) dx + C,$$

yang merupakan solusi persamaan diferensial

$$\frac{d}{dx} [\mu(x)y] = \mu(x)q(x). \quad (5.12)$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\mu(x)y] &= \mu(x) \frac{dy}{dx} + \left[\frac{d}{dx} \mu(x) \right] y, \\ \frac{d}{dx} \mu(x) &= \frac{d}{dx} e^{\int p(x) dx} = e^{\int p(x) dx} [p(x)] = \pi(x)p(x). \end{aligned}$$

Maka (5.12) menjadi

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x),$$

yang dengan jelas menunjukkan bahwa $\mu(x)$ merupakan faktor integrasi persamaan asalnya.

Jadi, cara yang lebih mudah untuk menggunakan rumus yang rumit (5.11) adalah dengan menuliskannya dalam suku faktor integrasi

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)q(x) dx + C \right]$$

dengan

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}.$$

Contoh 5.2.1. Carilah solusi umum persamaan diferensial berikut:

$$x \frac{dy}{dx} + (1+x)y = e^x.$$

Solusi 5.2.1. Ini adalah persamaan diferensial linier orde satu

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1+x}{x}y = \frac{e^x}{x}.$$

Faktor integrasinya diberikan oleh

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1+x}{x} dx}.$$

Karena

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1+x}{x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx = \ln x + x, \\ \mu(x) &= e^{\ln x + x} = xe^x. \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{xe^x} \left[\int xe^x \frac{e^x}{x} dx + C \right] \\ &= \frac{1}{xe^e} \left[\int e^{2x} dx + C \right] = \frac{1}{xe^x} \left[\frac{e^{2x}}{2} + C \right]. \end{aligned}$$

Jadi solusinya diberikan oleh

$$y = \frac{e^x}{2x} + C \frac{e^{-x}}{x}.$$

5.2.1 Persamaan Bernoulli

Persamaan diferensial dengan jenis

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

dikenal sebagai persamaan Bernoulli, yang ditemukan oleh matematikawan Swiss James Bernoulli (1654 – 1705). Ini adalah persamaan diferensial non linier jika $n \neq 0$ atau 1. Tetapi, bisa kita transformasikan menjadi persamaan linier dengan mengalikan kedua ruas dengan sebuah faktor $(1-n)y^{-n}$

$$(1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = (1-n)q(x).$$

Karena

$$(1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y^{1-n})$$

persamaan terakhir bisa dituliskan sebagai

$$\frac{d}{dx}(y^{1-n}) + (1-n)p(x)y^{1-n} = (1-n)q(x),$$

yang merupakan persamaan linier orde satu dalam y^{1-n} . Kita bisa memperoleh y^{1-n} dari persamaan ini, sehingga solusi persamaan diferensial asalnya bisa diperoleh.

Contoh 5.2.2. Carilah solusi dari

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2y^3$$

dengan syarat $y(1) = 1$.

Solusi 5.2.2. Ini adalah persamaan Bernoulli dengan $n = 3$. Kalikan persamaan ini dengan $(1 - 3)y^{-3}$, kita mempunyai

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} - 2\frac{1}{x}y^{-2} = -2x^2$$

yang bisa dituliskan sebagai

$$\frac{d}{dx}y^{-2} - \frac{2}{x}y^{-2} = -2x^2.$$

Ini merupakan persamaan orde satu dalam y^{-2} dan bisa diselesaikan dengan mengalikan dengan faktor integrasi μ

$$\mu = e^{\int(-\frac{2}{x}) dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

Jadi

$$\frac{1}{x^2}y^{-2} = \int \frac{1}{x^2}(-2x^2) dx + C = -2x + C.$$

Pada $x = 1, y = 1$, sehingga

$$1 = -2 + C, C = 3.$$

Oleh karena ini solusi spesifik persamaan diferensial non liniernya adalah

$$y^{-2} = -2x^3 + 3x^2$$

atau bisa dituliskan sebagai

$$y(x) = (3x^2 - 2x^3)^{-1/2}.$$

5.3 Persamaan Diferensial Linier Orde Tinggi

Banyak persoalan fisis bisa diformulasikan dengan persamaan diferensial linier. Persamaan diferensialnya bisa dituliskan

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + p(x)\frac{d}{dx}y(x) + q(x)y(x) = h(x) \quad (5.13)$$

dan merupakan persamaan non linier jika tidak bisa dituliskan dalam bentuk ini. Untuk menyederhanakan penulisan, persamaan ini bisa dituliskan sebagai

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x).$$

Fitur khas dari persamaan ini adalah bentuknya linier dalam fungsi yang tidak diketahui y dan turunannya. Sebagai contoh: $y'^2 = x$ tidak linier karena suku y'^2 . Persamaan $yy' = 1$ juga tidak linier karena perkalian yy' . Fungsi p dan q disebut koefisien dari persamaan.

Jika $h(x) = 0$ untuk semua x yang ditinjau, persamaannya menjadi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

dan disebut homogen. Jika $h(x) \neq 0$ disebut sebagai persamaan tak homogen.

Cara penulisan lain yang sering digunakan untuk menuliskan persamaan diferensial yaitu dengan menggunakan notasi operator. Simbol turunan $\frac{d}{dx}$ digantikan dengan D :

$$\frac{dy}{dx} = Dy, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y,$$

begitu seterusnya. Jadi (5.13) bisa dituliskan sebagai

$$D^2y + p(x) dy + q(x)y = h(x),$$

atau

$$[D^2 + p(x) d + q(x)]y = h(x).$$

Jika kita definisikan

$$f(D) = D^2 + p(x) d + q(x),$$

maka persamaannya menjadi

$$f(D)y = h(x).$$

Sebuah teorema mendasar tentang persamaan diferensial linier homogen adalah sebagai berikut. Jika $f(D)$ adalah orde dua, maka terdapat dua buah solusi linier yang bebas y_1 dan y_2 . Selanjutnya, kombinasi linier sebarang dari y_1 dan y_2 juga merupakan solusi. Hal ini berarti jika

$$f(D)y_1 = 0, \quad f(D)y_2 = 0, \tag{5.14}$$

kemudian dengan dua buah konstanta sebarang c_1 dan c_2

$$f(D)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0.$$

Ini sangat mudah untuk dibuktikan

$$\begin{aligned} f(D)(c_1y_1 + c_2y_2) &= f(D)c_1y_1 + f(D)c_2y_2 \\ &= c_1f(D)y_1 + c_2f(D)y_2 = 0. \end{aligned}$$

Untuk langkah terakhir kita menggunakan (5.14). Penting untuk mengingat bahwa teorema ini tidak berlaku untuk persamaan diferensial non linier atau tak homogen.

Untuk membahas solusi umum persamaan diferensial tak homogen $f(D)y = h(x)$, kita mendefinisikan fungsi pelengkap (komplementer) y_c dan solusi khusus y_p . Fungsi komplementer merupakan solusi persamaan tak homogenya, yaitu

$$f(D)y_c = 0.$$

Jika ini adalah persamaan orde n , maka y_c akan mengandung n buah konstanta sebarang.

Solusi khusus merupakan sebuah fungsi ketika ini disubstitusikan ke dalam persamaan tak homogen asalnya, hasilnya merupakan sebuah identitas

$$f(D)y_p(x) = h(x).$$

Solusi khusus bisa diperoleh dengan berbagai metode yang akan kita bicarakan belakangan. Tidak terdapat konstanta sebarang dalam solusi khusus.

Solusi paling umum persamaan diferensial tak homogen adalah jumlah dari fungsi komplementer dan solusi khusus

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x). \quad (5.15)$$

Ini merupakan solusi karena

$$f(D)[y_c(x) + y_p(x)] = f(D)y_c(x) + f(D)y_p(x) = h(x).$$

Ini adalah solusi umum karena konstanta sebarang, yang diperlukan untuk memenuhi syarat batas atau kondisi awal, dikandung dalam fungsi komplementer.

Pernyataan umum ini juga berlaku untuk persamaan linier orde satu. Sebagai contoh, kita telah menemukan bahwa

$$y = \frac{e^x}{2x} + C \frac{e^{-x}}{x}$$

adalah solusi umum dari

$$x \frac{dy}{dx} + (1+x)y = e^x.$$

Mudah untuk dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned} \left[x \frac{d}{dx} + (1+x) \right] \frac{e^{-x}}{x} &= 0, \\ \left[x \frac{d}{dx} + (1+x) \right] \frac{e^x}{2x} &= e^x. \end{aligned}$$

Jadi e^{-x}/x adalah fungsi komplementer dan $e^x/(2x)$ adalah solusi khusus.

5.4 Persamaan Diferensial Homogen dengan Koefisien Konstan

Sekarang kita akan memfokuskan perhatian kita pada persamaan diferensial homogen dengan koefisien konstan. Dalam mencari solusi persamaan diferensial homogen seperti

$$y'' - 5y' + 6y = 0, \quad (5.16)$$

secara alami untuk mencoba

$$y = e^{mx}$$

dengan m sebuah konstanta, karena semua turunannya memiliki bentuk fungsional yang sama. Substitusikan ke dalam (5.16) dan gunakan $y' = me^{mx}$ dan $y'' = m^2e^{mx}$, kita mempunyai

$$e^{mx}(m^2 - 5m + 6) = 0.$$

Ini adalah syarat yang harus dipenuhi agar e^{mx} merupakan solusinya. Karena e^{mx} tidak akan bernilai nol, maka penting agar

$$m^2 - 5m + 6 = 0.$$

Ini adalah persamaan aljabar murni yang dikenal sebagai persamaan karakteristik atau persamaan tambahan dari persamaan diferensial. Akar persamaan ini adalah $m = 2$ dan $m = 3$. Jadi $y_1 = \exp(2x)$ dan $y_2 = \exp(3x)$ merupakan dua buah solusi dari (5.16). Solusi umumnya diberikan oleh kombinasi linier dua buah fungsi

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}. \quad (5.17)$$

Dengan kata lain semua solusi (5.16) bisa dituliskan dalam bentuk ini. Untuk sebuah persamaan diferensial linier orde dua, solusinya mengandung dua buah konstanta sebarang c_1 dan c_2 . Konstanta ini bisa digunakan untuk memenuhi syarat batas. Sebagai contoh, anggap pada $x = 0$, $y = 0$ dan $y' = 2$, jadi

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 0, \\ y'(0) &= 2c_1 + 3c_2 = 2. \end{aligned}$$

Jadi $c_1 = -2$, $c_2 = 2$. Jadi solusi spesifik persamaan diferensial bersama dengan kondisi awal adalah

$$y(x) = -2e^{2x} + 2e^{3x}.$$

Untuk memfasilitasi diskusi lebih lanjut, kita akan mengulang proses dalam notasi operator. Jika kita definisikan

$$f(D) = D^2 - 5D + 6, \quad (5.18)$$

maka (5.16) bisa dituliskan sebagai $f(D)(y) = 0$. Substitusikan $y = e^{mx}$ dalam persamaan ini, kita peroleh $f(m)e^{mx} = 0$, dengan

$$f(m) = m^2 - 5m + 6.$$

Persamaan karakteristik $f(m) = 0$ memiliki dua akar; $m = 2, 3$. Sehingga solusinya diberikan oleh (5.17). Meskipun jelas, akan sangat berguna untuk mengingat cara menbisakan persamaan karakteristik, kita hanya perlu mengganti D dalam fungsi operator dari (5.18) menjadi m dan pilih m sama dengan nol.

5.4.1 Persamaan Karakteristik dengan Akar Berbeda

Jelas alasan ini bisa digunakan untuk semua persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan, berapapun ordenya. Jika $f(D)y = 0$ merupakan persamaan diferensial orde n , maka persamaan karakteristik $f(m) = 0$ adalah persamaan aljabar orde n . Ini memiliki n buah akar, $m = m_1, m_2, \dots, m_n$. Jika semuanya berbeda, jelaslah kita memperoleh n buah solusi persamaan diferensial yang saling bebas $\exp(m_1x), \exp(m_2x), \dots, \exp(m_nx)$ dan solusi umumnya adalah

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \dots + c_ne^{m_nx}.$$

Tetapi, jika satu atau lebih akar berulang, kita memperoleh solusi bebas kurang dari n buah dengan cara ini. Untungnya, tidak sulit untuk mencari solusi yang belum ditemukan.

5.4.2 Persamaan Karakteristik dengan Akar Sama

Untuk memperoleh solusi ketika dua buah atau lebih akar persamaan karakteristik sama, pertama kita perhatikan identitas berikut:

$$\begin{aligned} (D - a)x^n e^{ax} &= Dx^n e^{ax} - ax^n e^{ax} \\ &= (nx^{n-1}e^{ax} + ax^n e^{ax}) - ax^n e^{ax} \\ &= nx^{n-1}e^{ax}. \end{aligned}$$

Jika kedua ruas kita kalikan dengan $(D - a)$, kita memperoleh

$$\begin{aligned} (D - a)^2 x^n e^{ax} &= (D - a)nx^{n-1}e^{ax} \\ &= n(n - 1)x^{n-2}e^{ax}. \end{aligned}$$

Diperoleh:

$$(D - a)^n x^n e^{ax} = n!e^{ax}.$$

Kalikan sekali lagi dengan $(D - a)$

$$(D - a)^{n+1} x^n e^{ax} = n!(D - a)e^{ax} = 0$$

Jelaslah jika kita teruskan proses mengalikan kedua ruas dengan $(D - a)$, semuanya akan bernilai nol. Jadi

$$(D - a)^l x^n e^{ax} = 0 \quad \text{untuk } l > n.$$

Hal ini berarti bahwa $\exp(ax), x \exp(ax), \dots, x^{n-1} \exp ax$ merupakan solusi persamaan diferensial $(D - a)^n y = 0$. Dengan kata lain, jika akar persamaan karakteristik berulang n kali, dan akar yang sama adalah a , maka solusi umum persamaan diferensialnya adalah

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax} + \dots + c_n x^{n-1} e^{ax}.$$

5.4.3 Persamaan Diferensial dengan Akar Kompleks

Jika koefisien persamaan diferensial riil dan akar persamaan karakteristik memiliki suku imajiner, dari teori persamaan aljabar, kita tahu bahwa akar berasal dari pasangan konjugat $a \pm ib$. Sehingga solusi umumnya untuk dua akar ini adalah

$$y = c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x}. \quad (5.19)$$

terdapat dua bentuk lain dari (5.19) yang ekuivalen dan berguna. Karena

$$e^{(a \pm bi)x} = e^{ax} e^{\pm ibx} = e^{ax} (\cos bx \pm i \sin bx),$$

kita bisa menuliskan (5.19) sebagai

$$\begin{aligned} y &= e^{ax} [c_1 \cos bx + ic_1 \sin bx + c_2 \cos bx - ic_2 \sin bx] \\ &= e^{ax} [(c_1 + c_2) \cos bx + (ic_1 - ic_2) \sin bx]. \end{aligned}$$

Karena c_1 dan c_2 konstanta sebarang, kita bisa menggantikan $c_1 + c_2$ dan $ic_1 - ic_2$ dengan konstanta baru sebarang A dan B . Sehingga

$$y = e^{ax} (A \cos bx + B \sin bx). \quad (5.20)$$

Kita masih bisa menuliskan (5.20) dalam bentuk lain. Ingat

$$C \cos(bx - \phi) = C \cos bx \cos \phi + C \sin bx \sin \phi.$$

Jika kita masukkan

$$C \cos \phi = A, \quad C \sin \phi = B,$$

maka $C = (A^2 + B^2)^{1/2}$ dan $\phi = \tan^{-1}(B/A)$, dan (5.20) menjadi

$$y = C e^{ax} \cos(bx - \phi). \quad (5.21)$$

Sehingga (5.19-5.21) semuanya ekuivalen. Semuanya mengandung dua buah konstanta sebarang. Sebuah konstanta bisa ditransformasikan ke dalam konstanta yang lain. Tetapi, hal ini jarang diperlukan. Dalam menyelesaikan persoalan sebenarnya, kita menggunakan bentuk yang terlihat paling baik dan menentukan konstanta sebarang dalam bentuk tersebut dari syarat yang diberikan.

Kita meringkas hubungan antara akar persamaan karakteristik dengan solusi persamaan diferensial pada Tabel 5.1.

Tabel 5.1: Hubungan antara persamaan karakteristik dan solusi umum persamaan diferensial.

m	y(x)
0	c_1
0, 0	$c_1 + c_2x$
0, 0, 0	$c_1 + c_2x + c_3x^2$
...	...
a	c_1e^{ax}
a, a	$c_1e^{ax} + c_2xe^{ax}$
...	...
$\pm ib$	$c_1 \cos bx + c_2 \sin bx$
$\pm ib, \pm ib$	$(c_1 + c_2x) \cos bx + (c_3 + c_4x) \sin bx$
...	...
$a \pm ib$	$e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$
$a \pm ib, a \pm ib$	$e^{ax}[(c_1 + c_2x) \cos bx + (c_3 + c_4x) \sin bx]$
...	...

Contoh 5.4.1. Carilah solusi persamaan diferensial berikut

$$y''' = 0.$$

Solusi 5.4.1. Kita bisa menuliskan persamaannya menjadi

$$D^3 = 0.$$

Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^3 = 0.$$

Tiga buah akarnya adalah 0, 0, 0. Jadi solusi umumnya

$$\begin{aligned} y &= c_1e^{0x} + c_2xe^{0x} + c_3x^2e^{0x} \\ &= c_1 + c_2x + c_3x^2. \end{aligned}$$

Ini terlihat seperti contoh trivial. Jelaslah hasilnya bisa diperoleh dengan inspeksi. Di sini, kita telah menunjukkan bahwa dengan menggunakan metode umum, kita bisa memperoleh semua suku linier yang bebas.

Contoh 5.4.2. Carilah solusi umum persamaan diferensial

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0.$$

Solusi 5.4.2. Kita bisa menuliskan persamaannya sebagai

$$(D^3 - 6D^2 + 9D)y = 0.$$

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned} m^3 - 6m^2 + 9m &= m(m^2 - 6m + 9) \\ &= m(m - 3)^2 = 0. \end{aligned}$$

Akarnya adalah 0, 3, 3. Jadi solusi umumnya

$$y = c_1 + c_2e^{3x} + c_3xe^{3x}.$$

Untuk persamaan diferensial orde tiga ini, solusi umumnya memiliki tiga buah konstanta sebarang. Untuk menentukan konstanta ini, kita memerlukan tiga syarat.

Contoh 5.4.3. Carilah solusi dari

$$y'' + 9y = 0,$$

yang memenuhi syarat batas $y(\pi/2) = 1$ dan $y'(\pi/2) = 2$.

Solusi 5.4.3. Persamaan karakteristiknya adalah

$$(D^2 + 9)y = 0.$$

Kita bisa menuliskan persamaan ini sebagai

$$m^2 + 9 = 0.$$

Akar persamaan ini adalah $m = \pm 3i$. Jadi solusi umumnya menurut (5.20) adalah

$$y(x) = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Kita juga membutuhkan y' untuk menentukan A dan B

$$y'(x) = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x.$$

Kondisi awal mensyaratkan

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= A \cos \frac{3\pi}{2} + B \sin \frac{3\pi}{2} \\ &= -B = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -3A \sin \frac{3\pi}{2} + 3B \cos \frac{3\pi}{2} \\ &= 3A = 2, \end{aligned}$$

Jadi $A = 2/3$ dan $B = -1$. Maka solusinya adalah

$$y = \frac{2}{3} \cos 3x - \sin 3x.$$

Kita akan memperoleh solusi yang sama jika kita menggunakan (5.19) atau (5.21).

Contoh 5.4.4. Carilah solusi umum dari

$$y'' + y' + y = 0$$

Solusi 5.4.4. Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^2 + m + 1 = 0.$$

Akar persamaan ini adalah

$$m = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1-4}) = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Maka solusi umumnya

$$y = e^{-x/2} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

Contoh 5.4.5. Carilah solusi umum persamaan diferensial

$$(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0.$$

Solusi 5.4.5. Persamaan karakteristiknya

$$m^4 + 8m^2 + 16 = (m^2 + 4)^2 = 0.$$

Empat buah akar persamaan ini adalah $m = \pm 2i, \pm 2i$. Dua buah solusi bebas persamaan ini dengan akar $\pm 2i$ adalah $\cos 2x, \sin 2x$. Dua solusi lainnya untuk akar berulang adalah $x \cos 2x, x \sin 2x$. Jadi solusi umumnya diberikan oleh

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x + x(C \cos 2x + D \sin 2x).$$

5.5 Persamaan Diferensial Linier Tak Homogen dengan Koefisien Konstan

5.5.1 Metode Koefisien Tak Tentu

Kita akan menggunakan sebuah contoh untuk mengilustrasikan solusi umum persamaan diferensial tak homogen diberikan oleh (5.15), yaitu jumlah dari fungsi komplementer dan solusi khusus. Untuk sebuah persamaan seperti

$$(D^2 + 5D + 6)y = e^{3x} \quad (5.22)$$

tidak sulit untuk mencari fungsi khusus $y_p(x)$. Karena suku e^{3x} di ruas kanan, kita mencoba

$$y_p(x) = ce^{3x}. \quad (5.23)$$

Gantikan y dengan y_p , (5.22) menjadi

$$(D^2 + 5D + 6)ce^{3x} = e^{3x}.$$

Karena

$$(D^2 + 5D + 6)ce^{3x} = (9 + 5 \times 3 + 6)ce^{3x} = 30ce^{3x},$$

jadi $c = 1/30$. Fungsi $y_p(x)$ dari (5.23) dengan $c = 1/30$ adalah solusi khusus y_p dari persamaan diferensial tak homogen, yaitu

$$y_p = \frac{1}{30}e^{3x}.$$

Selain solusi khusus ini, persamaan tak homogen memiliki banyak solusi yang lain. Faktanya solusi umum (5.22) haruslah memiliki dua buah konstanta sebarang. Untuk mencari solusi umum, pertama marilah kita mencari solusi persamaan diferensial homogenya

$$(D^2 + 5D + 6)y_c = 0.$$

Solusi umum persamaan homogen ini dikenal sebagai fungsi pelengkap (komplementer) y_c dari persamaan tak homogen. Mengikuti aturan menyelesaikan persamaan homogen, kita memperoleh

$$y_c = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}.$$

Jadi

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + \frac{1}{30}e^{3x} \end{aligned} \quad (5.24)$$

adalah solusi umum persamaan diferensial tak homogen (5.22).

Pertama, ini merupakan solusi, karena

$$\begin{aligned} (D^2 + 5D + 6)(y_c + y_p) &= (D^2 + 5D + 6)y_c + (d^2 + 5D + 6)y_p \\ &= 0 + e^{3x} = e^{3x}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, ini memiliki dua buah konstanta sebarang c_1 dan c_2 . Hal ini berarti setiap solusi yang mungkin dari persamaan tak homogen (5.22) bisa diperoleh dengan memberikan nilai tertentu pada konstanta sebarang c_1 dan c_2 pada (5.24). Jelaslah prinsip ini tidak terbatas pada persoalan khusus ini.

Seperti yang sudah kita pelajari bagaimana menyelesaikan persamaan tak homogen, kita sekarang harus mendiskusikan cara sistematis mencari solusi khusus.

Marilah kita perhatikan persamaan tak homogen yang lain

$$(D^2 - 5D + 6)y = e^{3x}. \tag{5.25}$$

Karena persamaan ini hanya sedikit berbeda dengan (5.22), untuk mencari solusi khusus y_p persamaan ini, kita mencoba lagi

$$y_p = ce^{3x}.$$

Masukkan dalam (5.25), kita memperoleh

$$(D^2 - 5D + 6)ce^{3x} = (9 - 15 + 6)ce^{3x} = 0.$$

Jelaslah tidak ada nilai c yang membuatnya sama dengan e^{3x} . Maka kita membutuhkan metode umum.

Idenya adalah jika kita bisa mentransformasikan persamaan tak homogen menjadi sebuah persamaan homogen, maka kita tahu apa yang harus kita lakukan. Pertama kita perhatikan bahwa

$$(D - 3)e^{3x} = 0.$$

Kalikan kedua ruas (5.25) dengan $(D - 3)$, kita mempunyai

$$(D - 3)(D^2 - 5D + 6)y = (D - 3)e^{3x} = 0. \tag{5.26}$$

Maka kita melihat bahwa solusi umum $y_c + y_p$ dari persamaan tak homogen (5.25) juga harus memenuhi persamaan homogen yang baru (5.26), karena

$$(D - 3)(D^2 - 5D + 6)(y_c + y_p) = (D - 3)(0 + e^{3x}) = 0, \tag{5.27}$$

kita telah menggunakan

$$(D^2 - 5D + 6)y_c = 0 \tag{5.28}$$

dan

$$(D^2 - 5D + 6)y_p = e^{3x}. \tag{5.29}$$

Ini berarti kita bisa memperoleh solusi umum $y_c + y_p$ dari persamaan tak homogen asalnya (5.25) dengan memberikan nilai tertentu pada konstanta di dalam solusi umum dari persamaan homogen yang baru (5.26). Sebagai contoh, karena akar persamaan karakteristik $(m-3)(m^2-5m+6) = 0$ dari persamaan diferensial homogen yang baru adalah

$$m = 2, 3, 3,$$

solusi umumnya

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x}. \quad (5.30)$$

Fungsi komplementer yang diberikan oleh (5.28) adalah

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x},$$

kita lihat bahwa solusi khusus y_p bisa diperoleh dengan memberikan sebuah nilai yang sesuai pada c_3 , karena solusi umum persamaan tak homogen asalnya $y_c + y_p$ adalah solusi khusus dari persamaan homogen yang baru. Untuk menentukan c_3 , kita mensubstitusikan $c_3 x e^{3x}$ ke dalam (5.29)

$$(D^2 - 5D + 6)c_3 x e^{3x} = e^{3x}.$$

Karena

$$\begin{aligned} (D^2 - 5D + 6)c_3 x e^{3x} &= c_3 [D(e^{3x} + 3x e^{3x}) - 5(e^{3x} + 3x e^{3x}) + 6x e^{3x}] \\ &= c_3 e^{3x} \end{aligned}$$

jelaslah $c_3 = 1$. Maka solusi khususnya adalah

$$y_p = x e^{3x}.$$

Maka solusi umum persamaan diferensial tak homogen (5.25) adalah

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x e^{3x}.$$

Sekarang kita ringkas prosedur umum menyelesaikan sebuah persamaan diferensial tak homogen

$$f(D)y(x) = h(x).$$

1. Solusi umumnya adalah

$$y = y_c + y_p.$$

dengan y_c adalah fungsi pelengkap dan y_p merupakan solusi khusus, dan

$$f(D)y_c = 0, \quad f(D)y_p = h(x).$$

2. Misalkan akar $f(m) = 0$ adalah

$$m = m_1, m_2 \dots$$

Fungsi komplementer y_c diberikan oleh kombinasi linier semua fungsi bebas linier yang diperoleh dari m .

3. Untuk mencari y_p , pertama kita mencari sebuah fungsi sedemikian rupa sehingga

$$g(D)h(x) = 0.$$

Kalikan $g(D)$ pada dua ruas $f(D)y(x) = h(x)$, kita mempunyai

$$g(D)f(D)y = 0.$$

4. Solusi umumnya $y_c + y_p$ persamaan diferensial tak homogen asalnya $f(D)y(x) = h(x)$ merupakan solusi khusus persamaan diferensial homogen yang baru $g(D)f(D)y = 0$, karena

$$\begin{aligned} g(D)f(D)(y_c + y_p) &= g(D)[f(D)y_c + f(D)y_p] \\ &= g(D)[0 + h(x)] = 0. \end{aligned}$$

5. Solusi umum $g(D)f(D)y = 0$ dengan akar persamaan karakteristik $g(m)f(m) = 0$. Karena akar $f(m) = 0$ memberikan y_c , maka akar $g(m) = 0$ pastilah berkaitan dengan y_p .

6. Misalkan akar $g(m) = 0$ adalah

$$m = m'_1, m'_2 \dots$$

Jika tidak terdapat pengulangan antara m'_1, m'_2, \dots dan m_1, m_2, \dots maka solusi khusus y_p diberikan oleh semua kombinasi linier dari semua fungsi bebas linier dari m'_1, m'_2, \dots .

Jika terdapat pengulangan antara m'_1, m'_2, \dots dan m_1, m_2, \dots fungsi dari m'_1, m'_2, \dots harus dikalikan dengan bilangan bulat paling kecil yang mungkin dari x yang menghilangkan pengulangan (duplikasi).

7. Tentukan konstanta sebarang fungsi dari m'_1, m'_2, \dots dari

$$f(D)y_p = h(x).$$

Prosedur ini mungkin terlihat rumit. Ketika sudah dipahami, implementasinya sederhana. Kita akan mengilustrasikannya dalam contoh berikut.

Contoh 5.5.1. Carilah solusi umum dari

$$(D^2 + 5D + 6)y = 3e^{-2x} + e^{3x}.$$

Solusi 5.5.1. Persamaan karakteristiknya adalah

$$f(m) = m^2 + 5m + 6 = 0$$

akar-akarnya

$$m = -2, -3. (m_1 = -2, m_2 = -3).$$

Jadi

$$y_c = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}.$$

Untuk

$$g(D)(3e^{-2x} + e^{3x}) = 0,$$

akar dari

$$g(m) = 0$$

haruslah

$$m = -2, 3 \quad (m'_1 = -2, m'_2 = 3).$$

Karena m'_1 mengulang m_1 , suku yang berasal dari $m'_1 = -2$ harus dikalikan dengan x . Oleh karena itu

$$y_p = c_3xe^{-2x} + c_4e^{3x}.$$

Karena

$$\begin{aligned} (D^2 + 5D + 6)(c_3xe^{-2x} + c_4e^{3x}) &= c_3e^{-2x} + 30c_4e^{3x}, \\ (D^2 + 5D + 6)y_p &= 3e^{-2x} + e^{3x}, \end{aligned}$$

kita mempunyai

$$c_3 = 3; c_4 = \frac{1}{30}.$$

Maka

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + 3xe^{-2x} + \frac{1}{30}e^{3x}.$$

Contoh 5.5.2. Carilah solusi umum dari

$$(D^2 + 1)y = x^2.$$

Solusi 5.5.2. Akar persamaan karakteristik $f(m) = m^2 + 1 = 0$ adalah

$$m = \pm i,$$

maka

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Untuk $g(D) = 0$, kita bisa menganggap x^2 sebagai $c_1 + c_2x + c_3x^2$ dengan $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$. Akar untuk $g(m) = 0$, seperti pada Tabel 5.1, adalah

$$m = 0, 0, 0.$$

Jadi

$$y_p = a + bx + cx^2.$$

Substitusikan pada persamaan asalnya

$$(D^2 + 1)(a + bx + cx^2) = x^2,$$

kita mempunyai

$$2c + a + bx + cx^2 = x^2.$$

Jadi

$$2c + a = 0, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

Diperoleh $a = -2$ dan

$$y_p = -2 + x^2.$$

Terakhir

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 2 + x^2.$$

Contoh 5.5.3. Carilah solusi umum dari

$$(D^2 + 4D + 5)y = 3e^{-2x}.$$

Solusi 5.5.3. Akar dari $f(m) = m^2 + 4m + 5 = 0$ adalah

$$m = -2 \pm i.$$

Jadi

$$y_c = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Untuk $g(D)3e^{-2x} = 0$, $g(D) = D + 2$. Jelaslah akar dari $g(m) = 0$ adalah

$$m = -2.$$

Maka

$$y_p = Ae^{-2x}.$$

Dengan

$$(D^2 + 4D + 5)Ae^{-2x} = 3e^{-2x}.$$

Kita mempunyai

$$A = 3$$

Solusi umumnya diberikan oleh

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)3e^{-2x}.$$

Contoh 5.5.4. Carilah solusi umum dari

$$(D^2 - 2D + 1)y = xe^x - e^x.$$

Solusi 5.5.4. Akar dari $m^2 - 2m + 1 = 0$ adalah

$$m = 1, 1 \quad (m_1 = 1, m_2 = 1).$$

Jadi

$$y_c = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Persamaan karakteristik dari persamaan diferensial dengan $xe^x - e^x$ adalah solusi

$$g(D)(xe^x - e^x) = 0$$

adalah $g(m) = 0$. Kita bisa menganggap $xe^x - e^x$ sebagai $ae^x + bxe^x$. Dari Tabel 5.1 akar $g(m) = 0$ adalah

$$m = 1, 1 \quad (m'_1 = 1, m'_2 = 1).$$

Jadi

$$y_p = Ax^2 e^x + Bx^3 e^x.$$

Dengan

$$(D^2 - 2D + 1)(Ax^2 e^x + Bx^3 e^x) = xe^x - e^x$$

kita memperoleh

$$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{6}.$$

Solusi umumnya diberikan oleh

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{1}{2} x^2 e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

Contoh 5.5.5. Carilah solusi umum dari

$$(D^2 + 1)y = \sin x.$$

Solusi 5.5.5. Akar dari $m^2 + 1 = 0$ adalah

$$m = \pm i.$$

Jadi

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Untuk mencari

$$g(D) \sin x = 0,$$

kita bisa menganggap $a \cos x + b \sin x$ dengan $a = 0$ dan $b = 1$. Dari Tabel 5.1, akar $g(m) = 0$ adalah

$$m = \pm i \quad (m' = \pm i).$$

Jadi

$$y_p = Ax \cos x + Bx \sin x.$$

Dengan

$$(D^2 + 1)(Ax \cos x + Bx \sin x) = \sin x$$

kita memperoleh

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0.$$

Solusi umumnya

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x.$$

5.5.2 Penggunaan Eksponensial Kompleks

Dalam aplikasi, fungsi $h(x)$ sering berupa fungsi sinus atau cosinus merepresentasikan tegangan bolak-balik dalam sebuah rangkaian listrik atau sebuah gaya periodik dan sebuah sistem yang bergetar. Solusi khusus y_p bisa diperoleh dengan lebih efisien dengan menggantikan sinus atau cosinus dalam bentuk eksponensial kompleks.

Dalam contoh terakhir, kita bisa menggantikan $\sin x$ dengan e^{ix} dan menyelesaikan persamaan

$$(D^2 + 1)Y = e^{ix} \tag{5.31}$$

Solusi Y juga akan kompleks. $Y = Y_R + iY_I$. Karena $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, persamaannya ekuivalen dengan

$$(D^2 + 1)Y_R = \cos x,$$

$$(D^2 + 1)Y_I = \sin x.$$

Karena persamaan kedua sama persis dengan persamaan asalnya, kita lihat untuk mencari y_p , kita bisa menyelesaikan (5.31) untuk Y dan ambil suku imajinernya. Dengan mengikuti prosedur pada subbab terakhir, kita mengaumsikan

$$Y = Axe^{ix},$$

sehingga

$$\begin{aligned} Dy &= Ae^{ix} + iAxe^{ix}, \\ D^2Y &= 2iAe^{ix} - Axe^{ix}, \\ (D^2 + 1)Y &= 2iAe^{ix} - Axe^{ix} + Axe^{ix} = 2iAe^{ix} = e^{ix} \end{aligned}$$

Jadi

$$A = \frac{1}{2i}$$

Ambil suku imajiner dari

$$Y = \frac{1}{2i}xe^{ix} = -\frac{1}{2}ix(\cos x + i \sin x),$$

kita mempunyai

$$y_p = -\frac{1}{2}x \cos x,$$

yang sama dengan contoh terakhir.

5.5.3 Persamaan Diferensial Euler-Cauchy

Sebuah persamaan dengan bentuk

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = h(x), \quad (5.32)$$

dengan a_i konstanta, disebut persamaan diferensial Euler, atau Cauchy atau Euler-Cauchy. Dengan perubahan variabel, ini bisa ditransformasikan menjadi sebuah persamaan dengan koefisien konstan yang bisa diselesaikan.

Jika kita pilih

$$x = e^z, \quad z = \ln x,$$

maka

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-z}.$$

Dengan notasi $D = \frac{d}{dz}$, kita bisa menuliskan

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = e^{-z} Dy, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (e^{-z} Dy) = \frac{d}{dz} (e^{-z} Dy) \frac{dz}{dx} \\ &= (-e^{-z} Dy + e^{-z} D^2y) e^{-z} = e^{-2z} D(D-1)y, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dz} [e^{-2z} D(D-1)y] \frac{dz}{dx} \\ &= [-2e^{-2z} D(D-1)y + e^{-2z} D^2(D-1)y] e^{-z} \\ &= e^{-3z} D(D-1)(D-2)y. \end{aligned}$$

Jelaslah

$$\frac{D^n y}{Dx^n} = e^{-nz} D(D-1)(D-2) \cdots (D-n+1)y. \quad (5.33)$$

Substitusikan (5.33) ke dalam (5.32) dan gunakan $x^n = e^{nz}$, kita memiliki persamaan diferensial dengan koefisien konstan

$$a_n D(D-1)(D-2) \cdots (D-n_1)y + \cdots a_1 dy + a_0 y = h(e^z).$$

Jika solusi persamaan ini dinotasikan

$$y = F(z),$$

maka solusi asalnya diberikan oleh

$$y = F(\ln x).$$

Contoh berikut akan membuat prosedur ini jelas.

Contoh 5.5.6. Carilah solusi umum dari

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x \ln x.$$

solusi 5.5.6. Dengan $x = e^z$, persamaan ini menjadi

$$[D(D-1) + D - 1]y = ze^z.$$

Fungsi pelengkapanya berasal dari

$$m(m-1) + m - 1 = m^2 - 1 = 0, \quad m = 1, -1,$$

yang memberikan

$$y_c = c_1 e^z + c_2 e^{-z}.$$

Untuk $g(D) = ze^z$, $g(D)$ haruslah $(D - 1)^2$. Persamaan karakteristiknya adalah

$$(m' - 1)^2 = 0, \quad m' = 1, 1.$$

Maka solusi khususnya dalam bentuk

$$y_p = c_3 ze^z + c_4 z^2 e^z.$$

Substitusikan kembali ke dalam persamaan diferensial

$$[D(D - 1) + D - 1](c_3 ze^z + c_4 z^2 e^z) = ze^z,$$

kita memperoleh

$$c_3 = -\frac{1}{4}, \quad c_4 = \frac{1}{4}.$$

Jadi

$$y = c_1 e^z + c_2 e^{-z} - \frac{1}{4} z e^z + \frac{1}{4} z^2 e^z.$$

Untuk solusi umum persamaan asalnya, kita harus mengganti z menjadi x kembali.

Dengan $z = \ln x$

$$y(x) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} - \frac{1}{4} x \ln x + \frac{1}{4} x (\ln x)^2,$$

yang dengan mudah dibuktikan bahwa ini merupakan solusi umum dengan dua konstanta sebarang.

Untuk persamaan Euler-Cauchy homogen, prosedur berikut akan lebih sederhana. Sebagai contoh, untuk menyelesaikan persamaan

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

kita bisa mulai dengan solusi

$$y(x) = x^m.$$

Jadi

$$x^2 m(m - 1)x^{m-2} + x m x^{m-1} - x^m = 0$$

atau

$$[m(m - 1) + m - 1]x^m = 0.$$

Maka

$$\begin{aligned} m(m - 1) + m - 1 &= m^2 - 1 = 0 \\ m &= 1, \quad m = -1. \end{aligned}$$

Diperoleh:

$$y(x) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}.$$

5.5.4 Variasi Parameter

Metode koefisien tak tentu sederhana dan memiliki aplikasi fisis yang penting, tetapi hanya berlaku untuk persamaan dengan koefisien konstan dengan bentuk khusus suku tak homogen $h(x)$. Dalam subbab ini, kita membicarakan metode variasi parameter, yang lebih umum. Ini berlaku untuk persamaan

$$(D^2 + p(x) d + q(x))y = h(x), \tag{5.34}$$

dengan p, q dan h merupakan fungsi x yang kontinu pada selang tertentu. Misalkan

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

adalah solusi persamaan diferensial homogen berikut

$$(D^2 + p(x) d + q(x))y_c = 0.$$

Metode variasi parameter mengandung penggantian parameter c_1 dan c_2 oleh fungsi u dan v untuk ditentukan sehingga

$$y_p u(x) y_1(x) + v(x) y_2(x)$$

adalah solusi khusus dari (5.34). Sekarang ekspresi ini mengandung dua buah fungsi yang tak diketahui u dan v , tetapi syarat y_p memenuhi (5.34) memaksakan satu syarat pada u dan v . Jadi kita bebas untuk memaksakan syarat sebarang kedua tanpa kehilangan keumuman. Perhitungan lebih lanjut akan menunjukkan bahwa kita bisa mensyaratkan

$$u' y_1 + v' y_2 = 0. \tag{5.35}$$

Sekarang

$$Dy_p = u' y_1 + u y_1' + v' y_2 + v y_2'$$

dengan syarat (5.35), kita memiliki

$$y_p' = u y_1' + v y_2'.$$

Diperoleh

$$D^2 y_p = u' y_1' + u y_1'' + v' y_2' + v y_2''.$$

Substitusikan kembali ke dalam persamaan

$$(D^2 + p(x) d + q(x))y_p = h(x)$$

dan kumpulkan suku-sukunya, kita peroleh

$$u(y_1'' + p y_1' + q y_1) + v(y_2'' + p y_2' + q y_2) + u' y_1' + v' y_2' = h.$$

Karena y_1 dan y_2 memenuhi persamaan homogen, kuantitas dalam kurung sama dengan nol. Jadi

$$u'y'_1 + v'y'_2 = h.$$

Kita bisa mencari u' dan v' dari persamaan ini bersama dengan syarat (5.35)

$$u' = -\frac{hy_2}{y_1y'_2 - y_2y'_1}, \quad v' = \frac{hy_1}{y_1y'_2 - y_2y'_1}. \quad (5.36)$$

Kuantitas pada penyebut dikenal sebagai Wronskian W dari y_1 dan y_2

$$W = |y_1y_2| = y_1y'_2 - y_2y'_1$$

yang tidak akan sama dengan nol sepanjang y_1 dan y_2 bebas linier. Integralkan (5.36) kita bisa memperoleh u dan v

$$u = -\int \frac{hy_2}{W} dx, \quad v = \int \frac{hy_1}{W} dx.$$

Solusi khususnya adalah

$$y_p = -y_1 \int \frac{hy_2}{W} dx + y_2 \int \frac{hy_1}{W} dx.$$

Contoh 5.5.7. Gunakan metode variasi parameter untuk mencari solusi dari

$$(D^2 + 4D + 4)y = 3xe^{-2x}.$$

Solusi 5.5.7. Persamaan ini dengan mudah diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu. Tetapi di sini kita ingin menggunakan metode variasi parameter. Karena

$$m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2 = 0, \quad m = -2, -2$$

dua buah solusi bebas persamaan homogenya adalah

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = xe^{-2x}.$$

Wronskian y_1 dan y_2 adalah

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}(1 - 2x) + 2xe^{-4x} = e^{-4x},$$

u' dan v' diberikan oleh

$$u' = -\frac{3xe^{-2x}y_2}{W} = -\frac{3xe^{-2x}xe^{-2x}}{e^{-4x}} = -3x^2$$

$$v' = \frac{3xe^{-2x}y_1}{W} = \frac{3xe^{-2x}e^{-2x}}{e^{-4x}} = 3x.$$

Diperoleh

$$u = - \int 3x^2 dx = -x^3 + c_1, \quad v = \int 3x dx = \frac{3}{2}x^2 + c_2.$$

Jadi

$$\begin{aligned} y &= (-x^3 + c_1)e^{-2x} + \left(\frac{3}{2}x^2 + c_2\right)xe^{-2x} \\ &= \frac{1}{2}x^3e^{-2x} + c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}. \end{aligned}$$

Ini adalah solusi umum yang mengandung fungsi pelengkap

$$y_2 = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$$

dan solusi khusus

$$y_p = \frac{1}{2}x^3e^{-2x}.$$

Contoh 5.5.8. Carilah solusi dari

$$(D^2 + 2D + 1)y = h(x), \quad h(x) = \frac{2}{x^2}e^{-x}.$$

Solusi 5.5.8. Persamaan ini tidak bisa dipecahkan dengan menggunakan metode koefisien tak tentu, maka kita mencari solusinya dengan metode variasi parameter. Fungsi pelengkap diperoleh dari

$$m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 = 0, \quad m = -1, -1$$

yaitu

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-x}.$$

Misalkan

$$y_p = uy_1 + vy_2.$$

Dari Wronskian y_1 dan y_2

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x}(1 - x) + xe^{-2x} = e^{-2x},$$

kita mempunyai

$$\begin{aligned} u &= - \int \frac{y_2 h}{W} dx = - \int \frac{xe^{-x} 2x^{-2} e^{-x}}{e^{-2x}} dx = -2 \ln x, \\ v &= \int \frac{y_1 h}{W} dx = \int \frac{e^{-x} 2x^{-2} e^{-x}}{e^{-2x}} dx = -\frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Maka

$$y_p = -2e^{-x} \ln x - 2e^{-x}.$$

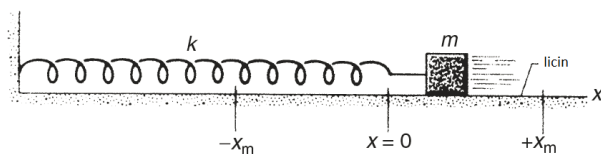
Sehingga solusi umumnya

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - 2e^{-x} \ln x.$$

Perhatikan kita menghilangkan suku $-2e^{-x}$ karena diserap oleh $c_1 e^{-x}$.

5.6 Getaran Mekanik

terdapat banyak sekali aplikasi persamaan diferensial dalam teknik dan fisika. Sebagai contoh yang ilustratif, pertama kita akan mendiskusikan getaran mekanik. Semua gerak yang berulang setelah selang waktu tertentu disebut sebagai getaran atau osilasi. Sebuah model sederhana adalah sistem pegas-massa yang ditunjukkan Gambar 5.1. Balok bermassa m dibatasi untuk bergerak dalam meja licin dan terikat oleh pegas dengan konstanta k . Balok ditarik pada jarak x_m dari posisi setimbang pada $x = 0$ dan dilepaskan dari keadaan diam. Kita ingin mengetahui gerak balok tersebut.



Gambar 5.1: Osilator harmonik sederhana. Balok bergerak pada sebuah meja licin. Posisi setimbang pegas adalah pada $x = 0$. Pada $t = 0$, balok dilepaskan dari keadaan diam pada $x = x_m$.

Sistem ini cukup sederhana untuk mendemonstrasikan langkah berikut dalam fisika matematik:

- Formulasikan persoalan fisis dalam bahasa matematik, biasanya dalam bentuk persamaan diferensial.
- Selesaikan persamaan matematik.
- Pahami arti fisis solusi tersebut.

5.6.1 Getaran Bebas

Langkah pertama untuk mengamati adalah gaya mendatar pada balok hanya berasal dari pegas. Menurut hukum Hooke, gaya sebanding dengan perpindahan tetapi tandanya berbeda, yaitu

$$F = -kx$$

Gerak balok ditentukan oleh hukum dinamika Newton

$$F = ma.$$

Karena percepatan sama dengan turunan kedua perpindahan terhadap waktu

$$a = \frac{d^2x}{dt^2},$$

oleh karena itu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Ini adalah persamaan diferensial linier orde dua. Karena balok dilepaskan dari keadaan diam pada $x = x_m$, kecepatan balok yang merupakan turunan pertama perpindahan, nol pada $t = 0$. Sehingga kondisi awalnya adalah

$$x(0) = x_m, \quad v(0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Dengan persamaan diferensial dan kondisi awal, persoalan matematik terdefiniskan dengan unik.

Langkah kedua adalah menyelesaikan persamaan ini. Karena koefisiennya konstan, solusi persamaan diferensial memiliki bentuk eksponensial, $x = \exp(\alpha t)$ dengan α ditentukan oleh persamaan karakteristik

$$m\alpha^2 = -k.$$

Jelaslah akar persamaan ini

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Jadi solusi umum persamaan diferensialnya

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}.$$

Kondisi awalnya mensyaratkan

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = x_m, \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} &= i\omega_0 A - i\omega_0 B = 0. \end{aligned}$$

Jadi $A = B = \frac{1}{2}x_m$, dan

$$x(t) = x_m \cos \omega_0 t.$$

Langkah ketiga adalah interpretasi solusi ini. Fungsi cosinus memiliki nilai antara -1 sampai 1 , nilainya berulang ketika argumennya bertambah 2π . Jadi balok berosilasi

antara x_m dan $-x_m$. Periode osilasi T didefinisikan sebagai waktu yang diperlukan agak gerak berulang, hal ini berarti

$$x(t+T) = x(t).$$

Maka

$$\cos(\omega_0 t + \omega_0 T) = \cos(\omega_0 t).$$

Jelaslah

$$\omega_0 T = 2\pi.$$

Jadi periodenya diberikan oleh

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Frekuensi f adalah jumlah osilasi dalam satu detik, yaitu

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Maka balok berosilasi dengan frekuensi yang ditentukan oleh k dan m . Karena $\omega_0 = 2\pi f$, ω_0 dikenal sebagai frekuensi sudut. ω_0 sering disebut sebagai frekuensi alami dengan pemahaman sebenarnya ini adalah frekuensi sudut.

Dari solusi persamaan diferensial, kita bisa menurunkan semua atribut gerak, seperti kecepatan balok pada waktu tertentu. Jenis gerak periodik ini disebut gerak harmonik sederhana. Sistem massa-pegas disebut sebagai osilator harmonik.

5.6.2 Getaran Bebas dengan Redaman Viskos

Dalam praktek, amplitudo osilasi berkurang gradual karena gesekan. Hal ini dikenal sebagai redaman viskos. Sebagai contoh, jika sistem bergetar dalam sebuah medium fluida, seperti udara, air, minyak, gaya yang melawan diberikan oleh kekentalan (viskositas) fluida secara umum sebanding dengan kecepatan benda yang bergetar. Jadi dengan redaman viskos, terdapat gaya tambahan

$$F_v = -c \frac{dx}{dt}$$

dengan c adalah koefisien redaman viskos dan tanda negatif menyatakan gaya redaman viskos berlawanan arah dengan arah kecepatan. Jadi persamaan sistem massa-pegas menjadi

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt}$$

atau

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Persamaan ini bisa dituliskan dalam bentuk

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0.$$

dengan $\beta = c/2m$, $\omega_0^2 = k/m$. Dengan $x = \exp(\alpha t)$, α harus memenuhi persamaan

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

Akar-akar persamaan ini adalah

$$\alpha_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \alpha_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Oleh karena itu solusinya diberikan oleh

$$x(t) = A_1e^{\alpha_1 t} + A_2e^{\alpha_2 t}. \quad (5.37)$$

terdapat tiga buah solusi yang bergantung pada kekuatan redaman viskos.

Teredam kuat/over damping. Jika $\beta^2 > \omega_0^2$, maka nilai dari α_1 dan α_2 keduanya negatif. Jadi kedua suku x secara eksponen menuju nol ketika $t \rightarrow \infty$. Dalam kasus ini, gaya redaman yang dinyatakan oleh β mendominasi gaya pulih yang dinyatakan ω_0 dan menghalangi osilasi. Sistem ini disebut teredam kuat.

Teredam kritis. Dalam kasus ini $\beta^2 = \omega_0^2$ persamaan karakteristiknya memiliki akar ganda pada $\alpha = -\beta$ dua kali. Jadi solusinya memiliki bentuk

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}.$$

Karena $\beta > 0$, baik $e^{-\beta}$ dan $te^{-\beta}$ bernilai nol ketika $t \rightarrow \infty$. Seiring bertambahnya waktu gerakanya menghilang dan tidak berbeda secara kualitatif dengan kasus teredam kuat. Dalam kasus ini gaya redaman kekuatannya sama dengan gaya pulih, jadi sistemnya dinamakan teredam kritis.

Teredam sebagian/under damping. Jika $\beta^2 < \omega_0^2$, akar persamaan karakteristiknya kompleks

$$\alpha_1, \alpha_2 = -\beta \pm i\omega,$$

dengan

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Maka solusi $x = e^{-\beta t} (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})$ bisa dituliskan dalam bentuk

$$x(t) = Ce^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

Karena suku cosinus di dalam solusi, gerakanya osilatorik. Karena nilai maksimal cosinus adalah satu, perpindahan x harus terletak antara kurva $x(t) = \pm Ce^{-\beta t}$. Jadi ini menyerupai sebuah kurva cosinus dengan amplitudo yang semakin kecil. Dalam kasus ini, gaya redaman yang dinyatakan oleh β lebih kecil daripada gaya pulih yang direpresentasikan ω dan tidak bisa menghalangi osilasi. Oleh sebab itu, sistem dinamakan teredam sebagian.

Tiga buah kasus diilustrasikan dalam contoh berikut dengan parameter spesifik.

Contoh 5.6.1. Carilah perpindahan $x(t)$ osilator harmonik teredam yang memenuhi persamaan

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0.$$

Misalkan syarat batasnya adalah

$$x(0) = x_0; \quad v(0) = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Carilah x sebagai fungsi dari waktu t , jika $\omega_0 = 4$ dan (a) $\beta = 5$, (b) $\beta = 4$, (c) $\beta = 1$. Gambarkan solusi tiga buah kasus ini.

Solusi 5.6.1. (a) Karena $\beta = 5$ dan $\omega_0 = 4$, gerakanya teredam kuat. Akar persamaan karakteristiknya adalah

$$\alpha_1, \alpha_2 = -5 \pm \sqrt{25 - 16} = -2, -8.$$

Jadi

$$x(t) = A_1e^{-2t} + A_2e^{-8t}.$$

Kondisi awal mensyaratkan A_1 dan A_2 memenuhi

$$A_1 + A_2 = x_0, \quad -2A_1 - 8A_2 = 0.$$

Jadi

$$x(t) = x_0 \left(\frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-8t} \right).$$

Grafik fungsi ini ditunjukkan garis titik-titik pada Gambar 5.2.

(b) Karena $\beta = 4$ dan $\omega_0 = 4$, gerakanya teredam kritis. Akar persamaan karakteristiknya $-\beta$ dua kali

$$\alpha_1, \alpha_2 = -\beta = -4.$$

Jadi

$$x(t) = (A + Bt)e^{-4t}.$$

Dari kondisi awal, kita memperoleh

$$A = x_0, \quad B = 4x_0.$$

Sehingga

$$x(t) = x_0(1 + 4t)e^{-4t}.$$

Grafik fungsi ini ditunjukkan garis lingkaran berlubang pada Gambar 5.2.

(c) Untuk $\beta = 4$ dan $\omega_0 = 4$, gerakanya teredam sebagian. Solusinya bisa dituliskan sebagai

$$x(t) = Ce^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi)$$

dengan

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{15}.$$

Dari syarat batas

$$\begin{aligned} x(0) &= C \cos(-\phi) = x_0, \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} &= \beta C \cos(-\phi) - \omega C \sin(-\phi) = 0, \end{aligned}$$

kita memperoleh

$$\tan \phi = \frac{\beta}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{15}}, \quad C = \frac{1}{\cos \phi} x_0.$$

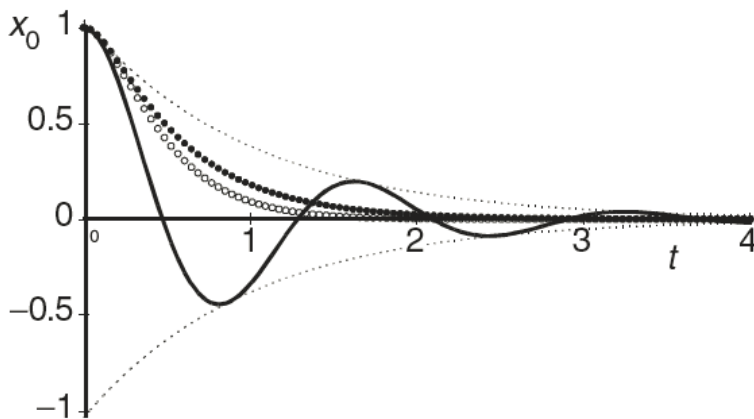
Karena $\cos \phi = (1 + \tan^2 \phi)^{1/2}$,

$$C = \frac{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}{\omega} x_0 = \frac{4}{\sqrt{15}} x_0$$

Oleh karena itu

$$x(t) = \frac{4}{\sqrt{15}} x_0 e^{-t} \cos \left(\sqrt{15}t - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{15}} \right).$$

Grafik fungsi ini ditunjukkan garis penuh pada Gambar 5.2. Amplitudo teredamnya $Ce^{-\beta t}$ juga ditunjukkan dengan garis putus-putus. Dalam kasus teredam kuat dan



Gambar 5.2: Getaran bebas dengan redaman. Mula-mula balok pada x_0 dan dilepaskan dari keadaan diam. Garis titik-titik untuk gerak teredam kuat, garis lingkaran terbuka untuk gerak teredam kritis, garis penuh untuk teredam sebagian. Amplitudo teredamnya diberikan oleh garis putus-putus.

kritis, jika terdapat kecepatan awal negatif yang besar, ini memungkinkan balok untuk mencapai kesetimbangan. Dalam kasus ini, balok akan berhenti sejenak dalam posisi negatif x . Setelah itu, akan kembali ke $x = 0$ secara monotonik. Jadi meskipun mencapai titik setimbang, balok hanya bisa melakukannya satu kali. Maka gerakanya tidak osilatorik.

Gerak teredam sebagian osilatorik meskipun amplitudonya mendekati nol ketika $t \rightarrow \infty$. Frekuensi teredam $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ selalu lebih kecil daripada frekuensi alami ω_0 .

5.6.3 Getaran Bebas dengan Redaman Coloumb

Dari kuliah fisika dasar, kita semua mempelajari bahwa gaya gesek pada sebuah balok yang bergerak pada bidang sebanding dengan gaya normal yang bekerja pada bidang kontak. Gaya gesek ini bekerja dalam arah berlawanan dengan kecepatan dan dibedakan oleh

$$F_c = \mu N,$$

dengan N adalah gaya normal dan μ adalah koefisien gesek. Ketika gerak diredam oleh gaya gesek, ini dikenal sebagai redaman Coloumb. Charles Augustin Coulomb (1736 – 1806) pertama mengusulkan hubungan ini, tetapi dia jauh lebih dikenal untuk hukum tentang gaya elektrostatik. Namanya juga diingat melalui satuan muatan listrik. Redaman Coulomb juga dikenal sebagai redaman konstan, karena besarnya gaya redaman independen dari perpindahan dan kecepatan.

Namun, tanda gaya gesekan berubah terhadap arah kecepatan, dan kita perlu mempertimbangkan gerak dalam dua arah secara terpisah.

Ketika blok bergerak dari kanan ke kiri, gaya gesekannya ke kanan dan memiliki tanda positif. Dengan gaya gesekan ini, persamaan gerak diberikan oleh

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + \mu N.$$

Persamaan ini memiliki sebuah suku tak homogen konstan. Solusinya adalah

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{\mu N}{k}, \quad (5.38)$$

dengan $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ yang sama dengan frekuensi alami osilator tak teredam.

Ketika blok bergerak dari kiri ke kanan, gaya gesekannya ke kiri dan memiliki tanda negatif. Dengan gaya gesekan ini, persamaan gerak diberikan oleh

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu N.$$

Solusi persamaannya adalah

$$x(t) = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t - \frac{\mu N}{k}. \quad (5.39)$$

Konstanta A, B, C, D ditentukan oleh kondisi awal. Sebagai contoh, jika balok dilepaskan dari keadaan diam pada jarak x_0 ke arah kanan titik kesetimbangan, maka

$x(0) = x_0$ dan kecepatannya v , yang merupakan turunan pertama x , pada $t = 0$ adalah nol. Dalam kasus ini, gerak mulai dari kanan ke kiri. Dengan (5.38), kita mempunyai

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin \omega_0 t + \omega B \cos \omega_0 t.$$

Jadi kondisi awalnya adalah

$$x(0) = A + \frac{\mu N}{k} = x_0, \quad v(0) = \omega_0 B = 0.$$

Sehingga $A = x_0 - \mu N/k$, $B = 0$ dan

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \omega_0 t + \frac{\mu N}{k}.$$

Persamaan ini menyatakan sebuah osilator harmonik sederhana dengan posisi setimbang digeser dari nol ke $\mu N/k$. Tetapi gerak ini hanya berlaku untuk setengah pertama dari siklus pertama. Ketika $t = \pi/\omega_0$, kecepatan balok sama dengan nol dan balok berada pada posisi ekstrim kiri x_1 yaitu

$$x_1 = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \omega_0 \frac{\pi}{\omega_0} + \frac{\mu N}{k} = -x_0 + 2\frac{\mu N}{k}.$$

Dalam setengah siklus berikutnya, balok bergerak dari kiri ke kanan, sehingga kita harus menggunakan (5.39). Untuk menentukan C dan D , kita menggunakan fakta $x(t = \pi/\omega_0) = x_1$ dan $v(t = \pi/\omega_0) = 0$. Dengan syarat ini, kita mempunyai

$$\begin{aligned} x\left(t = \frac{\pi}{\omega_0}\right) &= C \cos \omega_0 \frac{\pi}{\omega_0} + D \sin \omega_0 \frac{\pi}{\omega_0} - \frac{\mu N}{k} = -C - \frac{\mu N}{k} = x_1 \\ v\left(t = \frac{\pi}{\omega_0}\right) &= -\omega_0 C \sin \omega_0 \frac{\pi}{\omega_0} + \omega_0 D \cos \omega_0 \frac{\pi}{\omega_0} = -\omega_0 D = 0 \end{aligned}$$

Jadi $C = -x_1 - \frac{\mu N}{k} = x_0 - 3\frac{\mu N}{k}$, $D = 0$ dan (5.39) menjadi

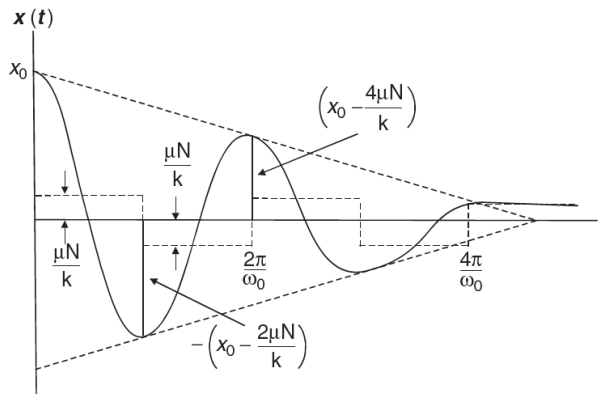
$$x(t) = \left(x_0 - 3\frac{\mu N}{k}\right) \cos \omega_0 t - \frac{\mu N}{k}.$$

Ini juga merupakan gerak harmonik sederhana dengan posisi kesetimbangan digeser ke $-\mu N/k$. Persamaan ini berlaku untuk $\pi/\omega_0 \leq t \leq 2\pi/\omega_0$. Pada akhir setengah siklus ini, kecepatannya sama dengan nol

$$v\left(t = \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = -\omega_0 \left(x_0 - 3\frac{\mu N}{k}\right) \sin \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} = 0$$

dan balok berada pada x_2 yaitu

$$x_2 = \left(x_0 - 3\frac{\mu N}{k}\right) \cos \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{\mu N}{k} = x_0 - 4\frac{\mu N}{k}.$$



Gambar 5.3: Perpindahan x sebuah balok sebagai fungsi waktu t dalam sistem massa-pegas dengan redaman Coloumb. Mula-mula balok berada pada $x = x_0$ dan dilepaskan dari keadaan diam.

Ini menjadi kondisi awal untuk setengah siklus ketiga, dan prosedur bisa dilanjutkan sampai gerakan berhenti. Perpindahan x sebagai fungsi dari waktu t dari gerakan ini ditunjukkan pada Gambar 5.3.

Perlu dicatat bahwa frekuensi getaran teredam Coulomb sama seperti yang dari getaran bebas tanpa redaman. Hal ini bertentangan dengan redaman viskos. Selain itu, jika x_n adalah maksimum lokal, maka

$$x_n - x_{n-2} = -\frac{4\mu N}{k}.$$

Ini berarti tiap siklus berurutan, amplitudo getaran direduksi dengan $4\mu N/k$ dalam selang waktu $2\pi/\omega_0$. Jadi nilai maksimum osilasi semuanya berada pada garis lurus. Kemiringan garis lurus yang melingkupi adalah

$$\frac{4\mu N/k}{2\pi/\omega_0} = -\frac{2\mu N\omega_0}{\pi k}.$$

Dengan cara yang sama semua nilai minimum harus berada pada sebuah garis lurus dengan kemiringan $2\mu N\omega_0/\pi k$. Karakteristik ini ditunjukkan Gambar 5.3.

Gerak berhenti ketika kecepatannya nol dan gaya pulih pegas kx sama atau lebih kecil dari gaya gesek μN . Sehingga jumlah setengah siklus n_0 yang dilewati sebelum gerak berhenti bisa diperoleh dari syarat

$$k\left(x_0 - n_0 \frac{2\mu N}{k}\right) \leq \mu N.$$

Jika $x_0 \leq \mu N/k$, balok bahkan tidak akan bergerak. Untuk $\mu N/k < x_0 < 2\mu N/k$, balok akan berhenti sebelum mencapai posisi setimbang. Posisi akhir balok biasanya berbeda dengan posisi setimbang dan menyatakan perpindahan tetap.

5.6.4 Getaran Terpaksa tanpa Redaman

Sebuah sistem dinamik biasanya berkaitan dengan berbagai jenis gaya luar. Dalam subab ini, kita perlu memperhatikan respon sistem massa-pegas terhadap gaya luar dalam bentuk $F_0 \cos \omega t$. Pertama anggap tidak terdapat redaman, maka persamaan geraknya diberikan oleh

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F_0 \cos \omega t$$

atau

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

dengan $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ adalah frekuensi alami sistem. Solusi umum merupakan jumlah fungsi pelengkap x_c dan solusi khusus x_p . Fungsi pelengkap memenuhi persamaan homogen

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} + \omega_0^2 x_c = 0$$

dan diberikan oleh

$$x_c(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t.$$

Karena suku tak homogen memiliki frekuensi ω , solusi khusus memiliki bentuk

$$x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Substitusikan ke dalam persamaan

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

kita peroleh $B = 0$ dan $A = F_0 / [m(\omega_0^2 - \omega^2)]$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

dan solusi umumnya diberikan oleh $x_p + x_c$

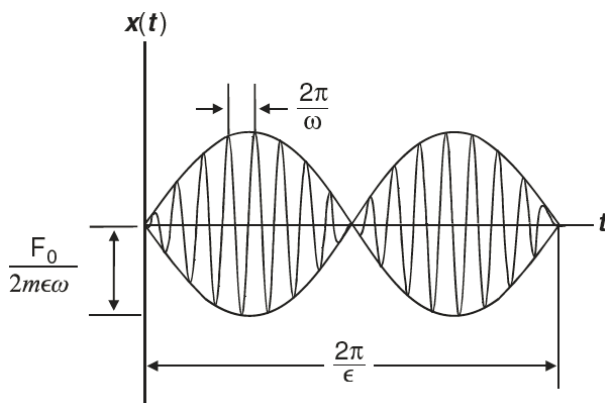
$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

merupakan jumlah gerak periodik dengan frekuensi berbeda.

Ketukan

Anggap kondisi awalnya adalah $x(0) = 0$ dan $v(0) = 0$, maka c_1 dan c_2 adalah

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0.$$



Gambar 5.4: Ketukan yang diakibatkan dua buah getaran dengan frekuensi yang hampir sama.

Solusinya diberikan oleh

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \\ &= \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t. \end{aligned}$$

Misalkan frekuensi paksa ω sedikit lebih kecil dibandingkan dengan frekuensi alami ω_0 sehingga $\omega_0 - \omega = 2\epsilon$, dengan ϵ sebuah kuantitas positif kecil. Maka $\omega_0 + \omega \approx 2\omega$ dan solusinya menjadi

$$x(t) \approx \frac{F_0}{2m\omega\epsilon} \sin \epsilon t \sin \omega t.$$

Karena ϵ kecil, maka fungsi $\sin \epsilon t$ variasinya terhadap waktu juga kecil. Jadi faktor

$$\frac{F_0}{2m\omega\epsilon} \sin \epsilon t$$

bisa dianggap sebagai amplitudo variabel getaran yang periodenya $2\pi/\omega$. Osilasi amplitudo yang memiliki periode besar $2\pi/\epsilon$ yang disebut periode ketukan. Gerak ini ditunjukkan Gambar 5.4.

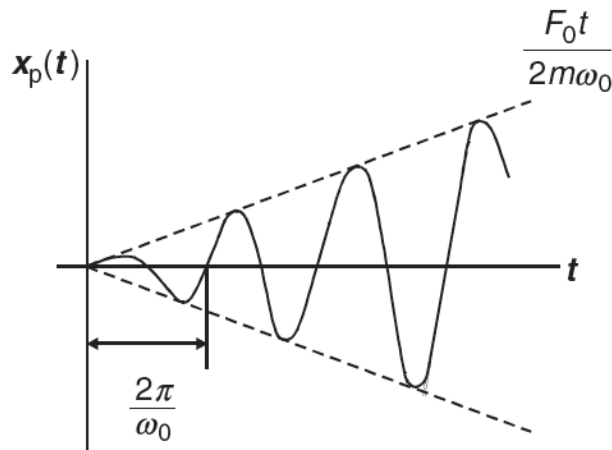
Resonansi

Dalam kasus frekuensi gaya paksa sama dengan frekuensi alami sistem, yaitu $\omega = \omega_0$, maka solusi khususnya diberikan oleh

$$x_p(t) = At \cos \omega_0 t + Bt \sin \omega_0 t.$$

Substitusikan ke dalam persamaan tak homogen asalnya, kita memperoleh $A = 0$, $B = F_0/(2m\omega_0)$. Jadi solusi umumnya diberikan oleh

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$



Gambar 5.5: Resonansi tanpa redaman. Ketika frekuensi gaya paksa sama dengan frekuensi alami, gerakannya akan tak terikat.

Karena adanya suku $t \sin \omega_0 t$, gerak akan menjadi tak terikat ketika $t \rightarrow \infty$. Ini dikenal dengan resonansi. Fenomena resonansi dikarakterisasi oleh x_p yang ditunjukkan Gambar 5.5. Jika terdapat redaman gerak akan tetap tak terikat. Tetapi, mungkin akan tetap terdapat respon besar jika redamannya kecil dan ω dekat dengan ω_0 .

5.6.5 Getaran Terpaksa dengan Redaman Viskos

Dengan redaman viskos, persamaan gerak sistem massa-pegas dengan sebuah fungsi paksa harmonik diberikan oleh

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (5.40)$$

Solusi persamaan ini diberikan lagi oleh jumlah fungsi pelengkap dan solusi khusus. Fungsi pelengkap memenuhi persamaan homogen

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} + c \frac{dx_c}{dt} + kx_c = 0,$$

yang menyatakan getaran bebas dengan redaman. Seperti dibahas sebelumnya, getaran bebas berhenti dengan semua kondisi awal yang mungkin. Bagian dari solusi ini disebut transien. Laju peluruhan gerak transien bergantung pada parameter sistem m, k, c .

Solusi umum dari persamaan akhirnya menjadi solusi khusus yang mewakili getaran mapan.

Solusi khusus ini diharapkan memiliki frekuensi yang sama dengan fungsi paksa, kita bisa menuliskan solusi dalam bentuk berikut:

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \phi). \quad (5.41)$$

Substitusikan ke dalam persamaan gerak, kita peroleh

$$A[(k - m\omega^2) \cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi)] = F_0 \cos \omega t.$$

Gunakan identitas trigonometrik:

$$\cos(\omega t - \phi) = \cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi,$$

$$\sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi$$

dan samakan koefisien $\sin \omega t$ dan $\cos \omega t$ pada kedua ruas persamaan hasilnya, kita peroleh

$$A[(k - m\omega^2) \cos \phi + c\omega \sin \phi] = F_0, \quad (5.42a)$$

$$A[(k - m\omega^2) \sin \phi - c\omega \cos \phi] = 0. \quad (5.42b)$$

Dari (5.42b):

$$(k - m\omega^2) \sin \phi = c\omega \cos \phi$$

tetapi $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi$ jadi

$$(k - m\omega^2)^2 (1 - \cos^2 \phi) = (c\omega \cos \phi)^2.$$

Oleh karena itu:

$$\cos \phi = \frac{k - m\omega^2}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}}.$$

Diperoleh:

$$\sin \phi = \frac{c\omega}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}}.$$

Substitusikan $\cos \phi$ dan $\sin \phi$ ke dalam (5.42a), kita peroleh

$$A = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} = \frac{F_0}{[m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}}, \quad (5.43)$$

dengan $\omega_0^2 = k/m$. Solusi khusus $x_p(t)$ diberikan oleh

$$x_p(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \phi)}{[m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{1/2}}, \quad (5.44)$$

dengan

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Perhatikan bahwa $[m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2\omega^2]$ tidak pernah nol, bahkan untuk $\omega = \omega_0$. Maka dengan redaman, geraknya selalu terbatas. Tetapi, jika redaman tidak cukup kuat, amplitudonya bisa sangat besar.

Untuk mencari amplitudo maksimum, kita mengambil turunan A terhadap ω dan menjadikannya nol. Ini menunjukkan frekuensi yang membuat $\frac{dA}{d\omega} = 0$ harus memenuhi persamaan

$$2m^2(\omega_0^2 - \omega^2) - c^2 = 0.$$

Jadi amplitudo maksimalnya diperoleh ketika

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}}. \quad (5.45)$$

Perhatikan bahwa untuk $c^2 > 2m^2\omega_0^2$, tidak ada ω riil memenuhi persamaan ini. Dalam kasus tersebut, tidak terdapat nilai maksimum untuk $\omega \neq 0$. Amplitudonya berupa fungsi menurun monotonik dari gaya paksa.

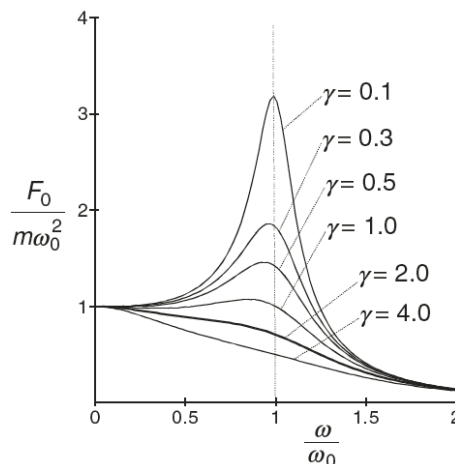
Tetapi jika $c^2 < 2m^2\omega_0^2$ akan terdapat nilai maksimum. Substitusikan (5.45) kembali pada A , kita peroleh amplitudo maksimal

$$A_{\max} = \frac{2mF_0}{c(4m^2\omega_0^2 - c^2)^{1/2}}$$

Untuk melihat hubungan antara amplitudo A dan frekuensi paksa ω , kita biasa menyatakan A dalam (5.43) sebagai

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2 [(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + \gamma(\omega/\omega_0)^2]^{1/2}}$$

dengan $\gamma = c^2/m^2\omega_0^2$. Grafik A dalam satuan $F_0/m\omega_0^2$ sebagai fungsi ω/ω_0 ditunjukkan Gambar 5.6 untuk berbagai nilai γ berbeda. Untuk $\gamma = 0$, ini adalah getaran terpaksa tanpa redaman dan geraknya tak terikat pada $\omega = \omega_0$. Untuk γ kecil, amplitudo memiliki puncak tajam pada frekuensi yang sedikit lebih kecil dari ω_0 . Ketika γ semakin besar, puncak semakin kecil dan lebar. Ketika $\gamma \geq 2$, tidak terdapat lagi nilai maksimum.



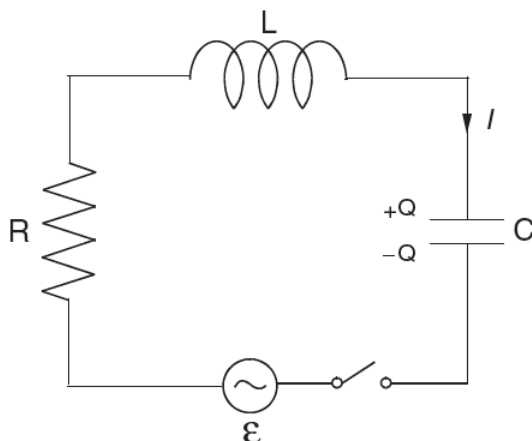
Gambar 5.6: Getaran terpaksa dengan redaman. Amplitudo keadaan tetap sebagai fungsi ω/ω_0 , $\gamma = (c/m\omega_0)^2$ merepresentasikan kekuatan redaman. Untuk $\gamma \geq 2$ tidak terdapat maksimum.

Dalam mendesain struktur, kita ingin memasukkan sejumlah redaman untuk menghindari resonansi yang bisa mengakibatkan bencana. Di lain pihak, jika kita mendesain

sebuah alat untuk mendeteksi gaya periodik, kita akan memilih m, k, c agar memenuhi (5.45) sehingga respon alat tersebut terhadap gaya tersebut maksimum.

5.7 Rangkaian Listrik

Sebagai contoh kedua aplikasi persamaan diferensial orde dua dengan koefisien konstan, kita perhatikan rangkaian listrik sederhana pada Gambar 5.7.



Gambar 5.7: Rangkaian listrik osilatorik dengan hambatan, induktansi, dan kapasitor.

terdapat tiga jenis dalam komponen rangkaian; sebuah resistor dengan sebuah hambatan R dengan satuan ohm, sebuah induktor dengan induktansi L dan henri, dan kapasitor dengan kapasitansi C dalam farad. Ketiganya dihubungkan seri dengan sumber gaya gerak listrik (ggl) pada waktu (t) memberikan sebuah tegangan $V(t)$ diukur dalam volt. Kapasitor adalah alat untuk menyimpan muatan listrik Q , diukur dalam coulomb. Jika saklar ditutup, terdapat arus $I(t)$, dalam ampere, mengalir di dalam rangkaian. Dalam fisika dasar, kita belajar bahwa tegangan berkurang ketika melalui resistor sama dengan IR , tegangan turun ketika melewati induktor adalah $L \frac{dI}{dt}$, dan melalui kapasitor adalah $\frac{1}{C}Q$. Jumlah ketiganya sama dengan tegangan yang diberikan

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = V(t).$$

Laju pertambahan muatan pada kapasitor sama dengan besarnya arus yang mengalir

$$\frac{dQ}{dt} = I.$$

Dengan hubungan ini kita peroleh persamaan diferensial linier tak homogen orde dua untuk Q :

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t).$$

Tabel 5.2: Analogi sistem mekanik dengan rangkaian listrik

Sifat Mekanik	Sifat Rangkaian Listrik
$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$	$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t$
perpindahan x	Muatan Q
kecepatan $v = \frac{dx}{dt}$	arus $I = \frac{dQ}{dt}$
massa m	induktansi L
konstanta pegas k	invers kapasitansi $1/C$
koefisien redaman c	hambatan R
gaya $F_0 \cos \omega t$	tegangan $V_0 \cos \omega t$
frekuensi resonansi $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$	frekuensi resonansi $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

Anggap rangkaian diberikan osilasi gelombang cosinus murni $V(t) = V_0 \cos \omega t$, maka persamaannya menjadi

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t. \quad (5.46)$$

5.7.1 Penghitungan Analog

Kita melihat bahwa persamaan yang menggambarkan rangkaian LRC adalah sama persis dengan (5.40), persamaan yang menggambarkan getaran terpaksa sistem pegas-massa dengan redaman viskos. Fakta bahwa persamaan diferensial yang sama berfungsi untuk menjelaskan dua fenomena fisik yang sama sekali berbeda adalah contoh mencolok dari unifikasi peran matematika dalam ilmu alam. Dengan substitusi yang tepat, solusi dari (5.40) bisa diterapkan pada rangkaian listrik. Korespondensi antara kasus rangkaian listrik dan mekanik akan ditampilkan dalam Tabel 5.2

Korespondensi antara sifat mekanik dan listrik juga bisa digunakan untuk membangun sebuah model rangkaian listrik dari sistem mekanik tertentu. Ini adalah cara yang sangat berguna untuk memprediksi kinerja dari sebuah sistem mekanik, karena komponen listrik yang murah dan pengukuran listrik biasanya sangat akurat. Metode penghitungan gerak dari sebuah sistem mekanik dari sebuah rangkaian listrik dikenal sebagai penghitungan analog.

Dengan langsung mengkonversi $x_p(t)$ ke dalam analogi setara rangkaian listrik, solusi mantap (5.46) adalah

$$Q(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t - \phi)}{\left[\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right)^2 + (\omega R)^2\right]^{1/2}},$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega R}{\frac{1}{C} - \omega^2 L} = \tan^{-1} \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

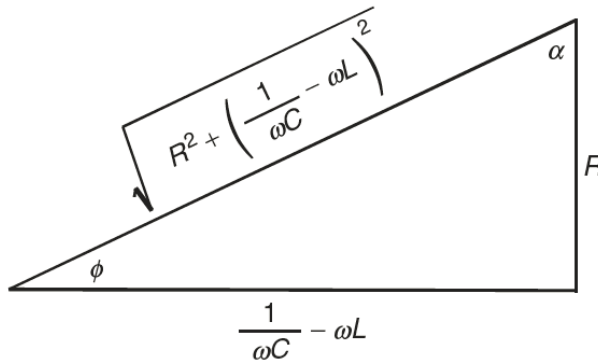
Secara umum, arus yang menjadi ketertarikan utama, sehingga kita turunkan Q terhadap waktu untuk memperoleh arus mantap

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{-\omega V_0 \sin(\omega t - \phi)}{[(\frac{1}{C} - \omega^2 L)^2 + (\omega R)^2]^{1/2}} = \frac{-V \sin(\omega t - \phi)}{[(\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2 + R^2]^{1/2}}.$$

Untuk melihat lebih jelas hubungan antara arus $I(t)$ dan tegangan $V(t) = \cos \omega t$, kita akan menyatakan arus dalam fungsi cosinus. Hal ini bisa dilakukan dengan memperhatikan bahwa

$$\tan \phi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$$

bisa dinyatakan dengan segitiga berikut.



Jelaslah $\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ dan

$$\tan \alpha = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

Karena $\sin(\omega t - \frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cos(\omega t + \alpha)$, diperoleh:

$$I(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t + \alpha)}{[(\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2 + R^2]^{1/2}}$$

Biasanya $I(t)$ juga dituliskan sebagai berikut:

$$I(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t - \beta)}{[(\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2 + R^2]^{1/2}}, \quad (5.47)$$

dengan $\beta = -\alpha$ dan

$$\tan \beta = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

5.7.2 Solusi Kompleks dan Impedansi

Solusi khusus (5.46) bisa diperoleh dengan metode eksponensial kompleks. Metode ini menawarkan keuntungan penghitungan dan konseptual. Kita bisa menggantikan $V_0 \cos \omega t$ dengan $V_0 e^{i\omega t}$ dan menyelesaikan persamaan

$$L \frac{d^2 Q_c}{dt^2} + R \frac{dQ_c}{dt} + \frac{1}{C} Q_c = V_0 e^{i\omega t}. \quad (5.48)$$

Bagian riil dari solusi Q_c adalah muatan Q , dan bagian riil arus I_c yaitu $\frac{dQ_c}{dt}$ adalah arus I . Kebergantungan arus dan muatan pada waktu juga harus berbentuk $e^{i\omega t}$

$$Q_c = \hat{Q} e^{i\omega t}, \quad I_c = \hat{I} e^{i\omega t},$$

dengan \hat{Q} dan \hat{I} kompleks yang bebas terhadap waktu. Karena

$$\frac{dQ_c}{dt} = i\omega Q_c, \quad \frac{d^2 Q_c}{dt^2} = -\omega^2 Q_c,$$

Persamaan diferensial (5.48) menjadi sebuah persamaan aljabar

$$\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C} \right) Q_c = V_0 e^{i\omega t}.$$

Jelaslah

$$Q_c = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}}$$

dan

$$I_c = \frac{dQ_c}{dt} = \frac{i\omega V_0 e^{i\omega t}}{-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}} = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (5.49)$$

Tuliskan penyebut dalam bentuk polar

$$R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \right]^{1/2} e^{i\beta},$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

Kita melihat bahwa

$$I_c = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \right]^{1/2} e^{i\beta}} = \frac{V_0 e^{i\omega t - \beta}}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \right]^{1/2}}.$$

Bagian riil I_c adalah

$$I = \frac{V_0 \cos(\omega t - \beta)}{\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \right]^{1/2}}$$

yang identik dengan (5.47).

Dalam teknik listrik, biasanya kita mendefinisikan $V_0 e^{i\omega t}$ sebagai tegangan kompleks dan mendefinisikan

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

sebagai impedansi kompleks Z . Dengan notasi ini (5.49) bisa dituliskan dalam bentuk

$$I_c = \frac{V_c}{Z}.$$

Perhatikan bahwa jika komponen sirkuit yang terdiri dari resistansi R saja, impedansi akan sama dengan R , sehingga hubungan ini akan menyerupai hukum Ohm untuk rangkaian arus searah: $V = RI$. Jadi peran impedansi dalam rangkaian bolak-balik dengan tegangan sinusoidal sama dengan resistor dalam rangkaian searah.

Ini adalah persoalan sederhana untuk menunjukkan bahwa jika komponen rangkaian terdiri hanya dari induktansi L , impedansi hanya $i\omega L$. Demikian pula, dengan hanya kapasitansi C , impedansi hanya $1/(i\omega C)$. Jadi kita melihat bahwa ketika komponen listrik dihubungkan secara seri, impedansi gabungan yang sesuai sederhana seperti yang dilakukan resistensi.

Dalam cara yang sama, kita bisa menunjukkan bahwa komponen listrik ketika terhubung secara paralel, impedansi gabungannya yang sesuai juga menggabungkan hanya seperti resistor. Sebagai contoh, jika R, L, C yang terhubung secara paralel, arus kompleks bisa dicari dengan membagi tegangan kompleks dengan impedansi Z didefinisikan sederhana oleh hubungan

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + i\omega C.$$

Bagian riil hasil ini adalah arus dalam rangkaian AC. Hal ini membuat mudah untuk menentukan perilaku dalam sistem listrik.

5.8 Sistem Persamaan Diferensial Linier Simultan

Dalam banyak aplikasi, perlu untuk secara bersamaan mempertimbangkan beberapa variabel tak bebas, masing-masing bergantung pada variabel bebas yang sama, biasanya waktu t . Model matematika umumnya sistem persamaan diferensial linear. Pendekatan dasar untuk memecahkan sistem persamaan diferensial adalah menghilangkan variabel tak bebas satu per satu melalui penggabungan beberapa pasang persamaan, sampai hanya ada satu persamaan yang tersisa mengandung satu variabel bebas. Persamaan ini biasanya ordenya akan lebih tinggi, dan bisa diselesaikan dengan metode yang telah kita bahas. Setelah persamaan ini diselesaikan, variabel bebas lainnya bisa ditemukan. Metode ini mirip dengan solusi dari sistem persamaan aljabar simultan.

Sebuah metode yang terkait erat adalah untuk menemukan nilai eigen dari matriks yang dibentuk oleh persamaan diferensial. Metode ini menyediakan kerangka matematik untuk membahas frekuensi normal dari sistem, yang penting secara fisik.

5.8.1 Reduksi Sistem menjadi Sebuah Persamaan

Marilah kita selesaikan sistem persamaan dengan dua buah variabel tak bebas $x(x)$ dan $y(t)$

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y, \quad (5.50a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -4x + 3y + 10 \cos t, \quad (5.50b)$$

dengan kondisi awal

$$x(0) = 0, \quad y(0) = -1.$$

Dari persamaan pertama, kita mempunyai

$$y = \frac{dx}{dt} + 2x, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt}.$$

Substitusikan ke dalam persamaan kedua

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = -4x + 3\left(\frac{dx}{dt} + 2x\right) + 10 \cos t$$

atau

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 10 \cos t. \quad (5.51)$$

Ini adalah persamaan diferensial orde dua tak homogen, fungsi pelengkap $x_c(t)$ dan solusi khusus $x_p(t)$ adalah $c_1e^{-t} + c_2e^{2t}$ dan $-3 \cos t - \sin t$. Maka

$$x = x_c + x_p = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - 3 \cos t - \sin t$$

Solusi $y(t)$ adalah

$$y = \frac{dx}{dt} + 2x = c_1e^{-t} + 4c_2e^{2t} - 7 \cos t + \sin t.$$

Konstanta c_1 dan c_2 ditentukan oleh kondisi awal

$$x(0) = c_1 + c_2 - 3 = 0,$$

$$y(0) = c_1 + 4c_2 - 7 = -1,$$

yang memberikan $c_1 = 2$ dan $c_2 = 1$. Jadi

$$x(t) = 2e^{-t} + e^{2t} - 3 \cos t - \sin t,$$

$$y(t) = 2e^{-t} + 4e^{2t} - 7 \cos t + \sin t.$$

Jika jumlah persamaan tergangungnya sedikit (2 atau 3), metode paling sederhana menyelesaikan persamaan ini adalah substitusi langsung. Tetapi untuk sistem yang lebih besar, kita akan membahas sistem yang lebih sistematis dalam Subbab 5.8.2.

5.8.2 Aturan Cramer untuk Persamaan Diferensial Simultan

Kita akan menggunakan contoh pada subbab terakhir untuk mengilustrasikan metode ini. Pertama kita gunakan notasi D untuk $\frac{d}{dx}$ dan menuliskan (5.50) sebagai

$$(D + 2)x - y = 0, \quad (5.52a)$$

$$4x + (D - 3)y = 10 \cos t. \quad (5.52b)$$

Ingat kembali untuk sebuah sistem persamaan aljabar

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2,$$

solusinya bisa diperoleh dengan aturan Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Kita bisa menggunakan formalisme yang sama untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial. Yaitu $x(t)$ pada (5.52) bisa dituliskan sebagai

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 10 \cos t & (D + 3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D + 2) & -1 \\ a4 & (D - 3) \end{vmatrix}},$$

atau

$$\begin{vmatrix} (D + 2) & -1 \\ 4 & (D - 3) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 10 \cos t & (D - 3) \end{vmatrix}.$$

Ekspansikan determinan, kita peroleh

$$[(D + 2)(D - 3) + 4]x = 10 \cos t$$

Ini berarti

$$(D^2 - D - 2)x = 10 \cos t$$

yang identik dengan (5.51) pada subbab terakhir. Dengan mengikuti langkah yang sama pada subbab terakhir, kita peroleh

$$x(t) = x_c + x_p = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - 3 \cos t - \sin t.$$

Substitusikan kembali ke dalam persamaan diferensial asalnya, diperoleh $y(t)$ yaitu

$$y(t) = c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{2t} - 7 \cos t + \sin t.$$

Cara alternatif untuk menghitung $y(t)$ adalah dengan memperhatikan

$$y = \frac{\begin{vmatrix} (D+2) & 0 \\ 4 & 10 \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D+2) & -1 \\ 4 & (D-2) \end{vmatrix}},$$

atau

$$\begin{vmatrix} (D+2) & -1 \\ 4 & (D-3) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} (D+2) & 0 \\ 4 & 10 \cos t \end{vmatrix}.$$

Ekspansikan determinan, kita peroleh

$$(D^2 - D - 2)y = 20 \cos t - 10 \sin t.$$

Solusi persamaan ini adalah

$$y(t) = y_c + y_p = k_1 e^{-t} + k_2 e^{2t} - 7 \cos t + \sin t.$$

Perhatikan bahwa fungsi pelengkap x_c dan y_c memenuhi persamaan diferensial homogen yang sama

$$(D^2 - D - 2)x_c = 0, \quad (D^2 - D - 2)y_c = 0.$$

Karena kita telah menuliskan $x_c = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$, kita harus menghindari penggunaan c_1 dan c_2 sebagai konstanta y_c . Yaitu dalam $y_c = k_1 e^{-t} + k_2 e^{2t}$, k_1 dan k_2 tidaklah harus sama dengan c_1 dan c_2 , karena tidak terdapat alasan yang mengharuskannya sama. Untuk mencari hubungannya, kita harus mensubstitusikan kembali $x(t)$ dan $y(t)$ ke dalam persamaan diferensial asalnya. Sebagai contoh, substitusikan keduanya kembali ke dalam $(D+2)x = y$, kita mempunyai

$$c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{2t} - 7 \cos t + \sin t = k_1 e^{-t} + k_2 e^{2t} - 7 \cos t + \sin t.$$

Jadi

$$k_1 = c_1, k_2 = 4c_2.$$

Dengan demikian kita memperoleh hasil yang sama seperti sebelumnya.

Ini terlihat bahwa setelah variabel tak bebas pertama $x(t)$ ditemukan dari aturan Cramer, maka akan lebih sederhana untuk menemukan variabel tak bebas kedua $y(t)$ dengan substitusi langsung. Jika kita terus menggunakan aturan Cramer untuk mencari $y(t)$, kita akan memperkenalkan beberapa konstanta tambahan yang harus dihilangkan dengan mensubstitusikan $x(t)$ dan $y(t)$ kembali ke dalam persamaan diferensial asalnya.

5.8.3 Persamaan Simultan sebagai Persoalan Nilai Eigen

Sebuah sistem persamaan diferensial bisa diselesaikan sebagai sebuah persoalan nilai eigen dalam teori matriks. Kita akan melanjutkan untuk menggunakan contoh yang sama untuk mengilustrasikan metode ini. Pertama kita tuliskan persamaan (5.50) dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned} -2x + y &= x', \\ -4x + 3y &= y' - 10 \cos t. \end{aligned}$$

Dengan notasi matriks menjadi

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' - 10 \cos t \end{pmatrix}.$$

Misalkan

$$x = x_c + x_p, \quad y = y_c + y_p.$$

Fungsi pelengkap x_c dan y_c memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_c \\ y'_c \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

dan solusi khusus memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p - 10 \cos t \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Karena semuanya adalah persamaan linier dengan koefisien konstan, kita asumsikan

$$x_c = c_1 e^{\lambda t}, \quad y_c = c_2 e^{\lambda t},$$

jadi

$$x' = \frac{dx_c}{dt} = \lambda c_1 e^{\lambda t}, \quad y'_c = \frac{dy_c}{dt} = \lambda c_2 e^{\lambda t}.$$

Maka persamaan matriks untuk fungsi pelengkap diberikan oleh:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda c_1 e^{\lambda t} \\ \lambda c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Ini adalah persoalan nilai eigen

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

dengan nilai eigen λ dan vektor eigen $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Sehingga λ harus memenuhi persamaan sekular (karakteristik)

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$(-2 - \lambda)(3 - \lambda) + 4 = 0.$$

Dua buah akarnya λ_1 dan λ_2 adalah

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Vektor eigen yang bersesuaian $\begin{pmatrix} c_1^i \\ c_2^i \end{pmatrix}$. Koefisien c_1^i tidak saling bebas melainkan harus memenuhi persamaan:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^i \\ c_2^i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} c_1^i \\ c_2^i \end{pmatrix}.$$

Dari persamaan ini $\lambda_1 = -1, c_{12} = c_{11}$, dan untuk $\lambda_2 = 2, c_{22} = 4c_{21}$. Jadi terdapat konstanta pengali lain, vektor eigen untuk $\lambda = -1$ adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan untuk $\lambda = 2$ adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Fungsi pelengkap x_c dan y_c diberikan oleh kombinasi linier dua buah solusi ini

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Untuk solusi khusus, karena adanya suku tak homogen $10 \cos t$, kita bisa mengasumsikan $x_p = A \cos t + B \sin t$ dan $y_p = C \cos t + D \sin t$. Tetapi lebih mudah untuk menggunakan fakta bahwa $10 \cos t$ merupakan suku riil dari $10e^{it}$. Kita bisa mengasumsikan x_p adalah bagian riil dari $A_c e^{it}$ dan y_p adalah bagian riil dari $B_c e^{it}$ dengan A_c dan B_c bilangan kompleks. Dengan asumsi ini (5.54) menjadi

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_c e^{it} \\ B_c e^{it} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} iA_c e^{it} \\ iB_c e^{it} - 10e^{it} \end{pmatrix}.$$

Jadi

$$\begin{aligned} -2A_c + B_c &= iA_c, \\ -4A_c + 3B_c &= iB_c - 10, \end{aligned}$$

yang memberikan

$$A_c = -3 + i, \quad B_c = -7 - i.$$

Sehingga

$$x_p = \operatorname{Re}(A_c e^{it}) = -3 \cos t - \sin t,$$

$$y_p = \operatorname{Re}(B_c e^{it}) = -7 \cos t + \sin t.$$

Terakhir, solusi umumnya adalah

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - 3 \cos t - \sin t \\ c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{2t} - 7 \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

seperti sebelumnya.

5.8.4 Transformasi Persamaan Orde n menjadi Sistem n Persamaan Orde Pertama

Kita telah melihat bahwa sebuah sistem persamaan bisa direduksi menjadi sebuah persamaan dengan orde lebih tinggi. Kebalikannya juga berlaku. Semua persamaan diferensial orde n selalu bisa ditransformasikan menjadi persamaan simultan orde n . Marilah kita gunakan metode ini untuk menyelesaikan kasus persamaan diferensial orde dua untuk osilator harmonik teredam

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Misalkan

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx_1}{dt}.$$

Diperoleh:

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{c}{m} \frac{dx_1}{dt} - \frac{k}{m} x_1.$$

Jadi persamaan diferensial orde dua bisa dituliskan sebagai sistem persamaan orde dua

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{dx_1}{dt}, \\ -\frac{k}{m} x_1 - \frac{c}{m} x_2 &= \frac{dx_2}{dt}. \end{aligned}$$

Dengan notasi matriks

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

Karena koefisiennya konstan, kita bisa mengasumsikan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

jadi kita memiliki persoalan nilai eigen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen bisa diperoleh dari persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{vmatrix} = 0.$$

Dua buah akarnya adalah

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2m}(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}).$$

Solusi umumnya persamaan asalnya diberikan oleh

$$x(t) = x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Hasil ini identik dengan (5.37).

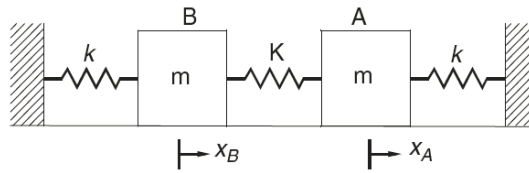
Fakta bahwa persamaan diferensial linier orde n bisa ditransformasikan menjadi sistem n persamaan orde satu tergantung sangat penting karena secara matematik kita bisa menunjukkan sebuah solusi unik untuk sistem persamaan linier orde satu, yang diberikan oleh kondisi awal yang dispesifikasi. Tetapi, kita tidak banyak berkonsentrasi dengan keunikan dan eksistensi karena dalam aplikasi fisis, model matematik, jika diformulasikan dengan benar, haruslah memiliki solusi.

5.8.5 Osilator Tergandeng dan Moda Normal

Gerak sebuah osilator harmonik dinyatakan dengan persamaan diferensial orde dua. Solusinya adalah geraknya dikarakterisasi dengan sebuah frekuensi alami. Sebuah sistem fisis riil biasanya memiliki beberapa frekuensi karakteristik yang berbeda. Sebuah getaran dengan frekuensi ini disebut sebagai moda normal sebuah sistem. Gerak sistem biasanya merupakan kombinasi linier moda normal ini.

Contoh sederhana dua buah osilator terganteng ditunjukkan Gambar 5.8.

Sistem terdiri dari dua buah osilator massa-pegas identik dengan massa m dan konstanta pegas k . Dua buah massa diam berada pada meja licin dan dihubungkan



Gambar 5.8: Dua osilator terdangeng.

dengan sebuah pegas dengan konstanta pegas K . Ketika perpindahan x_A dan x_B nol, pegas tidak teregang maupun tertekan. Pada waktu sebarang, pegas penghubung diregangkan sejauh $x_A - x_B$ dan mendorong atau menarik A dan B dengan gaya pulih sebesar $K(x_A - x_B)$. Jadi besar gaya pulih pada A adalah

$$-kx_A - K(x_A - x_B).$$

Gaya pada B

$$-kx_B + K(x_A - x_B).$$

Jadi persamaan gerak A dan B adalah

$$\begin{aligned} kx_A - K(x_A - x_B) &= m \frac{d^2 x_A}{dt^2} \\ -kx_B + K(x_A - x_B) &= m \frac{d^2 x_B}{dt^2}. \end{aligned}$$

atau dengan notasi matriks

$$\begin{pmatrix} -\frac{k}{m} - \frac{K}{m} & \frac{K}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} - \frac{K}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 x_A}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_B}{dt^2} \end{pmatrix}.$$

Untuk menyederhanakan penulisan, misalkan $\omega_0^2 = k/m$ dan $\omega_1^2 = K/m$. Dengan asumsi $x_A = ae^{\lambda t}$ dan $x_B = be^{\lambda t}$, persamaan terakhir menjadi

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \omega_1^2 & \omega_1^2 \\ \omega_1^2 & -\omega_0^2 - \omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \lambda^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Persamaan ini bisa dianggap sebagai persoalan nilai eigen. Persamaan sekular

$$\begin{vmatrix} -\omega_0^2 - \omega_1^2 - \lambda^2 & \omega_1^2 \\ \omega_1^2 & -\omega_0^2 - \omega_1^2 - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

berarti λ^2 memenuhi persamaan

$$(-\omega_0^2 - \omega_1^2 - \lambda^2)^2 - \omega_1^4 = 0$$

atau

$$\lambda^2 = -\omega_0^2 - \omega_1^2 \pm \omega_1^2.$$

Jadi

$$\lambda^2 = -\omega_0^2, \quad \lambda^2 = -(\omega_1^2 + 2\omega_1^2).$$

Empat buah akarnya adalah

$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i\omega_0, \quad \lambda_3, \lambda_4 = \pm i\omega_c$$

dengan

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_1^2}.$$

Frekuensi ω_0 dan ω_c dikenal sebagai frekuensi normal sistem. Amplitudonya a dan b tidak saling bebas, melainkan harus memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \omega_1^2 & \omega_1^2 \\ \omega_1^2 & -\omega_0^2 - \omega_1^2 - \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Jadi untuk $\lambda = \lambda_1, \lambda_2 = \pm i\omega_0$, jadi $\lambda^2 = -\omega_0^2$, amplitudo a dan b harus memenuhi

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \omega_1^2 + \omega_0^2 & \omega_1^2 \\ \omega_1^2 & -\omega_0^2 - \omega_1^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Diperoleh $a = b$.

Dengan cara yang sama untuk $\lambda = \lambda_3, \lambda_4 = \pm i\omega_c$ hubungan a dan b diberikan oleh

$$\begin{pmatrix} -\omega_0^2 - \omega_1^2 + \omega_0^2 + 2\omega_1^2 & \omega_1^2 \\ \omega_1^2 & -\omega_0^2 - \omega_1^2 + \omega_0^2 + 2\omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

diperoleh $a = -b$.

Perpindahan x_A dan x_B diberikan oleh kombinasi linier empat buah solusi ini

$$\begin{aligned} x_A &= a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + a_3 e^{\lambda_3 t} + a_4 e^{\lambda_4 t}, \\ x_B &= a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} - a_3 e^{\lambda_3 t} - a_4 e^{\lambda_4 t}, \end{aligned}$$

kita telah mensubstitusikan a_1, a_2 untuk b_1, b_2 dan $-a_3, -a_4$ untuk b_3, b_4 . Karena $\lambda_1 = i\omega_0$ dan $\lambda_2 = -i\omega_0$,

$$a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} = a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t} = C \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Dengan cara yang sama

$$a_3 e^{\lambda_3 t} + a_4 e^{\lambda_4 t} = D \cos(\omega_c t + \beta).$$

Jadi x_A dan x_B bisa dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}x_A &= C \cos(\omega_0 t + \alpha) + D \cos(\omega_c t + \beta), \\x_B &= C \cos(\omega_0 t + \alpha) - D \cos(\omega_c t + \beta).\end{aligned}$$

Empat buah konstanta a_1, a_2, a_3, a_4 (atau C, α, D, β) bergantung pada kondisi awal. Terlihat bahwa x_A dan x_B diberikan oleh beberapa kombinasi getaran dengan dua buah frekuensi normal ω_0 dan ω_c .

Anggap gerak mulai ketika kita menarik A dan B ke arah yang sama sebesar x_0 dan melepaskannya dari keadaan diam. Jarak antara A dan B sama dengan panjang pegas terganteng diam tidak ditarik dan tidak ada gaya pada massa. Jadi A dan B akan beresilasi sefase dengan frekuensi alami yang sama ω_0 seperti jika keduanya tidak terganteng. Secara matematik, kita melihat ini adalah kasus yang kita tinjau. Dengan kondisi awal

$$x_A(0) = x_B(0) = x_0 \quad \text{dan} \quad \left. \frac{dx_A}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dx_B}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

kita bisa dengan mudah membuktikan $C = x_0, D = 0, \alpha = \beta = 0$. Jadi

$$x_A = x_0 \cos \omega_0 t, \quad x_B = x_0 \cos \omega_0 t.$$

Ini adalah sebuah moda normal sistem terganteng. Ketika sistem bergetar dengan frekuensi normal, maka akan terus bergetar dengan frekuensi tersebut.

Anggap mula-mula kita menarik A dan B dalam arah berlawanan sebesar x_m dan melepaskannya. Adanya simetri membuat kita tahu bahwa A dan B adalah bayangan dalam cermin. Keduanya akan bergetar dengan frekuensi tertentu, yang kita harapkan sebagai ω_c , karena ω_c hanyalah frekuensi normal yang lain. Ini adalah kasus yang kita tinjau. Karena dengan kondisi awal

$$x_A(0) = -x_B(0) = x_m, \quad \text{dan} \quad \left. \frac{dx_A}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dx_B}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

kita bisa dengan mudah membuktikan $C = 0, D = x_m, \alpha = \beta = 0$. Jadi

$$x_A = x_m \cos \omega_c t, \quad x_B = -x_m \cos \omega_c t.$$

Keduanya beresilasi dengan frekuensi ω_c tetapi fasenya selalu berbeda 180° . Ini merupakan moda normal kedua dari sistem. Gerak umumnya merupakan kombinasi linier dari kedua moda.

Untuk molekul atau kristal riil, akan terdapat banyak moda normal. Tiap moda normal berkaitan dengan simetri struktur tertentu. Fakta bahwa moda ini bisa dibangkitkan oleh frekuensi normalnya banyak digunakan dalam aplikasi saintifik.

5.9 Metode Lain untuk Persamaan Diferensial

Banyak pembaca mungkin sebelumnya telah mengambil kuliah persamaan diferensial biasa. Di sini kita hanya memberikan tinjauan ulang sehingga pembaca yang sebelumnya tidak memiliki gambaran bisa memperoleh latar belakang yang cukup untuk melanjutkan. Literatur teori dan aplikasi dari persamaan diferensial sangat luas. Pembahasan kita jauh dari lengkap.

Di antara metode yang belum kita bahas adalah transformasi Laplace, analisis Fourier dan solusi deret pangkat. Transformasi Laplace ini sangat berguna dalam memecahkan persoalan dengan suku tak homogen yang bersifat diskontinu atau impulsif. Dalam bab berikutnya kita akan mempelajari masalah ini secara rinci.

Jika suku tak homogen periodik tetapi tidak sinusoidal, metode deret Fourier sangat nyaman digunakan. Kita akan membahas metode ini setelah kita mempelajari deret Fourier.

Secara umum, persamaan diferensial dengan koefisien variabel tidak bisa diselesaikan dengan metode bab ini. Prosedur biasa untuk persamaan seperti ini adalah untuk memperoleh solusi dalam bentuk deret tak hingga. Ini dikenal sebagai metode deret. Beberapa persamaan yang paling penting dalam fisika dan teknik membawa kita ke persamaan jenis ini. Deret yang diperoleh bisa diambil sebagai definisi fungsi-fungsi baru. Beberapa yang penting diberikan nama dan ditabulasikan. Kita akan mempelajari metode ini dalam bab fungsi khusus.

Selain itu, persamaan diferensial bisa diselesaikan secara numerik. Kadang-kadang ini adalah satu-satunya cara untuk memecahkan persamaan. Komputer digital telah menyediakan solusi numerik. Ada beberapa program komputer untuk integrasi persamaan diferensial biasa dalam “Numerical Recipes” oleh William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky and William T. Vetterling (Cambridge University Press, 1986). Untuk pembahasan metode numerik, lihat R. J. Rice “Numerical Methods, Software and Analysis.”

5.10 Latihan

1. Carilah solusi umum persamaan diferensial separabel berikut ini:

(a) $xy' + y + 3 = 0$,

(b) $2yy' + 4x = 0$.

Jawab: (a) $x(y + 3) = c$, (b) $2x^2 + y^2 = c$.

2. Carilah solusi spesifik persamaan diferensial separabel berikut ini:

$$(a) \frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}, y(0) = 1,$$

$$(b) ye^{x+y}dy = dx, y(0) = 0.$$

Jawab: (a) $1 + y^2 = 2(1 + x^2)$, (b) $(1 - y)e^y = e^{-x}$.

3. Rubahlah persamaan berikut ke dalam bentuk separabel dan carilah solusinya

$$(a) xyy' = y^2 - x^2,$$

$$(b) \frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{y - x}.$$

Jawab: (a) $\ln x + \frac{y^2}{2x^2} = c$, (b) $y^2 + 2xy - x^2 = c$.

4. Buktikan bahwa persamaan diferensial berikut eksak dan carilah solusinya:

$$(a) (2xy - \cos x)dx + (x^2 - 1)dy = 0,$$

$$(b) (2x + e^y)dx + xe^ydy = 0.$$

Jawab: (a) $x^2y - \sin x - y = c$, (b) $x^2 + xe^y = c$.

5. Carilah solusi persamaan diferensial berikut, pertama dengan mencari faktor integrasi:

$$(a) 2(y^2 - 2)dx + 3xy^2dy = 0,$$

$$(b) (y + x^4)dx - xdy = 0.$$

Jawab: (a) $\mu = x$, $x^2y^3 - 2x^2 = c$, (b) $\mu = 1/x^2$, $x^3/3 - y/x = c$.

6. Carilah solusi spesifik persamaan diferensial linier orde satu berikut:

$$(a) y' + y = x,$$

$$(b) xy' + (1 + x)y = e^{-x}.$$

Jawab: (a) $y = x - 1 + ce^{-x}$, (b) $y = e^{-x} + ce^{-x}/x$.

7. Carilah solusi spesifik persamaan diferensial linier orde satu berikut:

$$(a) y' - y = 1 - x, y(0) = 1,$$

$$(b) y' + \frac{1}{x}y = 3x^2, y(1) = 5.$$

Jawab: (a) $y = x + e^x$, (b) $y = \frac{3}{4}x^3 + \frac{17}{4}x^{-1}$.

8. Rangkaian RL dinyatakan oleh persamaan

$$L \frac{di}{dt} + Ri = A \cos t, \quad i(0) = 0,$$

dengan i adalah arus. Carilah arus i sebagai fungsi waktu t .

$$\text{Jawab: } i(t) = \frac{AR}{R^2 + L^2} \left[\cos t + \frac{L}{R} \sin t - e^{-Rt/L} \right].$$

9. Carilah solusi umum persamaan diferensial tak homogen berikut ini:

$$(a) \quad y'' - ky = 0,$$

$$(b) \quad y'' - (a+b)y' + aby = 0,$$

$$(c) \quad y'' + 2ky' + k^2y = 0.$$

Jawab: (a) $y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$, (b) $y(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$, (c) $y(x) = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{-kx}$.

10. Carilah solusi spesifik persamaan diferensial tak homogen orde dua berikut:

$$(a) \quad y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1,$$

$$(b) \quad y'' + 4y = \sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0,$$

$$(c) \quad y''' + y' = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Jawab: (a) $y(x) = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx$, (b) $y(x) = \frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{6} \sin 2x$, (c) $\frac{1}{10} e^{2x} - \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{2}$.

11. Carilah solusi persamaan diferensial tak homogen berikut:

$$(a) \quad y'' + k^2y = a,$$

$$(b) \quad y'' - 4y = x,$$

$$(c) \quad y'' - 2y' + y = 3x^2 - 12x + 7.$$

Jawab: (a) $y(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx + a/k^2$, (b) $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x$, (c) $y(x) = (c_1 + c_2x)e^x + 3x^2 + 1$.

12. Carilah solusi persamaan diferensial tak homogen berikut:

$$(a) \quad y'' - 3y' + 2y = e^{2x},$$

$$(b) \quad y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x},$$

$$(c) \quad y'' + 9y = \cos(3x).$$

Jawab: (a) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x e^{2x}$, (b) $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + 2x_2 e^{3x}$, (c) $y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) + \frac{1}{6}x \sin(3x)$.

13. Carilah solusi spesifik persamaan diferensial tak homogen berikut:

$$(a) y'' + y' = x^2 + 2x, y(0) = 4, y'(0) = -2.$$

$$(b) y'' - 4y' + 4y = 6 \sin x - 8 \cos x, y(0) = 3, y'(0) = 4.$$

$$(c) y'' - 4y = 8e^{2x}, y(0) = 4, y'(0) = 6.$$

Jawab: (a) $\frac{1}{3}x^3 + 2e^{-x} + 2$, (b) $y = (34x)e^{2x} + 2 \sin x$, (c) $y = 3e^{2x} + e^{-2x} + 2xe^{2x}$.

14. Selesaikan persamaan diferensial berikut dengan metode variasi parameter

$$(a) y'' + y = \sec x.$$

$$(b) y'' + 4y' + y = \frac{e^{-2x}}{x^2}.$$

Jawab: (a) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln |\cos x| + x \sin x$,

(b) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} e^{-2x} \ln x$.

15. Selesaikan himpunan persamaan diferensial berikut:

$$y'(x) - z'(x) - 2y(x) + 2z(x) = 1 - 2x,$$

$$y''(x) + 2z'(x) + y(x) = 0,$$

$$y(0) = z(0) = y'(0) = 0.$$

Jawab: $y(x) = -2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2$; $z(x) = -2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2 - x$.

16. Selesaikan himpunan persamaan diferensial berikut:

$$y'(x) + z'(x) + y(x) + z(x) = 1,$$

$$y'(x) - y(x) - 2z(x) = 0,$$

$$y(0) = 1, z(0) = 0.$$

Jawab: $y(x) = 2 - e^{-x}$ $z(x) = e^{-x} - 1$.

17. Dalam mengukur kekuatan material, kita akan menemui persamaan

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -4a^4 y$$

dengan a konstanta positif. Carilah solusi umum persamaan ini ($y(x)$ dengan empat konstanta).

$y(x) = e^{ax}(c_1 \cos ax + c_2 \sin ax) + e^{-ax}(c_3 \cos ax + c_4 \sin ax)$.

18. Selesaikan

$$y''(t) + y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t^2}{\pi^2}, & \text{jika } 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & \text{jika } t > \pi \end{cases},$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Ini bisa diartikan sebagai sistem tak teredam dengan gaya yang bekerja pada selang waktu tertentu, sebagai contoh, gaya yang bekerja pada pistol ketika ditembakkan. Petunjuk: pada $t = \pi$ baik y maupun y' keduanya kontinu.

$$\text{Jawab: } y(t) = \begin{cases} -\left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) \cos t + \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) - \frac{1}{\pi^2} t^2, & \text{jika } 0 \leq t \leq \pi, \\ \left[1 - 2\left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right)\right] \cos t + \frac{2}{\pi^2} \sin t, & \text{jika } t > \pi. \end{cases}$$

19. Jika $N_a(t)$, $N_b(t)$, $N_c(t)$ merepresentasikan jumlah inti dari tiga buah bahan radioaktif yang meluruh menurut skema

$$a \rightarrow b \rightarrow c$$

dengan konstanta peluruhan λ_a dan λ_b , dan bahan c dianggap stabil. Maka fungsi diketahui memenuhi sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \frac{dN_a}{dt} &= -\lambda_a N_a, \\ \frac{dN_b}{dt} &= -\lambda_b N_b + \lambda_a N_a, \\ \frac{dN_c}{dt} &= \lambda_b N_b. \end{aligned}$$

Asumsikan bahwa $N_a(0) = N_0$ dan $N_b(0) = N_c(0) = 0$, carilah $N_a(t)$, $N_b(t)$ dan $N_c(t)$ sebagai fungsi waktu t .

$$\begin{aligned} \text{Jawab: } N_a &= N_0 e^{-\lambda_a t}; \quad N_b = N_0 \left[\frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} e^{-\lambda_a t} - \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} e^{-\lambda_b t} \right]; \\ N_c &= N_0 \left[1 - \frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} e^{-\lambda_a t} + \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} e^{-\lambda_b t} \right]. \end{aligned}$$

20. Buktikan solusi khusus dari

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$$

bisa dituliskan dalam bentuk

$$x_p(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

dengan

$$C_1 = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}, \quad C_2 = \frac{(c\omega)F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}.$$

21. Tunjukkan solusi pada soal sebelumnya bisa dituliskan dalam bentuk

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \phi)$$

dengan

$$A = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

22. Untuk dua buah osilator identik tak teredam, A dan B, masing-masing bermassa m , dan frekuensi alami ω_0 , buktikan bahwa masing-masing dibangkitkan oleh persamaan diferensial

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = 0.$$

Keduanya terdangeng dengan gaya kopling pada A adalah $\alpha m(d^2 x_B/dt^2)$, dan kopling pada B adalah $\alpha m(d^2 x_A/dt^2)$ dengan α adalah konstanta kopling yang besarnya kurang dari satu. Carilah frekuensi normal sistem.

Jawab: $\omega = \omega_0(1 \pm \alpha)^{-1/2}$.

6

Transformasi Laplace

Transformasi Laplace sangatlah berguna untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Idanya adalah menggunakan sebuah integral untuk mentransformasikan persamaan diferensial menjadi sebuah persamaan aljabar, kemudian dari solusi persamaan aljabar ini kita memperoleh fungsi yang kita inginkan melalui transformasi invers. Transformasi Laplace dinamakan demikian karena ditemukan oleh matematikawan Perancis Pierre Simon Laplace (1749 – 1827), yang juga dikenal untuk persamaan Laplace yang merupakan salah satu persamaan paling penting dalam fisika matematik.

Laplace pertama kali mempelajari metode ini pada 1782. Tetapi, kegunaan metode ini tidak disadari sampai 100 tahun kemudian. Teknik dalam bab ini mengadopsi teknik Oliver Heaviside (1850 – 1925), seorang insinyur listrik Inggris yang inovatif, yang juga memberikan kontribusi signifikan dalam teori elektromagnetik.

Transformasi Laplace secara khusus berguna untuk menyelesaikan permasalahan dengan suku tak homogen dari sifat alami yang diskontinu atau impulsif. Persoalan ini biasa kita temui dalam ilmu fisika tetapi cukup sulit diselesaikan dengan metode persamaan diferensial biasa.

Dalam bab ini sifat-sifat tertentu dari transformasi Laplace dipelajari dan rumus-rumus yang relevan ditabulasikan sehingga solusi dari persoalan kondisi awal (*initial value problems*) yang melibatkan persamaan diferensial linier dapat dengan mudah diperoleh.

6.1 Definisi dan Sifat-sifat Transformasi Laplace

6.1.1 Transformasi Laplace - Sebuah Operator Linier

Transformasi Laplace sebuah fungsi $\mathcal{L}[f]$ sebuah fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s), \quad (6.1)$$

kita mengasumsikan bahwa integral ini berhingga. Salah satu alasan transformasi Laplace berguna adalah s dapat dipilih cukup besar sehingga (6.1) konvergen meskipun jika $f(t)$ tidak mendekati nol ketika $t \rightarrow \infty$. Tentu, terdapat fungsi-fungsi yang divergen lebih cepat dibandingkan e^{st} . Untuk fungsi-fungsi tersebut, transformasi Laplace tidak ada. Untungnya fungsi-fungsi tersebut jarang dijumpai dalam fisika.

Perhatikan juga bahwa transformasinya adalah sebuah fungsi dari s . Transformasi fungsi yang kita kerjakan bukan hanya ada, tetapi juga bernilai nol ($F(s) \rightarrow 0$) ketika $s \rightarrow \infty$.

Dari definisi, transformasi Laplace adalah operator linier yakni

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[af(t) + bg(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} [af(t) + bg(t)] dt \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + b \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= a\mathfrak{L}[f] + b\mathfrak{L}[g].\end{aligned}\tag{6.2}$$

Untuk sebuah fungsi sederhana transformasi Laplace dapat dengan mudah dilakukan. Sebagai contoh

$$\mathfrak{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}.\tag{6.3}$$

Kita juga bisa dengan mudah menghitung transformasi sebuah fungsi eksponensial

$$\mathfrak{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^{\infty}.$$

Sepanjang $s > a$, batas atas hilang dan batas bawah memberikan $1/(s-a)$. Sehingga

$$\mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}.\tag{6.4}$$

Dengan cara yang sama

$$\mathfrak{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a}.\tag{6.5}$$

Dengan hubungan ini, transformasi Laplace fungsi hiperbolik berikut

$$\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at}), \quad \sinh at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$$

dapat dengan mudah diperoleh. Karena transformasi Laplace linier

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[\cosh at] &= \frac{1}{2} \{ \mathfrak{L}[e^{at}] + \mathfrak{L}[e^{-at}] \} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Dengan cara serupa

$$\mathfrak{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2}. \quad (6.7)$$

Sekarang parameter a tidak harus berupa bilangan riil. Jika a berupa bilangan imajiner $a = i\omega$, kita akan mempunyai

$$\mathfrak{L}[e^{i\omega t}] = \frac{1}{s - i\omega}.$$

Karena

$$\frac{1}{s - i\omega} = \frac{1}{s - i\omega} \times \frac{s + i\omega}{s + i\omega} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

dan

$$\mathfrak{L}[e^{i\omega t}] = \mathfrak{L}[\cos \omega t + i \sin \omega t] = \mathfrak{L}[\cos \omega t] + i \mathfrak{L}[\sin \omega t],$$

dengan menyamakan suku riil dengan suku riil dan suku imajiner dengan suku imajiner kita memiliki

$$\mathfrak{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (6.8)$$

$$\mathfrak{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (6.9)$$

Definisi dari $\mathfrak{L}[\cos \omega t]$ jelas tetap

$$\mathfrak{L}[\cos \omega t] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt. \quad (6.10)$$

Dengan menggunakan integral parsial, kita dapat langsung menghitungnya

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos \omega t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} \omega \sin \omega t \, dt \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t \, dt \\ \int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t \, dt &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin \omega t \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-st} \omega \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt. \end{aligned}$$

Kombinasikan kedua persamaan ini

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt.$$

Pindahkan suku terakhir ke ruas kiri

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right) \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt = \frac{1}{s},$$

atau

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

yang sama dengan (6.8) seperti seharusnya.

Secara prinsip, transformasi Laplace dapat diperoleh secara langsung dengan menghitung integral. Tetapi, sangat sering diperoleh dengan lebih sederhana dengan menggunakan sifat-sifat transformasi Laplace dibandingkan integral langsung, seperti pada contoh terakhir.

Transformasi Laplace memiliki banyak sifat menarik, yang menjadi alasan transformasi Laplace merupakan alat yang sangat berguna dalam analisis matematik. Sekarang kita akan membicarakan beberapa diantaranya dan akan menggunakannya untuk membangkitkan lebih banyak transformasi seperti ilustrasi.

6.1.2 Transformasi Laplace untuk Turunan

Transformasi Laplace untuk sebuah turunan adalah dengan definisi

$$\mathfrak{L}[f'] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} df(t).$$

Jika kita misalkan $u = e^{-st}$ dan $dv = df(t)$, maka $du = -s e^{-st} dt$ dan $v = f$. Dengan integral parsial, kita memiliki $u dv = d(uv) - v du$ sehingga

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[f'] &= \int_0^{\infty} \{d[e^{-st} f(t)] + f(t)s e^{-st} dt\} \\ &= [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -f(0) + s\mathfrak{L}[f]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Jelaslah

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[f''] &= \mathfrak{L}[(f')'] = -f'(0) + s\mathfrak{L}[f'] \\ &= -f'(0) + s(-f(0) + s\mathfrak{L}[f]) = -f'(0) - sf(0) + s^2\mathfrak{L}[f]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Secara alami hasil ini dapat diperluas untuk orde yang lebih tinggi

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}] = -f^{(n-1)}(0) - \dots - s^{n-1}f(0) + s^n\mathfrak{L}[f]. \quad (6.13)$$

Sifat ini sangat krusial dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Di sini kita akan menggunakannya untuk memperoleh $\mathfrak{L}[t^n]$.

Pertama, misalkan $f(t) = t$, maka $f' = 1$ dan $f(0) = 0$. Dengan (6.11)

$$\mathfrak{L}[1] = -0 + s\mathfrak{L}[t],$$

jika kita tata ulang dan menggunakan (6.3), kita memiliki

$$\mathfrak{L}[t] = \frac{1}{s}\mathfrak{L}[1] = \frac{1}{s^2}. \quad (6.14)$$

Jika kita misalkan $f(t) = t^2$, maka $f' = 2t$ dan $f(0) = 0$. Kembali dengan (6.11)

$$\mathcal{L}[2t] = -0 + s\mathcal{L}[t^2].$$

Maka dengan (6.14)

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[2t] = \frac{2}{s}\mathcal{L}[t] = \frac{2}{s^3}. \quad (6.15)$$

Proses ini dapat kita ulang sehingga didapatkan

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (6.16)$$

6.1.3 Substitusi: Pergeseran s

Jika kita mengetahui transformasi Laplace $F(s)$ dari sebuah fungsi $f(t)$, kita bisa memperoleh transformasi dari $e^{at}f(t)$ yaitu menggantikan s dengan $s - a$ pada $F(s)$. Hal ini dapat dengan mudah dibuktikan. Dengan definisi

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}[f(t)],$$

jelaslah

$$F(s - a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \mathcal{L}[e^{at} f(t)]. \quad (6.17)$$

Hubungan sederhana ini sering dikenal sebagai teorema pergeseran s (pergeseran pertama).

Dengan bantuan teorema pergeseran s , kita dapat menurunkan transformasi lebih banyak fungsi tanpa menghitung integralnya. Sebagai contoh, dari (6.16) dan (6.17) yaitu

$$\mathcal{L}[e^{-at} t^n] = \frac{n!}{(s + a)^{n+1}}. \quad (6.18)$$

Dapat juga dengan mudah ditunjukkan bahwa

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} \cos \omega t dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} \cos \omega t dt. \quad (6.19)$$

Jika kita bandingkan (6.10) dengan (6.19) perbedaannya terletak pada s yang digantikan dengan $s + a$. Sehingga integral terakhir haruslah sama dengan ruas kanan dari (6.8) dengan s digantikan $s + a$ yaitu

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}. \quad (6.20)$$

Dengan cara yang sama

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}. \quad (6.21)$$

6.1.4 Turunan sebuah Transformasi

Jika kita turunkan transformasi Laplace $F(s)$ terhadap s , kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\mathfrak{L}[f(t)] = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{de^{-st}}{ds} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt = \mathfrak{L}[-tf(t)]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Jika kita teruskan proses ini, kita memiliki

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathfrak{L}[f(t)] = \mathfrak{L}[(-t)^n f(t)]. \quad (6.23)$$

Lebih banyak rumus dapat diturunkan dengan menggunakan hubungan ini. Sebagai contoh, jika kita turunkan kedua ruas (6.9) terhadap s , kita peroleh

$$\frac{d}{ds}\mathfrak{L}[\sin \omega t] = \frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Karena

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mathfrak{L}[\sin \omega t] &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t dt = - \int_0^{\infty} t e^{-st} \sin \omega t dt = -\mathfrak{L}[t \sin \omega t] \\ &= - \frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = - \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathfrak{L}[t \sin \omega t] = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2}. \quad (6.24)$$

Dengan cara yang sama

$$\mathfrak{L}[t \cos \omega t] = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}. \quad (6.25)$$

6.1.5 Tabel Transformasi Laplace

Karena transformasi Laplace adalah operator linier, dua buah transformasi dapat dikombinasikan untuk membentuk yang baru. Misalnya

$$\mathfrak{L}[1 - \cos \omega t] = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} \quad (6.26)$$

$$\mathfrak{L}[\omega t - \sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)} \quad (6.27)$$

$$\mathfrak{L}[\sin \omega t - \omega t \cos \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{\omega(s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (6.28)$$

$$\mathfrak{L}[\sin \omega t + \omega t \cos \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{\omega(s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (6.29)$$

$$\mathfrak{L}[\cos at - \cos bt] = \frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{s}{s^2 + b^2} = \frac{(b^2 - a^2)s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}. \quad (6.30)$$

Tabel 6.1: Tabel ringkas transformasi Laplace, dalam tiap kasus s dianggap cukup besar sehingga transformasinya ada.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$	$\delta(t)$	1
t	$\frac{1}{s^2}$	$\delta(t - c)$	e^{-sc}
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\delta'(t - c)$	$s e^{-sc}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$u(t - c)$	$\frac{1}{s} e^{-sc}$
$t e^{at}$	$\frac{1}{(s - a)^2}$	$(t - c)^n u(t - c)$	$\frac{n!}{s^{n+1}} e^{-sc}$
$t^n e^{at}$	$\frac{1}{(s - a)^{n+1}}$	$(t - c)^n e^{a(t-c)} u(t - c)$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}} e^{-sc}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega(t - c) u(t - c)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} e^{-sc}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cosh a(t - c) u(t - c)$	$\frac{s}{s^2 - a^2} e^{-sc}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\sin \omega t$ periode $\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \coth \frac{s\pi}{2\omega}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	t periode p	$\frac{1 - (1 + ps)e^{-ps}}{ps^2(1 - e^{-ps})}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at})$	$\ln \frac{s - a}{s - b}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cosh at)$	$\ln \frac{s^2 - a^2}{s^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{2}{t}(1 - \cos \omega t)$	$\ln \frac{s^2 - \omega^2}{s^2}$
$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\frac{\sin \omega t}{t}$	$\tan^{-1} \frac{\omega}{s}$
$\omega t - \sin \omega t$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	t^a ($a > -1$)	$\frac{\Gamma(a + 1)}{s^{a+1}}$
$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
$\sin \omega t + \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$t^{1/2}$	$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}$
$\cos at - \cos bt$	$\frac{(b^2 - a^2)s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$	$J_0(at)$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^{1/2}}$

Terdapat tabel transformasi Laplace yang lengkap (sebagai contoh, F. Oberherdttinger and E. Badii, *Tables of Laplace Transforms*, Springer, New York, 1973). Tabel sederhananya diberikan pada Tabel 6.1. Transformasi yang ada di sebelah kiri sudah kita buktikan, sedangkan yang ada di sebelah kanan akan kita buktikan.

6.2 Solusi Persamaan Diferensial dengan Transformasi Laplace

6.2.1 Invers Transformasi Laplace

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial dengan transformasi Laplace, kita menemui masalah invers dari menentukan fungsi $f(t)$ yang tidak diketahui yang memiliki transformasi $F(s)$. Notasi $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ biasanya digunakan untuk invers transformasi Laplace. Yaitu, jika

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (6.31)$$

maka

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]. \quad (6.32)$$

Karena

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]] = I[f(t)]$$

mengikuti hal ini, $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}$ adalah operator identitas I . Transformasi invers sangatlah penting dalam prakteknya dan terdapat berbagai cara untuk memperolehnya. Dalam sub bab ini, pertama kita akan mempelajari transformasi dalam bentuk pembagian dua buah polinomial

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$$

dengan $p(s)$ dan $q(s)$ memiliki koefisien riil. Karena

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \rightarrow 0$$

jelaslah bahwa derajat $p(s)$ lebih rendah dibandingkan $q(s)$. Terdapat beberapa metode untuk memperoleh invers transformasi tersebut. Agar jelas, kita akan mempelajarinya terpisah.

Inspeksi

Jika ekspresinya sederhana, kita dapat memperoleh invers langsung dari tabel. Hal ini bisa kita lihat dalam contoh berikut

Contoh 6.2.1. Carilah (a) $\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^4} \right]$; (b) $\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s+4)^3} \right]$; (c) $\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+4} \right]$.

Solusi 6.2.1.

(a) Karena

$$\mathfrak{L}[t^3] = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}, \quad t^3 = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{6}{s^4} \right],$$

kita memiliki

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^4} \right] = \frac{1}{6} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{6}{s^4} \right] = \frac{1}{6} t^3.$$

(b) Karena

$$\mathfrak{L}[e^{-4t}t^2] = \frac{2}{(s+4)^3}, \quad e^{-4t}t^2 = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s+4)^3} \right],$$

sehingga

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{4}{(s+4)^3} \right] = 2 \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s+4)^3} \right] = 2e^{-4t}t^2.$$

(c) Karena

$$\mathfrak{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2+4}, \quad \sin 2t = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^2+4} \right],$$

sehingga

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+4} \right] = \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^2+4} \right] = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Contoh 6.2.2. Carilah (a) $\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+2s+5} \right]$; (b) $\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2s+1}{s^2+2s+5} \right]$.

Solusi 6.2.2. (a) Pertama kita perhatikan bahwa

$$\frac{1}{s^2+2s+5} = \frac{1}{(s+1)^2+4} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{(s+1)^2+4}.$$

Karena

$$\mathfrak{L}[e^{-t} \sin 2t] = \frac{2}{(s+1)^2+4}, \quad e^{-t} \sin 2t = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s+1)^2+4} \right],$$

sehingga

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+2s+5} \right] = \frac{1}{2} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s+1)^2+4} \right] = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t.$$

(b) Ingat

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[e^{-t} \sin 2t] &= \frac{2}{(s+1)^2+4}, \\ \mathfrak{L}[e^{-t} \cos 2t] &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4}, \end{aligned}$$

sehingga kita dapat menuliskan

$$\frac{2s+1}{s^2+2s+5} = \frac{2(s+1)-1}{(s+1)^2+4} = 2 \frac{(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2+4}.$$

Maka

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s+1}{s^2+2s+5} \right] &= 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+4} \right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s+1)^2+4} \right] \\ &= 2\mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[e^{-t} \cos 2t]] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[e^{-t} \sin 2t]] \\ &= 2e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t. \end{aligned}$$

Dekomposisi Pecahan Parsial

Ambil pecahan parsial $F(s)$ dan kemudian ambil invers masing-masing. Sangat mungkin pembaca sudah biasa dengan pecahan parsial. Kita akan menggunakan contoh berikut untuk mengingat ulang.

Contoh 6.2.3. Carilah $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s-1}{s^2-s-2} \right]$.

Solusi 6.2.3. Pertama kita perhatikan

$$\begin{aligned} \frac{s-1}{s^2-s-2} &= \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \\ &= \frac{a}{(s-2)} + \frac{b}{(s+1)} = \frac{a(s+1)+b(s-2)}{(s-2)(s+1)}. \end{aligned}$$

Berikut ini tiga buah cara berbeda untuk menentukan a dan b

- Pertama perhatikan bahwa

$$s-1 = a(s+1) + b(s-2)$$

harus berlaku untuk semua s . Ambil $s=2$ maka $a=1/3$, dengan cara yang sama ambil $s=-1$ maka $b=2/3$.

- Cara lain adalah dengan mengumpulkan suku yang pangkat s -nya sama dan mensyaratkan koefisien suku yang berkaitan pada kedua ruas persamaan sama. Yaitu

$$s-1 = (a+b)s + (a-2b).$$

Hal ini berarti $a+b=1$ dan $a-b=-1$. Sehingga $a=1/3$ dan $b=2/3$.

- Cara lain adalah dengan memperhatikan

$$\lim_{s \rightarrow 2} \left\{ (s-2) \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \right\} = \lim_{s \rightarrow 2} \left\{ (s-2) \left[\frac{a}{(s-2)} + \frac{b}{(s+1)} \right] \right\},$$

hal ini berarti

$$\lim_{s \rightarrow 2} \left\{ \frac{s-1}{(s+1)} \right\} = \lim_{s \rightarrow 2} \left\{ a + (s-2) \frac{b}{(s+1)} \right\} = a.$$

Kita bisa melihat bahwa $a = 1/3$. Dengan cara yang sama

$$\lim_{s \rightarrow -1} \left\{ (s+1) \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \right\} = \lim_{s \rightarrow -1} \left\{ (s+1) \left[\frac{a}{(s-2)} + b \right] \right\} = b$$

memberikan $b = 2/3$.

Dalam berbagai soal, salah satu cara lebih sederhana, tetapi untuk soal ini

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s-1}{s^2-s-2} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{(s-2)} + \frac{2}{3} \frac{1}{(s+1)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[e^{2t}]] + \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1} [\mathcal{L}[e^{-t}]] = \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}. \end{aligned}$$

Contoh 6.2.4. Carilah $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2+4)} \right]$.

Solusi 6.2.4. Terdapat dua cara untuk mengambil pecahan parsial

- Jika kita gunakan akar kompleks

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s-2i} + \frac{c}{s+2i}.$$

Kalikan dengan s dan ambil limit untuk $s \rightarrow 0$, kita memiliki

$$a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{4}.$$

Kalikan dengan $s-2i$ dan ambil limit $s \rightarrow 2i$, kita memiliki

$$b = \lim_{s \rightarrow 2i} \frac{1}{s(s+2i)} = -\frac{1}{8}.$$

Kalikan dengan $s+2i$ dan ambil limit $s \rightarrow -2i$, kita memiliki

$$c = \lim_{s \rightarrow -2i} \frac{1}{s(s-2i)} = -\frac{1}{8}.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2+4)} \right] &= \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-2i} \right] - \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2i} \right] \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} e^{2it} - \frac{1}{8} e^{-2it} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t. \end{aligned}$$

- Cara lain untuk mengambil pecahan parsial adalah dengan memperhatikan

$$\frac{b}{s-2i} + \frac{c}{s+2i} = \frac{b(s+2i) + c(s-2i)}{(s-2i)(s+2i)} = \frac{(b+c)s + 2i(b-c)}{s^2+4}.$$

Jika kita misalkan $b+c = b'$ dan $2i(b-c) = c'$, maka

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{a}{s} + \frac{b's + c'}{s^2+4}.$$

Hal penting yang harus kita perhatikan adalah jika penyebutnya merupakan orde dua dari s , pembilangnya harus bisa berupa orde pertama dari s . Dengan kata lain, kita tidak mungkin memperoleh jawaban yang benar jika suku b' hilang. Dengan pemahaman ini, pecahan parsialnya dapat diambil langsung sebagai

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s^2+4)} &= \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+4} = \frac{a(s^2+4) + (bs+c)}{s(s^2+4)} \\ &= \frac{as^2 + 4a + bs^2 + cs}{s(s^2+4)} = \frac{(a+b)s^2 + cs + 4a}{s(s^2+4)}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$1 = (a+b)s^2 + cs + 4a.$$

Koefisien s haruslah sama suku per suku. Hal ini berarti $a+b = 0$, $c = 0$, $4a = 1$.

Hal ini memberikan $a = 1/4$, $b = -1/4$, $c = 0$. Sehingga

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2+4)} \right] = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2+4} \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t.$$

Contoh 6.2.5. Carilah $\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^3(s-1)} \right]$.

Solusi 6.2.5.

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^3(s-1)} &= \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s^3} + \frac{d}{s-1} \\ &= \frac{as^2(s-1) + bs(s-1) + c(s-1) + ds^3}{s^3(s-1)} \\ &= \frac{(a+d)s^3 + (b-a)s^2 + (c-b)s - c}{s^3(s-1)}. \end{aligned}$$

Hal ini mengharuskan $a+d = 0$, $b-a = 0$, $c-b = 0$, $-c = 1$. Sehingga $c = -1$, $b = -1$, $a = -1$, $d = 1$. Maka

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^3(s-1)} \right] &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s-1} \right] \\ &= -1 - t - \frac{1}{2}t^2 + e^t. \end{aligned}$$

Contoh 6.2.6. Carilah $\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} \right]$.

Solusi 6.2.6.

$$\begin{aligned} \frac{2\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} &= \frac{2\omega}{[(s - i\omega)(s + i\omega)]^2} \\ &= \frac{a}{(s - i\omega)} + \frac{b}{(s - i\omega)^2} + \frac{c}{(s + i\omega)} + \frac{d}{(s + i\omega)^2}. \end{aligned}$$

Kalikan kedua ruas dengan $(s - i\omega)^2$ dan dengan mengambil limit $s \rightarrow i\omega$, kita mempunyai

$$\lim_{s \rightarrow i\omega} \left\{ \frac{2\omega}{(s + i\omega)^2} \right\} = \lim_{s \rightarrow i\omega} \left\{ (s - i\omega)a + b + \frac{(s - i\omega)^2 c}{(s + i\omega)} + \frac{(s - i\omega)^2 d}{(s + i\omega)^2} \right\}.$$

Jelaslah

$$b = \frac{2\omega}{(2i\omega)^2} = -\frac{1}{2\omega}.$$

Jika setelah mengalikan kedua ruas dengan $(s - i\omega)^2$, kita turunkan lebih dulu lalu ambil limit $s \rightarrow i\omega$, kita mempunyai

$$\lim_{s \rightarrow i\omega} \left\{ \frac{d}{ds} \frac{2\omega}{(s + i\omega)^2} \right\} = \lim_{s \rightarrow i\omega} \left\{ a + \frac{d}{ds} \left[\frac{(s - i\omega)^2 c}{(s + i\omega)} + \frac{(s - i\omega)^2 d}{(s + i\omega)^2} \right] \right\}.$$

Kita mempunyai

$$a = \lim_{s \rightarrow i\omega} \left\{ \frac{-4\omega}{(s + i\omega)^3} \right\} = \frac{1}{2\omega^2 i}.$$

Dengan cara yang sama kita dapat menunjukkan

$$d = -\frac{1}{2\omega}, \quad c = -\frac{1}{2\omega^2 i}.$$

Sehingga kita memiliki

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] &= \\ \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{2\omega^2 i} \frac{1}{(s - i\omega)} - \frac{1}{2\omega} \frac{1}{(s - i\omega)^2} - \frac{1}{2\omega^2 i} \frac{1}{(s + i\omega)} - \frac{1}{2\omega} \frac{1}{(s + i\omega)^2} \right] &= \\ \frac{1}{2\omega^2 i} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s - i\omega)} - \frac{1}{(s + i\omega)} \right] - \frac{1}{2\omega} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s - i\omega)^2} - \frac{1}{(s + i\omega)^2} \right] &= \\ \frac{1}{2\omega^2 i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) - \frac{1}{2\omega} (t e^{i\omega t} + t e^{-i\omega t}) &= \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t - \frac{1}{\omega} t \cos \omega t. \end{aligned}$$

Ekspansi Heaviside

Ekspansi Heaviside secara esensial merupakan cara sistematis untuk mengambil pecahan parsial. Dalam pecahan parsial dekomposisi $p(s)/q(s)$, faktor tak berulang $(s - a)$ dari $q(s)$ memberikan sebuah pecahan dalam bentuk $A/(s - a)$. Sehingga $F(s)$ dapat dituliskan sebagai

$$F(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A}{s - a} + G(s) \quad (6.33)$$

dengan $G(s)$ adalah ekspresi sisanya. Perkalian dengan $(s - a)$ memberikan

$$\frac{(s - a)p(s)}{q(s)} = A + (s - a)G(s).$$

Jika kita membiarkan s mendekati a , suku kedua di ruas kanan hilang, karena $G(s)$ tidak memiliki faktor yang dapat menghilangkan $(s - a)$. Sehingga

$$A = \lim_{s \rightarrow a} \frac{(s - a)p(s)}{q(s)}. \quad (6.34)$$

Karena $q(a) = 0$, karena a merupakan akar tak berulang dari $q(s) = 0$, limit pada (6.34) merupakan bentuk tak hingga $0/0$. Dengan aturan L' Hospital, kita memiliki

$$A = \lim_{s \rightarrow a} \frac{p(s) + (s - a)p'(s)}{q'(s)} = \frac{p(a)}{q'(a)}. \quad (6.35)$$

Sehingga konstanta dalam dekomposisi pecahan parsial dapat dengan mudah ditentukan.

Contoh 6.2.7. Gunakan ekspansi Heaviside untuk mencari $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s - 1}{s^2 - s - 2} \right]$.

Solusi 6.2.7. Akar dari $s^2 - s - 2$ adalah $s = 2$ dan $s = -1$ dan $\frac{d}{ds}(s^2 - s - 2) = 2s - 1$. Sehingga

$$\frac{s - 1}{s^2 - s - 2} = \frac{a}{(s - 2)} + \frac{b}{(s + 1)}$$

$$a = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s - 1}{2s - 1} = \frac{1}{3}, \quad b = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{s - 1}{2s - 1} = \frac{2}{3}.$$

Maka

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s - 1}{s^2 - s - 2} \right] = \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - 2} \right] + \frac{2}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + 1} \right] = \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}.$$

Contoh 6.2.8. Gunakan ekspansi Heaviside untuk mencari $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s+1}{s^2+2s+5} \right]$.

Solusi 6.2.8. Akar dari s^2+2s+5 adalah $s = -1 \pm 2i$ dan $\frac{d}{ds}(s^2+2s+5) = 2s+2$. Sehingga

$$\frac{2s+1}{s^2+2s+5} = \frac{a}{s-(-1+2i)} + \frac{b}{s-(-1-2i)}$$

$$a = \lim_{s \rightarrow -1+2i} \frac{2s+1}{2s+2} = 1 + \frac{i}{4}, \quad b = \lim_{s \rightarrow -1-2i} \frac{2s+1}{2s+2} = 1 - \frac{i}{4}.$$

Maka

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s+1}{s^2+2s+5} \right]$$

$$= \left(1 + \frac{1}{4}i \right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-(-1+2i)} \right] + \left(1 - \frac{1}{4}i \right) \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-(-1-2i)} \right].$$

Ingat kembali

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-c} \right] = e^{ct},$$

kita mempunyai

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-(-1+2i)} \right] = e^{(-1+2i)t} = e^{-t} e^{i2t} = e^{-t} (\cos 2t + i \sin 2t),$$

dan

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-(-1-2i)} \right] = e^{(-1-2i)t} = e^{-t} e^{-i2t} = e^{-t} (\cos 2t - i \sin 2t).$$

Sehingga

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s+1}{s^2+2s+5} \right] = \left(1 + \frac{1}{4}i \right) e^{-t} (\cos 2t + i \sin 2t)$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{4}i \right) e^{-t} (\cos 2t - i \sin 2t)$$

$$= 2e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t.$$

Secara umum, jika $q(s)$ adalah sebuah polinomial dengan akar tak berulang, ekspansi Heaviside adalah cara paling efektif dalam dekomposisi pecahan parsial. Jika $q(s)$ sudah berbentuk perkalian faktor $(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)$, maka metode lain bisa sama atau lebih efektif. Dalam sebarang kasus, jika akar kompleks digunakan, berguna untuk diingat jika fungsi asalnya riil, hasil akhirnya juga harus riil. Jika terdapat suku imajiner dalam hasil akhir, maka pasti ada langkah yang salah.

Jika $q(s)$ memiliki akar berulang, kita dapat menuliskannya sebagai

$$\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(s-a)}.$$

Dengan argumen yang sama kita dapat menuliskan

$$A_k = \frac{1}{(m-k)!} \lim_{s \rightarrow a} \frac{d^{m-k}}{ds^{m-k}} \left[\frac{(s-a)^m p(s)}{q(s)} \right], \quad k = 1, \dots, m. \quad (6.36)$$

Sayangnya, dalam praktek rumus ini tidak selalu lebih sederhana dibandingkan dengan metode pecahan parsial lainnya, seperti pada Contoh 6.2.6. Faktanya, persoalan yang kita jumpai di alam paling baik diselesaikan dengan turunan transformasinya.

Menggunakan Turunan Transformasi

Dalam Contoh 6.2.6, kita menggunakan pecahan parsial untuk mencari $\mathcal{L}^{-1}[1/(s^2 + a^2)^2]$. Cara lebih sederhana untuk menangani persoalan ini adalah dengan menggunakan sifat-sifat turunan. Prosedur ini bisa kita lihat dalam contoh berikut.

Contoh 6.2.9. Carilah (a) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^2} \right]$, (b) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right]$,
 (c) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2} \right]$, (d) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2} \right]$.

Solusi 6.2.9. (a) Dengan mengambil turunan

$$\frac{d}{da} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{2a^2}{(s^2 + a^2)^2},$$

kita dapat menuliskan

$$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{d}{da} \frac{a}{s^2 + a^2} \right).$$

Karena

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2},$$

kita mempunyai

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s^2 + a^2)^2} &= \frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{a} \mathcal{L}[\sin at] - \frac{d}{da} \mathcal{L}[\sin at] \right) \\ &= \frac{1}{2a^3} \mathcal{L}[\sin at] - \frac{1}{2a^2} \frac{d}{da} \int_0^\infty e^{-st} \sin at \, dt \\ &= \frac{1}{2a^3} \mathcal{L}[\sin at] - \frac{1}{2a^2} \int_0^\infty e^{-st} t \cos at \, dt \\ &= \frac{1}{2a^3} \mathcal{L}[\sin at] - \frac{1}{2a^2} \mathcal{L}[t \cos at]. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^2} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2a^3} \mathcal{L}[\sin at] - \frac{1}{2a^2} \mathcal{L}[t \cos at] \right] \\ &= \frac{1}{2a^3} \sin at - \frac{1}{2a^2} t \cos at. \end{aligned}$$

(b) Ambil turunan terhadap s

$$\frac{d}{ds} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{-2as}{(s^2 + a^2)^2},$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} &= -\frac{1}{2a} \frac{d}{ds} \frac{a}{s^2 + a^2} = -\frac{1}{2a} \frac{d}{ds} \mathfrak{L}[\sin at] \\ &= -\frac{1}{2a} \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} \sin at \, dt = \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-st} t \sin at \, dt \\ &= \frac{1}{2a} \mathfrak{L}[t \sin at]. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \right] = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{2a} \mathfrak{L}[t \sin at] \right] = \frac{1}{2a} t \sin at.$$

(c) Mengikuti hasil (b)

$$s \mathfrak{L} \left[\frac{1}{2a} t \sin at \right] = s \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Ingat

$$\mathfrak{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = s \mathfrak{L}[f] - f(0); \quad s \mathfrak{L}[f] = \mathfrak{L} \left[\frac{df}{dt} \right] + f(0).$$

Misalkan $f = \frac{1}{2a} t \sin at$, sehingga $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at$; $f(0) = 0$, kita memiliki

$$s \mathfrak{L} \left[\frac{1}{2a} t \sin at \right] = \mathfrak{L} \left[\frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at \right].$$

Sehingga

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2} \right] = \mathfrak{L}^{-1} \left[s \mathfrak{L} \left[\frac{1}{2a} t \sin at \right] \right] = \frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at.$$

(d) Dari hasil (c)

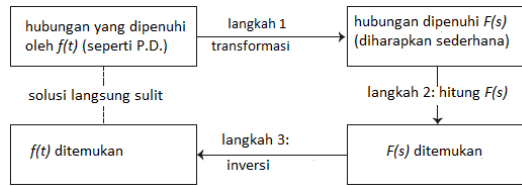
$$\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2} = s \frac{s^2}{(s^2 + a^2)^2} = s \mathfrak{L} \left[\frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at \right].$$

Sekarang, misalkan

$$f = \frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at, \quad \text{sehingga} \quad \frac{df}{dt} = \cos at - \frac{a}{2} t \sin at; \quad f(0) = 0,$$

sehingga

$$\begin{aligned} s \mathfrak{L} \left[\frac{1}{2a} \sin at + \frac{1}{2} t \cos at \right] &= \mathfrak{L} \left[\cos at - \frac{a}{2} t \sin at \right], \\ \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s^3}{(s^2 + a^2)^2} \right] &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\mathfrak{L} \left[\cos at - \frac{a}{2} t \sin at \right] \right] = \cos at - \frac{a}{2} t \sin at. \end{aligned}$$



Gambar 6.1: Langkah menggunakan transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial.

6.2.2 Menyelesaikan Persamaan Diferensial

Ide menggunakan transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial dinyatakan pada Gambar 6.1. Anggap kita memiliki sebuah persamaan diferensial dengan fungsi yang tidak diketahui adalah $f(t)$. Langkah pertama adalah menggunakan transformasi Laplace pada persamaan diferensial ini. Hasilnya adalah hubungan $F(s) = \mathcal{L}[f]$. Secara umum, ini adalah persamaan aljabar. Langkah kedua adalah dengan mencari $F(s)$ dengan menyelesaikan persamaan aljabar ini. Langkah ketiga dan terakhir adalah mencari fungsi yang tidak diketahui $f(t)$ dengan mengambil invers dari transformasi Laplace $F(s)$

Beberapa contoh berikut akan membuat hal ini jelas.

Contoh 6.2.10. Carilah solusi persamaan diferensial

$$y'' + y = \sin 2t,$$

yang memenuhi kondisi awal

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Solusi 6.2.10. Dengan menggunakan transformasi Laplace pada persamaan

$$\mathcal{L}[y'' + y] = \mathcal{L}[\sin 2t],$$

kita memiliki

$$s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Dengan kondisi awal $y(0)$ dan $y'(0)$, persamaan ini dapat dituliskan

$$(s^2 + 1)\mathcal{L}[y] = 1 + \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Persamaan aljabar ini dapat dengan mudah diselesaikan

$$\mathcal{L}[y] = \frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

Sehingga

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^2 + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} \right].$$

Menggunakan metode pada subbab terakhir, kita mempunyai

$$y(t) = \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t.$$

Contoh 6.2.11. Carilah solusi persamaan diferensial

$$y'' + 4y = \sin 2t, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0.$$

Solusi 6.2.11. Dengan menggunakan transformasi Laplace pada persamaan

$$\mathcal{L}[y'' + 4y] = \mathcal{L}[\sin 2t],$$

kita memiliki

$$s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Dengan kondisi awal $y(0)$ dan $y'(0)$, persamaan ini dapat dituliskan

$$(s^2 + 4)\mathcal{L}[y] = 10s + \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Sehingga

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{10s}{(s^2 + 4)} + \frac{2}{(s^2 + 4)^2} \right].$$

Diperoleh solusinya

$$y = 10 \cos 2t + \frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t.$$

Contoh 6.2.12. Carilah solusi persamaan diferensial

$$y'' + 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Solusi 6.2.12. Dengan menggunakan transformasi Laplace pada persamaan

$$\mathcal{L}[y'' + 4y' + 4y] = \mathcal{L}[t^2 e^{-2t}].$$

Dengan kondisi awal $y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$, kita mempunyai

$$s^2 \mathcal{L}[y] + 4s \mathcal{L}[y] + 4\mathcal{L}[y] = \frac{2}{(s + 2)^3}.$$

Kumpulkan sukunya

$$(s^2 + 4s + 4)\mathcal{L}[y] = (s + 2)^2 \mathcal{L}[y] = \frac{2}{(s + 2)^3}$$

atau

$$\mathfrak{L}[y] = \frac{2}{(s+2)^5}.$$

Solusinya adalah transformasi invers

$$y = \frac{2}{4!} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{4!}{(s+2)^5} \right] = \frac{1}{12} t^4 e^{-2t}.$$

Contoh 6.2.13. Carilah solusi persamaan diferensial

$$y' - 2y + z = 0,$$

$$z' - y - 2z = 0,$$

memenuhi kondisi awal

$$y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$$

Solusi 6.2.13. Dengan menggunakan transformasi Laplace pada masing-masing persamaan

$$\mathfrak{L}[y' - 2y + z] = \mathfrak{L}[0],$$

$$\mathfrak{L}[z' - y - 2z] = \mathfrak{L}[0],$$

kita memperoleh

$$s\mathfrak{L}[y] - y(0) - 2\mathfrak{L}[y] + \mathfrak{L}[z] = 0,$$

$$s\mathfrak{L}[z] - z(0) - \mathfrak{L}[y] - 2\mathfrak{L}[z] = 0.$$

Setelah menggantikan kondisi awal dan mengumpulkan suku-sukunya, kita peroleh

$$(s-2)\mathfrak{L}[y] + \mathfrak{L}[z] = 0,$$

$$\mathfrak{L}[y] - (s-2)\mathfrak{L}[z] = 0.$$

Persamaan aljabar ini dapat dengan mudah diselesaikan untuk memperoleh

$$\mathfrak{L}[y] = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 1},$$

$$\mathfrak{L}[z] = \frac{1}{(s-2)^2 + 1}.$$

Sehingga

$$y = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s-2}{(s-2)^2 + 1} \right] = e^{2t} \cos t,$$

$$z = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-2)^2 + 1} \right] = e^{2t} \sin t.$$

6.3 Transformasi Laplace Fungsi Impulsif dan Fungsi Tangga

Beberapa aplikasi yang paling berguna dan menarik dari metode transformasi Laplace muncul pada solusi persamaan diferensial linier dengan diskontinuitas atau fungsi impulsif tak homogen. Persamaan jenis ini sering kita jumpai dalam analisis arus dalam sirkuit listrik atau getaran sistem mekanik, ketika tegangan ataupun gaya memiliki magnitudo yang besar dalam waktu yang pendek.

Agar kita bisa secara efektif menggunakan fungsi dengan lompatan diskontinu, pertama kita harus memperkenalkan dua buah fungsi yang dinamakan fungsi delta dan fungsi tangga.

6.3.1 Fungsi Delta Dirac

Fungsi delta, $\delta(t)$, pertama kali diusulkan pada tahun 1930 dalam pengembangan formalisme matematik mekanika kuantum. Dirac mensyaratkan sebuah fungsi yang nol di setiap titik, kecuali pada satu titik, yaitu fungsi yang diskontinu dan berperilaku seperti paku yang tinggi dan sempit dari satuan luas. Matematikawan cepat bereaksi dalam hal ini dan mengatakan tidak terdapat fungsi yang memiliki sifat seperti ini. Tetapi Dirac menganggap ada, dan terus menggunakan fungsi ini sangat sukses dan akhirnya terbentuklah cabang matematik baru untuk membenarkan hal ini. Bagian matematik yang mempelajari ini dinamakan teori distribusi. Meskipun baik untuk mengetahui dasar matematik terbentuknya fungsi delta secara rinci, untuk aplikasi dalam ilmu fisika kita hanya memerlukan definisi operasionalnya saja.

Definisi Fungsi δ

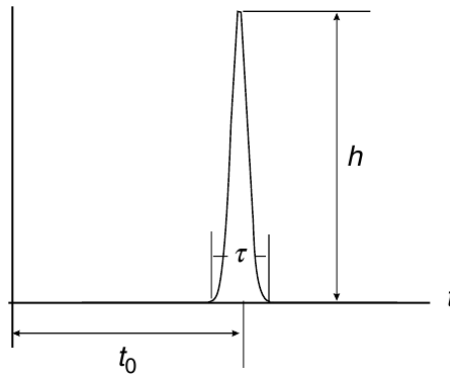
Fungsi delta adalah fungsi memuncak yang sangat tajam didefinisikan sebagai

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \infty, & t = t_0 \end{cases}, \quad (6.37)$$

tetapi integral yang melibatkan $\delta(t - t_0)$ ternormalisasi pada satu satuan yaitu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (6.38)$$

Jelas bahwa batas $-\infty$ dan ∞ dapat digantikan dengan $t_0 - \epsilon$ dan $t_0 + \epsilon$ sepanjang $\epsilon > 0$, karena $\delta(t - t_0)$ sama dengan 0 untuk $t \neq t_0$. Kita dapat memikirkannya sebagai fungsi yang sangat tinggi dan sempit seperti pada Gambar 6.2, dengan $h \rightarrow \infty$ dan $\tau \rightarrow 0$ sedemikian rupa sehingga luas di bawah kurva sama dengan satu.



Gambar 6.2: Sebuah fungsi berpuncak tajam. Jika $h \rightarrow \infty$ dan $\tau \rightarrow 0$ sedemikian rupa sehingga luas di bawah kurva sama dengan satu, maka fungsi ini menjadi fungsi delta $\delta(t - t_0)$.

Secara matematik, fungsi δ didefinisikan dengan bagaimana perilaku fungsi ini di dalam integral. Sebenarnya yang dilakukan Dirac pertama kali dengan fungsi delta ini adalah integrasi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt,$$

dengan $f(t)$ sebuah fungsi kontinu. Integral ini dapat dihitung dengan argumen berikut. Karena $\delta(t - t_0)$ nol untuk $t \neq t_0$, batas integrasi dapat dirubah menajadi $t_0 - \epsilon$ dan $t_0 + \epsilon$ dengan ϵ adalah sebuah bilangan kecil positif. Selanjutnya karena $f(x)$ kontinu pada $t = t_0$, nilainya pada interval $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ tidak akan berbeda terlalu jauh dengan $f(t_0)$, sehingga kita bisa mengatakan, kira-kira, bahwa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} f(t)\delta(t - t_0) dt \approx f(t_0) \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \delta(t - t_0) dt$$

dengan aproksimasi meningkat ketika ϵ mendekati nol. Tetapi,

$$\int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \delta(t - t_0) dt = 1,$$

untuk semua nilai ϵ . Jika $\epsilon \rightarrow 0$, kita memiliki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (6.39)$$

Integral ini kadang dinamakan dengan sifat pergeseran fungsi delta: $\delta(t - t_0)$ berperilaku sebagai penyaring, menyeleksi semua nilai dari $f(t)$ nilainya pada titik $t = t_0$.

Fungsi Delta dengan Argumen Rumit

Secara umum argumen fungsi delta dapat berupa fungsi sebarang dengan variabel bebas. Sehingga fungsi tersebut dapat selalu dituliskan sebagai jumlah fungsi delta dari argumen sederhana. Berikut adalah beberapa contohnya.

- $\delta(-t)$

Misalkan $t' = -t$ maka $dt' = -dt$, kita dapat menuliskan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(-t) dt = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(-t')\delta(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t')\delta(t') dt' = f(0).$$

Karena

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0),$$

maka

$$\delta(-t) = \delta(t) \tag{6.40}$$

hubungan ini jelas dengan sendirinya.

- $\delta(at)$

Misalkan $t' = at$ maka $dt = dt'/a$, Sehingga jika $a > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(at) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t')\frac{1}{a} dt' = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t') dt' \\ &= \frac{1}{a} f\left(\frac{0}{a}\right) = \frac{1}{a} f(0). \end{aligned}$$

Karena

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{a}\delta(t) dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) dt = \frac{1}{a} f(0)$$

maka

$$\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t).$$

Karena

$$\delta(-at) = \delta(at),$$

kita dapat menuliskan

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t). \tag{6.41}$$

- $\delta(t^2 - a^2)$

Argumen fungsi ini menuju nol ketika $t = a$ dan $t = -a$, yang kelihatannya mengimplikasikan dua buah fungsi δ . Kontribusi pada integralnya

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t^2 - a^2) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta[(t-a)(t+a)] dt,$$

hanya pada nilai nol dari argumen fungsi delta. Yaitu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t^2 - a^2) dt = \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(t)\delta(t^2 - a^2) dt + \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(t^2 - a^2) dt.$$

Di dekat dua buah nilai nol, $t^2 - a^2$ dapat diaproksimasi

$$t^2 - a^2 = (t - a)(t + a) = \begin{cases} (-2a)(t + a), & t \rightarrow -a \\ (+2a)(t - a), & t \rightarrow +a \end{cases}.$$

Dalam limit $\epsilon \rightarrow 0$, integralnya menjadi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t^2 - a^2) dt &= \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(t)\delta((-2a)(t + a)) dt \\ &+ \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(2a)(t - a) dt = \frac{1}{|2a|} \int_{-a-\epsilon}^{-a+\epsilon} f(t)\delta(t + a) dt \\ &+ \frac{1}{|2a|} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(t - a) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{|2a|} [\delta(t + a) + \delta(t - a)] dt. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\delta(t^2 - a^2) = \frac{1}{|2a|} [\delta(t + a) + \delta(t - a)]. \quad (6.42)$$

Transformasi Laplace Fungsi Delta dan Turunannya

Mengikuti definisi transformasi Laplace dan fungsi delta, transformasi Laplace fungsi delta diberikan oleh

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - a) dt = e^{-sa}. \quad (6.43)$$

Transformasi Laplace turunan fungsi delta dapat dihitung dengan integral parsial

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta'(t - a)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{d}{dt} \delta(t - a) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} d(\delta(t - a)) \\ &= [e^{-st} \delta(t - a)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \delta(t - a) \frac{d}{dt} e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Karena $\delta(t - a)$ hilang di semua tempat kecuali pada $t = a$, pada batas atas dan bawah, suku yang diintegrasikan nilainya nol. Sehingga

$$\mathcal{L}[\delta'(t - a)] = s \int_0^{\infty} \delta(t - a) e^{-st} dt = s e^{-sa}. \quad (6.44)$$

Rumus ini sangat berguna ketika kita menemui fenomena alam yang impulsif.

6.3.2 Fungsi Tangga Heaviside

Definisi Fungsi Tangga

Fungsi tangga satuan Heaviside $u(t - c)$ dapat didefinisikan dari integrasi fungsi delta $\delta(t' - c)$

$$u(t - c) = \int_{-\infty}^t \delta(t' - c) dt'. \quad (6.45)$$

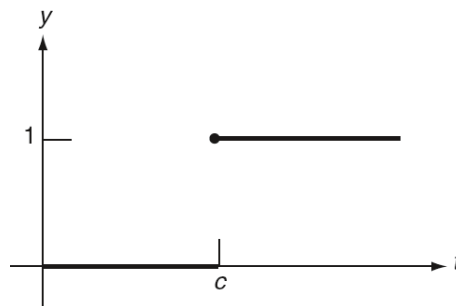
Fungsi delta secara identik bernilai nol jika $t' < c$. Batas atas variabel t' adalah t . Jika t kurang dari c , maka semua t' akan kurang dari c . Integralnya sama dengan nol. Jika t lebih besar dari c maka integralnya, dengan definisi fungsi delta, sama dengan satu. Sehingga

$$u(t - c) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t > c \end{cases}. \quad (6.46)$$

Fungsi tangga dapat didefinisikan langsung dari (6.46) tanpa melihat (6.45). Tetapi dengan (6.45) jelas terlihat bahwa

$$\frac{d}{dt}u(t - c) = \delta(t - c). \quad (6.47)$$

Gambar dari fungsi tangga satuan Heaviside $y = u(t - c)$ ditunjukkan pada Gambar 6.3. Menariknya, fungsi ini tidak diberikan nama fungsi tangga karena berat sebelah, tetapi, dari Oliver Heaviside insinyur Inggris. Biasanya fungsi ini secara sederhana dinamakan fungsi tangga. Kita sering berurusan dengan sebuah pulsa berdurasi ter-



Gambar 6.3: Fungsi tangga satuan Heaviside

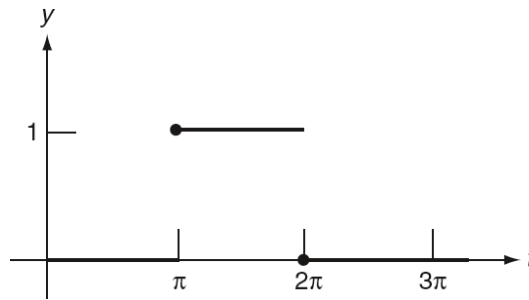
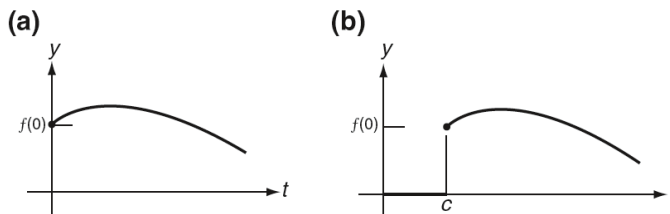
batas. Fungsi tangga ini sangat sesuai dalam situasi tersebut. Sebagai contoh, pulsa persegi

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \pi \\ 1 & \pi < t < 2\pi \\ 0 & 2\pi < t < \infty \end{cases}$$

dapat dinyatakan sebagai

$$y(t) = u(t - \pi) - u(t - 2\pi).$$

Sketsa fungsi ini bisa dilihat pada Gambar 6.4.

Gambar 6.4: Impuls persegi $u(t - \pi) - u(t - 2\pi)$.Gambar 6.5: Translasi sebuah fungsi (a) $y = f(t)$; (b) $y = f(t - c)u(t - c)$.

Operasi Pergeseran

Dalam beberapa persoalan sebuah sistem yang aktif pada $t = 0$ karena adanya gangguan awal, setelah itu berperilaku karena gangguan lain yang mulai pada waktu yang lebih akhir $t = c$. Dalam situasi ini, deskripsi analitik diberikan oleh fungsi

$$y = f(t - c)u(t - c)$$

yang merepresentasikan operasi pergeseran. Pertama $f(t - c)$ merepresentasikan translasi $f(t)$ sebesar c ke arah positif t . Mengalikan dengan $u(t - c)$ memberikan efek memotong atau menghilangkan semuanya di sebelah kiri c . Hal ini terlihat pada Gambar 6.5.

Transformasi Laplace Melibatkan Fungsi Tangga

Transformasi Laplace fungsi tangga dengan mudah ditentukan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t - c)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t - c) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} e^{-sc}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Fungsi tangga ini secara khusus penting dalam teori transformasi karena hubungan antara transformasi $f(t)$ dengan translasinya $y = f(t - c)u(t - c)$ sebagai berikut.

$$\mathcal{L}[f(t - c)u(t - c)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t - c)u(t - c) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} f(t - c) dt.$$

Jika kita ganti variabel $t' = t - c$

$$\begin{aligned} \int_c^{\infty} e^{-st} f(t - c) dt &= \int_0^{\infty} e^{-s(t'+c)} f(t') dt' = e^{-sc} \int_0^{\infty} e^{-st'} f(t') dt' \\ &= e^{-sc} \mathcal{L}[f(t)]. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathcal{L}[f(t - c)u(t - c)] = e^{-sc} \mathcal{L}[f(t)]. \quad (6.49)$$

Inversnya juga penting untuk diperhatikan

$$f(t - c)u(t - c) = \mathcal{L}^{-1} [e^{-sc} \mathcal{L}[f(t)]]. \quad (6.50)$$

Hubungan ini dikenal sebagai teorema pergeseran $-t$ (pergeseran kedua).

6.4 Persamaan Diferensial dengan Fungsi Gaya Diskontinu

Dalam subbab ini kita sekarang memperhatikan beberapa contoh pada suku tak homogen, atau fungsi gaya, yang diskontinu.

Kita mulai dengan kasus paling sederhana. Sebuah partikel dengan massa m mula-mula diam kemudian digerakkan oleh ledakan yang tiba-tiba pada $t = t_0$. Dengan asumsi tanpa gesekan, kita berharap mencari posisi sebagai fungsi waktu. Kejadian sehari-hari yang terasa “aneh” untuk matematika “biasa”. Tetapi dengan transformasi Laplace dan fungsi delta maka hal ini menjadi sangat mudah.

Dalam persamaan dinamika Newton

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F, \quad (6.51)$$

marilah kita nyatakan gaya oleh ledakan tiba-tiba dengan fungsi delta

$$F = P\delta(t - t_0). \quad (6.52)$$

Kondisi awalnya adalah

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0. \quad (6.53)$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace pada persamaan diferensial

$$\mathcal{L}[mx''] = \mathcal{L}[P\delta(t - t_0)], \quad (6.54)$$

kita memperoleh

$$ms^2 \mathfrak{L}[x] = P e^{-st_0}. \quad (6.55)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{P}{m} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{e^{-st_0}}{s^2} \right] = \frac{P}{m} \mathfrak{L}^{-1} [e^{-st_0} \mathfrak{L}[t]] \\ &= \frac{P}{m} (t - t_0) u(t - t_0). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Hal ini berarti

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \frac{P}{m} (t - t_0) & t > t_0 \end{cases}. \quad (6.57)$$

Hasil ini mengatakan bahwa partikel akan diam hingga t_0 , setelah itu jarak akan naik linier dengan waktu. Kecepatan partikel diberikan oleh

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{P}{m}, \quad (6.58)$$

yang konstan. Faktanya kita melihat bahwa amplitudo P fungsi delta sama dengan mv yang merupakan momentum. Hal ini menunjukkan bahwa yang dilakukan ledakan tiba-tiba adalah untuk memberikan momentum P kepada partikel. Momentum ini tetap pada partikel setelahnya.

Contoh 6.4.1. Marilah kita perhatikan osilator harmonik terpaksa dan teredam. Massa m dipaksa oleh gaya $F(t)$. Osilator ini juga mengalami gaya pegas $-kx(t)$ dan gaya gesek $-bx'(t)$ yang sesuai dengan kecepatannya. Persamaan diferensial mendeskripsikan gerak ini

$$mx'' + bx' + kx = F(t).$$

Jika mula-mula diam

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

dan fungsi gayanya merupakan sebuah impuls ideal pada t_0 , yaitu

$$F(t) = P_0 \delta(t - t_0),$$

carilah perpindahan x sebagai fungsi waktu t .

Solusi 6.4.1. Jika kita lakukan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan

$$\mathfrak{L} \left[x'' + \frac{b}{m} x' + \frac{k}{m} x \right] = \frac{P_0}{m} \mathfrak{L}[\delta(t - t_0)]$$

diperoleh

$$s^2 \mathfrak{L}[x] + \frac{b}{m} s \mathfrak{L}[x] + \frac{k}{m} \mathfrak{L}[x] = \frac{P_0}{m} e^{-st_0}.$$

Maka

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{P_0}{m} \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} e^{-st_0}.$$

Marilah kita tuliskan

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} &= s^2 + \frac{b}{m}s + \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m} \\ &= \left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2, \end{aligned}$$

dan menyederhanakan notasi

$$\alpha = \frac{b}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2,$$

sehingga kita memiliki

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{P_0}{m\omega} \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} e^{-st_0}.$$

Tiga buah kasus muncul di sini

(a) Kasus osilasi, $\omega^2 > 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{P_0}{m\omega} \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} e^{-st_0} \right] = \frac{P_0}{m\omega} \mathfrak{L}^{-1} \left[e^{-st_0} \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \right] \\ &= \frac{P_0}{m\omega} \mathfrak{L}^{-1} [e^{-st_0} \mathfrak{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t]] = \frac{P_0}{m\omega} e^{-\alpha(t-t_0)} \sin \omega(t-t_0) u(t-t_0). \end{aligned}$$

(b) Kasus *over damped* $\omega^2 < 0$. Misalkan $\beta^2 = -\omega^2$

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{P_0}{m\beta} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 - \beta^2} e^{-st_0} \right] = \frac{P_0}{m\beta} \mathfrak{L}^{-1} \left[e^{-st_0} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 - \beta^2} \right] \\ &= \frac{P_0}{m\beta} \mathfrak{L}^{-1} [e^{-st_0} \mathfrak{L}[e^{-\alpha t} \sinh \beta t]] = \frac{P_0}{m\beta} e^{-\alpha(t-t_0)} \sinh \beta(t-t_0) u(t-t_0). \end{aligned}$$

(c) Kasus teredam kritis $\omega^2 = 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{P_0}{m} \frac{1}{(s + \alpha)^2} e^{-st_0} \right] = \frac{P_0}{m} \mathfrak{L}^{-1} \left[e^{-st_0} \frac{1}{(s + \alpha)^2} \right] \\ &= \frac{P_0}{m} \mathfrak{L}^{-1} [e^{-st_0} \mathfrak{L}[e^{-\alpha t} t]] = \frac{P_0}{m} e^{-\alpha(t-t_0)} (t-t_0) u(t-t_0). \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa dalam semua kasus, $x(t)$ sama dengan nol sebelum $t = t_0$, seperti yang kita harapkan, karena sistem tidak dapat merespon sampai pulsanya muncul. Perilaku seperti ini sering dinamakan sebagai hubungan kausal (sebab-akibat). Kausalitas, merupakan solusi karakteristik yang melibatkan waktu, mengharuskan respon tidak boleh ada sebelum aplikasi sebuah gaya.

Menarik untuk memperhatikan bahwa persamaan Newton invarian di bawah transformasi $t \rightarrow -t$. Maka jelas kausalitas tidak diimplikasi oleh persamaan Newton.

Kausalitas yang ditunjukkan di sini merupakan hasil dari definisi dari transformasi Laplace. Kenyataannya adalah syarat fisik ini dibangun dalam transformasi Laplace merupakan alasan bahwa metode ini berguna.

Contoh 6.4.2. Sebuah massa $m = 1$ disambungkan dengan sebuah pegas dengan konstanta $k = 4$ dan tanpa ada gesekan, $b = 0$. Massa dilepaskan dari keadaan diam dengan $x(0) = 3$. Pada $t = 2\pi$ massa tersebut dipukul dengan palu, yang menyebabkan $P_0 = 8$. Tentukan gerak massa.

Solusi 6.4.2. Kita perlu menyelesaikan persoalan kondisi awal

$$x'' + 4x = 8\delta(t - 2\pi); \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 0.$$

Lakukan transformasi Laplace untuk memperoleh

$$s^2\mathfrak{L}[x] - 3s + 4\mathfrak{L}[x] = 8e^{-2\pi s},$$

sehingga

$$(s^2 + 4)\mathfrak{L}[x] = 3s + 8e^{-2\pi s}.$$

Maka

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{3s}{(s^2 + 4)} + \frac{8e^{-2\pi s}}{(s^2 + 4)}$$

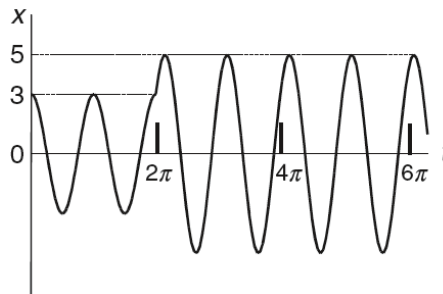
diperoleh

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{3s}{s^2 + 4} \right] + \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{8e^{-2\pi s}}{s^2 + 4} \right] = 3\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 4} \right] + 4\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2e^{-2\pi s}}{s^2 + 4} \right] \\ &= 3\mathfrak{L}^{-1}[\mathfrak{L}[\cos 2t]] + 4\mathfrak{L}^{-1}[e^{-2\pi s}\mathfrak{L}[\sin 2t]] \\ &= 3 \cos 2t + 4 \sin 2(t - 2\pi)u(t - 2\pi) \end{aligned}$$

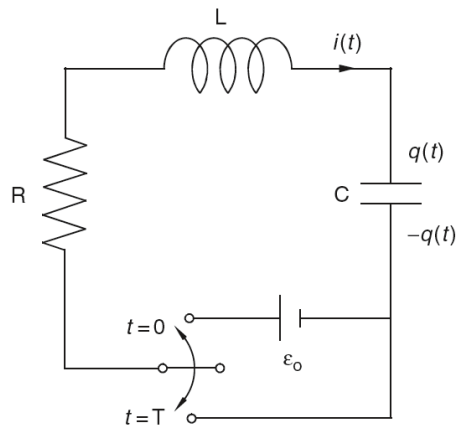
atau

$$x(t) = \begin{cases} 3 \cos 2t, & t < 2\pi \\ 3 \cos 2t + 4 \sin 2(t - 2\pi), & t > 2\pi \end{cases}.$$

Karena $3 \cos 2t + 4 \sin 2t = 5 \cos(2t - \theta)$ dan $\theta = \tan^{-1}(4/3)$, kita melihat efek dari impuls pada $t = 2\pi$. Hal ini menyebabkan amplitudo osilasi naik dari 3 ke 5 secara tiba-tiba. Meskipun frekuensinya tetap sama, terdapat diskontinuitas pada kecepatan. Plot dari $x(t)$ pada Gambar 6.6.



Gambar 6.6: Plot dari $x(t) = 3 \cos 2t + 4 \sin 2(t - 2\pi)u(t - 2\pi)$.



Gambar 6.7: Sebuah sirkuit RLC. Sirkuit terbuka tanpa muatan pada kapasitor ditutup pada $t = 0$. Pada $t = T$ baterai dilepaskan dari sirkuit sedemikian rupa sehingga sirkuit tertutup tanpa baterai.

Contoh 6.4.3. Perhatikan rangkaian RLC pada Gambar 6.7 dengan $R = 110 \Omega$, $L = 1$ H dan $C = 0.001$ F, dan baterainya memiliki GGL 90 V. Awalnya tidak terdapat arus pada sirkuit dan tidak ada muatan pada kapasitor. Pada $t = 0$ saklar ditutup dan pada $t = T$, ($T = 1$) s baterai dilepaskan dari sirkuit sedemikian rupa sehingga sirkuit RLC tetap tertutup tanpa GGL. Carilah arus $i(t)$ sebagai fungsi waktu.

Solusi 6.4.3. Persamaan sirkuit diberikan oleh

$$Li' + Ri + \frac{1}{C}q = e(t)$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

dan kondisi awalnya adalah

$$i(0) = 0, \quad q(0) = 0.$$

Dalam soal ini

$$e(t) = 90[u(t) - u(t - 1)].$$

Aplikasikan transformasi Laplace pada persamaan diferensial untuk memperoleh

$$\begin{aligned} Ls\mathfrak{L}[i] + R\mathfrak{L}[i] + \frac{1}{C}\mathfrak{L}[q] &= \mathfrak{L}[e(t)] \\ \mathfrak{L}[i] &= s\mathfrak{L}[q]. \end{aligned}$$

Kombinasikan dua persamaan terakhir untuk memperoleh

$$Ls\mathfrak{L}[i] + R\mathfrak{L}[i] + \frac{1}{Cs}\mathfrak{L}[i] = \mathfrak{L}[e(t)].$$

Jika kita masukkan nilai R , L , C dan $e(t)$ kita mempunyai

$$\begin{aligned} s\mathfrak{L}[i] + 110\mathfrak{L}[i] + \frac{1}{0.001s}\mathfrak{L}[i] &= \mathfrak{L}[90[u(t) - u(t - 1)]] \\ &= 90\frac{1 - e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathfrak{L}[i] = 90\frac{1 - e^{-s}}{s^2 + 110s + 1000}.$$

Karena

$$\frac{90}{s^2 + 110s + 1000} = \frac{1}{s + 10} - \frac{1}{s + 100},$$

kita memiliki

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + 10} - \frac{1}{s + 100} - e^{-s} \left(\frac{1}{s + 10} - \frac{1}{s + 100} \right) \right] \\ &= e^{-10t} - e^{-100t} - \left(e^{-10(t-1)} - e^{-100(t-1)} \right) u(t - 1). \end{aligned}$$

6.5 Konvolusi

Sifat umum lain yang penting dari transformasi Laplace berhubungan dengan perkalian transformasi. Hal ini terjadi ketika kita diberikan dua buah transformasi $F(s)$ dan $G(s)$ yang inversnya $f(t)$ dan $g(t)$ kita ketahui, dan kita ingin menghitung invers dari perkalian $F(s)G(s)$ dari invers yang sudah kita ketahui $f(t)$ dan $g(t)$. Untuk memahami arti dari formulasi matematik, pertama kita akan memperhatikan contoh yang spesifik.

6.5.1 Integral Duhamel

Marilah kita perhatikan lagi osilator teredam

$$mx'' + bx' + kx = f(t), \quad (6.59)$$

dengan $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Dengan mengaplikasikan transformasi Laplace kita peroleh

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{\mathfrak{L}[f(t)]}{m[(s + \alpha)^2 + \omega^2]}, \quad (6.60)$$

dengan $\alpha = b/2m$, $\omega^2 = k/m - (b/2m)^2$. Jika $f(t)$ adalah impuls satuan pada waktu τ

$$f(t) = \delta(t - \tau), \quad (6.61)$$

maka kita memiliki

$$\mathfrak{L}[x] = \frac{e^{-s\tau}}{m[(s + \alpha)^2 + \omega^2]}. \quad (6.62)$$

Sehingga

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[e^{-s\tau} \mathfrak{L} \left[\frac{1}{m\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t \right] \right] \\ &= \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) u(t-\tau). \end{aligned} \quad (6.63)$$

Untuk $t > \tau$,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) u(t-\tau). \quad (6.64)$$

Jika kita menamai $g(t)$ sebagai solusi untuk kasus khusus dengan τ sama dengan nol

$$g(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad (6.65)$$

sehingga secara umum jika τ tidak sama dengan nol

$$x(t) = g(t - \tau). \quad (6.66)$$

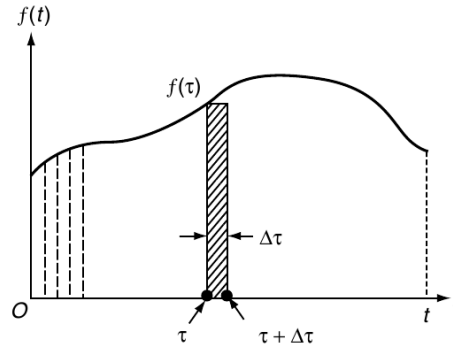
Jika fungsi gayanya adalah

$$f(t) = P\delta(t - \tau), \quad (6.67)$$

solusinya (fungsi respon) adalah

$$x(t) = Pg(t - \tau). \quad (6.68)$$

Sekarang jika kita memperhatikan respon sistem terhadap fungsi gaya eksternal ditunjukkan pada Gambar 6.8. Gaya ini dapat diasumsikan terdiri dari deret impuls dengan magnitudo berbeda. Seperti yang sudah kita diskusikan, impuls tidak lain



Gambar 6.8: Fungsi gaya sebarang.

adalah momentum P yang diberikan. Karena perubahan momentum sama dengan gaya ($\Delta P/\Delta t = f$), impuls yang diberikan dalam selang waktu yang pendek sama dengan gaya dikalikan durasi waktu.

Dengan mengasumsikan pada waktu τ , gaya $f(\tau)$ bekerja pada sistem untuk waktu yang pendek $\Delta\tau$, impuls yang bekerja pada $t = \tau$ diberikan oleh $f(\tau)\Delta\tau$. Pada sebarang waktu t , waktu yang dilalui sejak impuls adalah $t - \tau$, sehingga respon sistem pada waktu t yang diakibatkan oleh impuls adalah

$$\Delta x(t) = f(\tau)\Delta\tau g(t - \tau). \quad (6.69)$$

Respon total pada waktu t dapat dicari dengan menjumlahkan semua respon yang diakibatkan oleh impuls elementer yang bekerja pada semua waktu

$$x(t) = \sum f(\tau)g(t - \tau)\Delta\tau. \quad (6.70)$$

Jika $\Delta\tau \rightarrow 0$ dan menggantikan penjumlahan dengan integrasi, kita memperoleh

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (6.71)$$

atau

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega(t - \tau)d\tau. \quad (6.72)$$

Hasil ini dikenal sebagai integral Duhamel. Dalam berbagai kasus fungsi $f(\tau)$ memiliki bentuk yang memungkinkan integrasi eksplisit. Dalam kasus tidak memungkinkan integrasi, integral ini dapat diselesaikan secara numerik tanpa banyak kesulitan.

6.5.2 Teorema Konvolusi

Integral Duhamel juga bisa dipandang dengan cara berikut. Karena

$$g(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{m[(s + \alpha)^2 + \omega^2]} \right], \quad (6.73)$$

dan dengan (6.60)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[x(t)] &= \mathfrak{L}[f(t)] \frac{1}{m[(s + \alpha)^2 + \omega^2]} \\ &= \mathfrak{L}[f(t)] \mathfrak{L}[g(t)].\end{aligned}\quad (6.74)$$

diperoleh

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1} [\mathfrak{L}[f(t)] \mathfrak{L}[g(t)]]. \quad (6.75)$$

Di lain pihak

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad (6.76)$$

maka

$$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \mathfrak{L}^{-1} [\mathfrak{L}[f(t)] \mathfrak{L}[g(t)]]. \quad (6.77)$$

Dari hal ini, sepanjang transformasinya ada, hubungan

$$\mathfrak{L} \left[\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right] = \mathfrak{L}[f(t)] \mathfrak{L}[g(t)] \quad (6.78)$$

secara umum berlaku untuk sebarang fungsi f dan g . Hal ini dikenal sebagai teorema konvolusi. Jika hal ini berlaku, maka

$$\mathfrak{L} \left[\int_0^t f(t - \lambda)g(\lambda)d\lambda \right] = \mathfrak{L}[f(t)] \mathfrak{L}[g(t)] \quad (6.79)$$

harus juga berlaku, karena peran yang dimainkan oleh f dan g dalam persamaan simetrik. Hal ini dapat didemonstrasikan langsung dengan penggantian variabel. Misalkan $\lambda = t - \tau$

$$\begin{aligned}\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau &= \int_t^0 f(t - \lambda)g(\lambda)d(-\lambda) \\ &= \int_0^t f(t - \lambda)g(\lambda)d\lambda.\end{aligned}\quad (6.80)$$

Bukti teorema konvolusi adalah sebagai berikut

Dari definisi

$$\mathfrak{L} \left[\int_0^t f(t - \lambda)g(\lambda)d\lambda \right] = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t - \lambda)g(\lambda)d\lambda \right] dt. \quad (6.81)$$

Sekarang dengan

$$u(t - \lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda < 1 \\ 0, & \lambda > 1 \end{cases}, \quad (6.82)$$

dan

$$f(t - \lambda)g(\lambda)u(t - \lambda) = \begin{cases} f(t - \lambda)g(\lambda), & \lambda < 1 \\ 0, & \lambda > 1 \end{cases}. \quad (6.83)$$

Kita dapat menuliskan

$$\int_0^{\infty} f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda + \int_t^{\infty} f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda \quad (6.84)$$

suku kedua pada ruas kanan sama dengan nol karena batas bawah dari λ adalah t , sehingga $\lambda > t$. Suku pertama ruas kanan, selang λ adalah antara 0 dan t , sehingga $\lambda < t$, menggunakan (6.83) kita memiliki

$$\int_0^{\infty} f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda. \quad (6.85)$$

Dengan memasukkan (6.85) pada (6.81)

$$\mathfrak{L} \left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^{\infty} f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda \right] dt, \quad (6.86)$$

dan mengubah urutan integrasi

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^{\infty} f(t-\lambda)g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda \right] dt = \int_0^{\infty} g(\lambda) \left[\int_0^{\infty} e^{-st} f(t-\lambda)u(t-\lambda)dt \right] d\lambda, \quad (6.87)$$

kita peroleh

$$\mathfrak{L} \left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda \right] = \int_0^{\infty} g(\lambda) \left[\int_0^{\infty} e^{-st} f(t-\lambda)u(t-\lambda)dt \right] d\lambda. \quad (6.88)$$

Karena adanya $u(t-\lambda)$, integran pada integral dalam secara identik sama dengan nol untuk $t < \lambda$. Sehingga integral dalam tidak mulai dari $t = 0$ melainkan pada $t = \lambda$. Maka

$$\mathfrak{L} \left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda \right] = \int_0^{\infty} g(\lambda) \left[\int_{\lambda}^{\infty} e^{-st} f(t-\lambda)dt \right] d\lambda. \quad (6.89)$$

Sekarang pada integral dalam ruas kanan, misalkan $t - \lambda = \tau$ dan $dt = d\tau$. Maka

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \left[\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda \right] &= \int_0^{\infty} g(\lambda) \left[\int_{\lambda}^{\infty} e^{-s(\tau+\lambda)} f(\tau)d\tau \right] d\lambda. \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s\lambda} g(\lambda) \left[\int_{\lambda}^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \right] d\lambda. \\ &= \left[\int_{\lambda}^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \right] \left[\int_0^{\infty} e^{-s\lambda} g(\lambda)d\lambda \right] \\ &= \mathfrak{L}[f(t)]\mathfrak{L}[g(t)] \end{aligned} \quad (6.90)$$

seperti yang sudah dinyatakan.

Notasi yang biasa digunakan untuk integral konvolusi adalah

$$\int_0^t f(t-\lambda)g(\lambda)d\lambda = f(t) * g(t). \quad (6.91)$$

Sehingga teorema konvolusi biasanya dituliskan sebagai

$$\mathfrak{L}[f]\mathfrak{L}[g] = \mathfrak{L}[f * g]. \quad (6.92)$$

Contoh 6.5.1. Gunakan konvolusi untuk mencari

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s-a)} \right].$$

Solusi 6.5.1. Karena

$$\mathfrak{L}[t] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathfrak{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a},$$

kita dapat menuliskan

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s-a)} \right] = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-a} \right] = \mathfrak{L}^{-1} [\mathfrak{L}[t]\mathfrak{L}[e^{at}]].$$

Sehingga

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s-a)} \right] = te^{at} = \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1).$$

6.6 Sifat-sifat Transformasi Laplace

6.6.1 Transformasi Integral

Dari sifat transformasi turunan, kita dapat memperoleh rumus untuk transformasi sebuah integral

$$\mathfrak{L} \left[\int_0^t f(x) dx \right] = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(x) dx \right] dt.$$

Misalkan

$$g(t) = \int_0^t f(x) dx,$$

maka

$$g'(t) = f(t) \quad \text{dan} \quad g(0) = 0.$$

Karena

$$\mathfrak{L}[g'(t)] = s\mathfrak{L}[g(t)] - g(0),$$

kita mempunyai

$$\mathfrak{L}[f(t)] = s\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right]. \quad (6.93)$$

Sehingga jika $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$

$$\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(x) dx\right] = \frac{\mathfrak{L}[f(t)]}{s} = \frac{1}{s}F(s). \quad (6.94)$$

Rumus ini sangat berguna untuk mencari invers transformasi sebuah pecahan yang memiliki bentuk $p(s)/[s^n q(s)]$. Sebagai contoh

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-a)}\right] &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathfrak{L}[e^{at}]\right] = \mathfrak{L}^{-1}\mathfrak{L}\left[\int_0^t e^{ax} dx\right] \\ &= \int_0^t e^{ax} dx = \frac{1}{a}(e^{at} - 1). \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-a)}\right] &= \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\mathfrak{L}\left[\frac{1}{a}(e^{at} - 1)\right]\right] \\ &= \int_0^t \frac{1}{a}(e^{ax} - 1) dx = \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1). \end{aligned}$$

Metode ini sering lebih nyaman untuk digunakan dibandingkan dengan pecahan parsial.

6.6.2 Integrasi Transformasi

Turunan dari $F(s)$ berhubungan dengan perkalian $f(t)$ dengan $-t$. Secara alami kita mengharapkan bahwa integrasi $F(s)$ berhubungan dengan pembagian $f(t)$ dengan t . Hal ini adalah kasus yang kita tinjau, yang diberikan oleh batas integrasi yang dipilih secara tepat. Jika $F(s')$ adalah transformasi Laplace dari $f(t)$ maka

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(s') ds' &= \int_s^\infty \left[\int_0^\infty e^{-s't} f(t) dt\right] ds' = \int_0^\infty \left[\int_s^\infty e^{-s't} f(t) ds'\right] dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \left[\int_s^\infty e^{-s't} ds'\right] dt = \int_0^\infty f(t) \left[-\frac{1}{t} e^{-s't}\right]_{s'=s}^\infty dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \frac{1}{t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{t} f(t) dt = \mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]. \quad (6.95) \end{aligned}$$

Hubungan ini, yang bernama

$$\mathfrak{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \mathfrak{L}[f(t)] ds'$$

berguna ketika $\mathfrak{L}[f(t)]$ diketahui.

Contoh 6.6.1. Carilah (a) $\mathfrak{L}\left[\frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})\right]$, (b) $\mathfrak{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$.

Solusi 6.6.1. (a)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[\frac{1}{t}(e^{-at} - e^{-bt})\right] &= \int_s^\infty \mathfrak{L}[(e^{-at} - e^{-bt})] ds' = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s'+a} - \frac{1}{s'+b}\right) ds' \\ &= [\ln(s'+a) - \ln(s'+b)]_{s'=s}^\infty = \left[\ln \frac{s'+a}{s'+b}\right]_{s'=s}^\infty \\ &= \ln 1 - \ln \frac{s+a}{s+b} = \ln \frac{s+b}{s+a}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] &= \int_s^\infty \mathfrak{L}[\sin t] ds' = \int_s^\infty \frac{1}{s'^2+1} ds' = [\tan^{-1} s']_{s'=s}^\infty \\ &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \cot^{-1} s = \tan^{-1} \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

6.6.3 Penskalaan

Jika $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ sudah diketahui, maka $\mathfrak{L}[f(at)]$ dapat dengan mudah diperoleh. Dengan definisi

$$\mathfrak{L}[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-(s/a)at} f(at) d(at). \quad (6.96)$$

Misalkan $t' = at$ integralnya menjadi

$$\int_0^\infty e^{-(s/a)at} f(at) d(at) = \int_0^\infty e^{-(s/a)t'} f(t') d(t'),$$

yang merupakan transformasi Laplace dari f dengan parameter s diganti dengan s/a . Sehingga

$$\mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (6.97)$$

Contoh 6.6.2. Jika $\mathfrak{L}[f(t)]$ diketahui $1/s(1+2s)$, carilah $\mathfrak{L}[f(2t)]$.

Solusi 6.6.2.

$$\mathfrak{L}[f(2t)] = \frac{1}{2} \frac{1}{(s/2)[1+2(s/2)]} = \frac{1}{s(1+s)}.$$

Contoh 6.6.3. Carilah $\mathfrak{L} \left[\frac{\sin \omega t}{t} \right]$.

Solusi 6.6.3. Karena $\mathfrak{L} \left[\frac{\sin t}{t} \right] = \tan^{-1} \frac{1}{s}$, kemudian

$$\mathfrak{L} \left[\frac{\sin \omega t}{\omega t} \right] = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{\omega}{s}.$$

Sehingga

$$\mathfrak{L} \left[\frac{\sin \omega t}{t} \right] = \tan^{-1} \frac{\omega}{s}.$$

6.6.4 Transformasi Laplace Fungsi Periodik

Sering kita menjumpai fungsi input sistem fisika adalah fungsi periodik. Sebuah fungsi dikatakan periodik jika terdapat sebuah bilangan p sehingga

$$f(t+p) = f(t).$$

Nilai p ini disebut sebagai periode dari f . Sebuah fungsi periodik memiliki karakteristik

$$f(t) = f(t+p) = f(t+2p) = \dots f(t+np) \dots \quad (6.98)$$

Transformasi Laplace $f(t)$ merupakan sebuah deret integral

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[f] &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st} f(t) dt + \dots \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt \dots \end{aligned} \quad (6.99)$$

Jika kita mengubah variabel $t = \tau + np$

$$\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t) dt = \int_0^p e^{-s(\tau+np)} f(\tau+np) d\tau = e^{-snp} \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau) d\tau.$$

Variabel integrasi dummy τ dapat kita pilih sama dengan t , sehingga

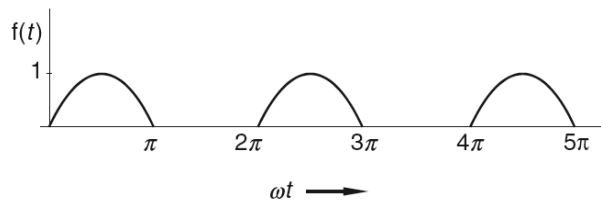
$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[f] &= \int_0^p e^{-st} f(t) dt + e^{-sp} \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \dots + e^{-snp} \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \dots \\ &= (1 + e^{-sp} + e^{-2sp} + \dots + e^{-nsp} + \dots) \int_0^p e^{-st} f(t) dt. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Dengan ekspansi deret, $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$, persamaan ini menjadi

$$\mathfrak{L}[f] = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt. \quad (6.101)$$

Contoh 6.6.4. Penyearah Setengah Gelombang: Carilah transformasi Laplace fungsi periodik (Gambar 6.9) yang definisi satu periodenya

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t, & \text{jika } 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \\ 0, & \text{jika } \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}.$$



Gambar 6.9: Penyearah setengah gelombang.

Solusi 6.6.4.

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1 - e^{-s2\pi/\omega}} \int_0^{2\pi/\omega} e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-s2\pi/\omega}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin \omega t dt$$

Integral ini dapat dihitung dengan integral parsial. Tetapi, lebih mudah untuk memperhatikan bahwa integral ini adalah suku imajiner dari

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} e^{i\omega t} dt &= \left[\frac{1}{-s + i\omega} e^{-st + i\omega t} \right]_0^{\pi/\omega} = \frac{1}{-s + i\omega} \left(e^{-s\pi/\omega + i\pi} - 1 \right) \\ &= \frac{-s - i\omega}{s^2 + \omega^2} \left(-e^{-s\pi/\omega} - 1 \right). \end{aligned}$$

Sehingga

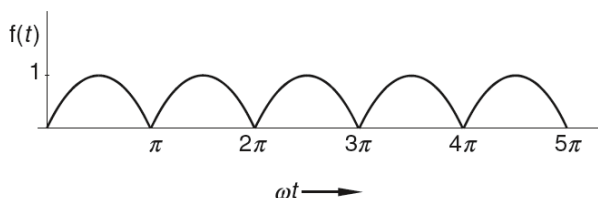
$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1 - e^{-s2\pi/\omega}} \frac{\omega (1 + e^{-s\pi/\omega})}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2) (1 + e^{-s\pi/\omega})}.$$

Contoh 6.6.5. Penyearah Gelombang Penuh: Carilah transformasi Laplace fungsi periodik (Gambar 6.10) yang definisi satu periodenya

$$f(t) = |\sin \omega t| \quad 0 < t < \frac{\pi}{\omega}.$$

Solusi 6.6.5. Dalam kasus ini periodenya adalah π/ω . Maka

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1 - e^{-s\pi/\omega}} \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin \omega t dt = \frac{\omega (1 + e^{-s\pi/\omega})}{(s^2 + \omega^2) (1 + e^{-s\pi/\omega})}.$$



Gambar 6.10: Penyearah gelombang penuh.

Hasil ini sangat sempurna untuk disederhanakan. Jika kita kalikan pembilang dan penyebutnya dengan $\exp(s\pi/2\omega)$

$$\mathfrak{L}[f] = \frac{\omega (e^{s\pi/(2\omega)} + e^{-s\pi/(2\omega)})}{(s^2 + \omega^2) (e^{s\pi/(2\omega)} - e^{-s\pi/(2\omega)})} = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)} \coth \frac{s\pi}{2\omega}.$$

6.6.5 Invers Transformasi Laplace Melibatkan Fungsi Periodik

Transformasi Laplace sebarang $F(s)$ baik yang memiliki faktor $(1 - e^{-sp})^{-1}$, atau dapat dituliskan dalam sebuah bentuk dengan sebuah faktor seperti pada contoh terakhir, mengindikasikan bahwa invers transformasinya merupakan sebuah fungsi periodik. Tetapi, periodenya bisa merupakan perkalian dari p . Hal ini diilustrasikan pada contoh berikut.

Contoh 6.6.6. Carilah invers transformasi Laplace berikut ini beserta periodenya

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(1 - e^{-s\pi})}.$$

Solusi 6.6.6.

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + 1)(1 - e^{-s\pi})} \right] \\ &= \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + 1)} (1 + e^{-s\pi} + e^{-2s\pi} + e^{-3s\pi} + \dots) \right] \\ &= \cos t + u(t - \pi) \cos(t - \pi) + u(t - 2\pi) \cos(t - 2\pi) \\ &\quad + u(t - 3\pi) \cos(t - 3\pi) + u(t - 4\pi) \cos(t - 4\pi) + \dots \\ &= \cos t - u(t - \pi) \cos t + u(t - 2\pi) \cos t - u(t - 3\pi) \cos t + \dots \\ &= [1 - u(t - \pi)] \cos t + [u(t - 2\pi) - u(t - 3\pi)] \cos t + \dots \end{aligned}$$

Sehingga $f(t)$ adalah fungsi periodik berperiode 2π , dengan definisi satu periodenya

$$f(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{jika } 0 < t < \pi \\ 0, & \text{jika } \pi < t < 2\pi \end{cases}.$$

6.6.6 Transformasi Laplace dan Fungsi Gamma

Transformasi Laplace t^n didefinisikan sebagai

$$\mathfrak{L}[t^n] = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt. \quad (6.102)$$

Jika kita mengganti variabel dan misalkan $st = x$, integralnya menjadi

$$\mathfrak{L}[t^n] = \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^n d\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx. \quad (6.103)$$

Integral terakhir ini dikenal sebagai fungsi Gamma dari $n+1$ yang dituliskan $\Gamma(n+1)$. Fungsi Gamma akan sering kita jumpai dalam aplikasi. Fungsi ini diberikan oleh

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \quad (6.104)$$

hal ini terdefinisi dengan baik sepanjang n tidak nol atau bilangan bulat negatif. Untuk $n = 1$,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [e^{-x}]_0^{\infty} e^{-x} = 1. \quad (6.105)$$

Dengan menggunakan integral parsial, kita bisa memperoleh

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = [-x^n e^{-x}]_0^{\infty} e^{-x} + n \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = n\Gamma(n). \quad (6.106)$$

Sehingga jika n bilangan bulat positif

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1) \cdots 1\Gamma(1) = n!, \quad (6.107)$$

dan menurut (6.103)

$$\mathfrak{L}[t^n] = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (6.108)$$

selaras dengan hasil yang sudah didapatkan sebelumnya. Karena $\Gamma(n)$ adalah fungsi yang ditabulasikan, sepanjang $n > -1$, $\mathfrak{L}[t^n]$ masih tetap bisa dihitung meskipun n bukan bilangan bulat. Sebagai contoh

$$\mathfrak{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}, \quad (6.109)$$

$$\mathfrak{L}\left[\sqrt{t}\right] = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{s^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{3/2}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}}, \quad (6.110)$$

di sini kita telah menggunakan $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

6.7 Ringkasan Operasi Transformasi Laplace

Sifat-sifat transformasi Laplace tidak sulit untuk dipahami. Tetapi, karena terdapat banyak sekali, maka tidak begitu mudah bagi kita untuk menentukan sifat mana yang akan kita gunakan dalam satu persoalan spesifik. Dalam Tabel 6.2 kita meringkas operasi-operasi ini. Dalam kolom terakhir kita memberikan contoh sederhana dan pada kolom pertama kita memberikan nama untuk mengkarakterisasi operasinya. Klasifikasi ini membantu dalam mengingat tiap operasi secara rinci.

Dalam Subbab 6.6.1, kita membicarakan invers transformasi $F(s)$ dalam bentuk pembagian dua buah polinomial. Jika $F(s)$ tidak dalam bentuk tersebut, kadang kita dapat menggunakan sifat transformasi Laplace untuk memperoleh inversnya.

Tabel 6.2: Ringkasan Operasi Transformasi Laplace

Nama	$h(t)$	$\mathcal{L}[h(t)]$	Contoh: Misalkan $f(t) = t$
Definisi	$f(t)$	$F(s)$	$\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} e^{-st} t \, dt = \frac{1}{s^2} = F(s)$
Perkalian t	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}F(s)$	$\mathcal{L}[t \cdot t] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$
Pembagian t	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(\zeta) \, d\zeta$	$\mathcal{L}\left[\frac{t}{t}\right] = \int_s^{\infty} \frac{1}{\zeta^2} \, d\zeta = \frac{1}{s}$
Turunan	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$\mathcal{L}\left[\frac{dt}{dt}\right] = s \frac{1}{s^2} - 0 = \frac{1}{s}$
Integral	$\int_0^t f(\tau) \, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	$\mathcal{L}\left[\int_0^t \tau \, d\tau\right] = \frac{1/s^2}{s} = \frac{1}{s^3}$
<i>Shifting</i> – s	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$\mathcal{L}[e^{at}t] = \frac{1}{(s-a)^2}$
<i>Shifting</i> – t	$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-sa}F(s)$	$\mathcal{L}[u(t-a)(t-a)] = e^{-sa} \frac{1}{s^2}$
<i>Scaling</i>	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$\mathcal{L}[at] = \frac{1}{a} \frac{1}{(s/a)^2} = a \frac{1}{s^2}$
Periode– p	$f(t)$ periodik	$\frac{\int_0^p e^{-st} f(t) \, dt}{1 - e^{-ps}}$	$\mathcal{L}[f] = \frac{1 - (1+ps)e^{-ps}}{s^2(1 - e^{-ps})}$
Konvolusi	$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) \, d\tau$	$F(s) \cdot G(s)$	Misal $g(t) = f(t)$, $G(s) = F(s)$ $\mathcal{L}\left[\int_0^t \tau(t-\tau) \, d\tau\right] = \frac{1}{s^2} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^4}$

Contoh 6.7.1. Carilah $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln \frac{s+a}{s-b}\right]$.

Solusi 6.7.1. Transformasinya tidak berbentuk pembagian dua buah polinomial, tetapi turunannya. Misalkan

$$\mathfrak{L}[f(t)] = \ln \frac{s+a}{s-b}, \quad f(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left[\ln \frac{s+a}{s-b} \right].$$

Karena

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[tf(t)] &= -\frac{d}{ds} \mathfrak{L}[f(t)] = -\frac{d}{ds} \ln \frac{s+a}{s-b} \\ &= -\frac{d}{ds} \ln(s+a) + \frac{d}{ds} \ln(s-b) = \frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-a}, \end{aligned}$$

dan

$$tf(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left[-\frac{d}{ds} \mathfrak{L}[f(t)] \right] = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-a} \right]$$

sehingga

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left[\ln \frac{s+a}{s-b} \right] &= f(t) = \frac{1}{t} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-a} \right] \\ &= \frac{1}{t} (e^{bt} - e^{-at}) \end{aligned}$$

Contoh 6.7.2. Carilah $\mathfrak{L}^{-1} \left[\ln \frac{s^2 - a^2}{s^2} \right]$.

Solusi 6.7.2.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left[\ln \frac{s^2 - a^2}{s^2} \right] &= \frac{1}{t} \mathfrak{L}^{-1} \left[-\frac{d}{ds} \ln \frac{s^2 - a^2}{s^2} \right] = -\frac{1}{t} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2s}{s^2 - a^2} - \frac{2s}{s^2} \right] \\ &= \frac{2}{t} (1 - \cosh at). \end{aligned}$$

Contoh 6.7.3. Carilah $\mathfrak{L}^{-1} \left[\ln \frac{s^2 + \omega^2}{s^2} \right]$.

Solusi 6.7.3.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left[\ln \frac{s^2 + \omega^2}{s^2} \right] &= \frac{1}{t} \mathfrak{L}^{-1} \left[-\frac{d}{ds} \ln \frac{s^2 + \omega^2}{s^2} \right] = -\frac{1}{t} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{2s}{s^2 + \omega^2} - \frac{2s}{s^2} \right] \\ &= \frac{2}{t} (1 - \cos \omega t). \end{aligned}$$

Contoh 6.7.4. Carilah $\mathfrak{L}^{-1} \left[\tan^{-1} \frac{1}{s} \right]$.

Solusi 6.7.4.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} \left[\tan^{-1} \frac{1}{s} \right] &= \frac{1}{t} \mathfrak{L}^{-1} \left[-\frac{d}{ds} \tan^{-1} \frac{1}{s} \right] = -\frac{1}{t} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{(1/s)^2 + 1} \frac{d}{ds} \frac{1}{s} \right] \\ &= \frac{1}{t} \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{1 + s^2} \right] = \frac{1}{t} \sin t \end{aligned}$$

6.8 Aplikasi Tambahan Transformasi Laplace

6.8.1 Menghitung Integral

Banyak integral dari 0 sampai ∞ dapat dihitung dengan metode transformasi Laplace.

Substitusi Langsung

Integral yang melibatkan e^{-at} dapat diperoleh dari transformasi Laplace dengan substitusi sederhana

$$\int_0^{\infty} e^{-at} f(t) dt = \left\{ \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right\}_{s=a} = \{\mathcal{L}[f(t)]\}_{s=a}. \quad (6.111)$$

Contoh 6.8.1. Hitunglah $\int_0^{\infty} e^{-3t} \sin t dt$

Solusi 6.8.1.

$$\int_0^{\infty} e^{-3t} \sin t dt = \{\mathcal{L}[\sin t]\}_{s=3} = \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\}_{s=3} = \frac{1}{10}.$$

Contoh 6.8.2. Hitunglah $\int_0^{\infty} e^{-2t} t \cos t dt$.

Solusi 6.8.2. Karena

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-2t} t \cos t dt &= \{\mathcal{L}[t \cos t]\}_{s=2}, \\ \{\mathcal{L}[t \cos t]\} &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\cos t] = -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}, \end{aligned}$$

maka

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} t \cos t dt = \left\{ \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} \right\}_{s=2} = \frac{3}{25}.$$

Dengan Integral Transformasinya

Dalam Subbab 6.6.2 kita telah menunjukkan

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \int_s^{\infty} F(s') ds',$$

dengan

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt, \quad F(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Jika kita memilih $s = 0$, kita peroleh rumus yang sama pentingnya

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} \mathfrak{L}[f(x)] ds. \quad (6.112)$$

Rumus ini dapat digunakan apabila integrasi di ruas kiri sulit untuk dilakukan.

Contoh 6.8.3. Hitunglah $\int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \right] dt$.

Solusi 6.8.3.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} \right] dt &= \int_0^{\infty} \mathfrak{L}[e^{-t} - e^{-3t}] ds = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right) ds \\ &= [\ln(s+1) - \ln(s+3)]_0^{\infty} = \left[\ln \frac{s+1}{s+3} \right]_0^{\infty} \\ &= \ln 1 - \ln \frac{1}{3} = \ln 3. \end{aligned}$$

Contoh 6.8.4. Hitunglah $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Solusi 6.8.4.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^{\infty} \mathfrak{L}[\sin t] ds = \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2+1} ds \\ &= [\tan^{-1} s]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (6.113)$$

Menggunakan Integral Ganda

Kita dapat menyelesaikan soal pada contoh terakhir dengan integral ganda. Kita mulai dengan

$$\mathfrak{L}[1] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad (6.114)$$

jika kita menamai ulang t sebagai x dan s sebagai t , kita peroleh

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}. \quad (6.115)$$

Jadi

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \sin t \left[\frac{1}{t} \right] dt = \int_0^{\infty} \sin t \left[\int_0^{\infty} e^{-tx} dx \right] dt. \quad (6.116)$$

Dengan menukar urutan integrasi, kita memiliki

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-tx} \sin t dt \right] dx. \quad (6.117)$$

Integral di dalam kurung adalah transformasi Laplace $\sin t$ dengan parameter s diganti x , sehingga

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\tan^{-1} x]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \quad (6.118)$$

Metode ini dapat diaplikasikan untuk kasus yang lebih rumit.

Contoh 6.8.5. Carilah $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

Solusi 6.8.5. Pertama kita perhatikan

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t),$$

kemudian menuliskan

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (1 - \cos 2t) \left[\frac{1}{t^2} \right] dt.$$

Dengan

$$\frac{1}{t^2} = \int_0^{\infty} e^{-tx} x dx,$$

kita mempunyai

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (1 - \cos 2t) \left[\int_0^{\infty} e^{-tx} x dx \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-tx} (1 - \cos 2t) dt \right] x dx. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-tx} (1 - \cos 2t) dt &= [\mathfrak{L}(1 - \cos 2t)]_{s=x} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 4} = \frac{4}{x(x^2 + 4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{4}{x(x^2 + 4)} \right] x dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2}{x^2 + 4} dx = \left[\tan^{-1} \frac{x}{2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Menggunakan Invers Transformasi

Jika integralnya sulit dikerjakan, pertama kita dapat melakukan transformasi Laplace kemudian mencari inversnya.

Contoh 6.8.6. Carilah $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx$.

Solusi 6.8.6. Untuk menggunakan transformasi Laplace dalam menghitung integral ini, kita mengganti $\cos x = \cos tx$ kemudian di akhir kita pilih $t = 1$. Misalkan

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2 + b^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[I(t)] &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + b^2} \mathfrak{L}[\cos tx] dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + b^2} \frac{s}{s^2 + x^2} dx \\ &= \frac{s}{s^2 - b^2} \int_0^\infty \left[\frac{1}{x^2 + b^2} - \frac{1}{s^2 + x^2} \right] dx \\ &= \frac{s}{s^2 - b^2} \left\{ \left[\frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{x}{b} \right]_0^\infty - \left[\frac{1}{s} \tan^{-1} \frac{x}{s} \right]_0^\infty \right\} \\ &= \frac{s}{s^2 - b^2} \left\{ \frac{\pi}{2b} - \frac{\pi}{2s} \right\} = \frac{\pi}{2b} \frac{1}{s + b}. \end{aligned}$$

$$I(t) = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{\pi}{2b} \frac{1}{s + b} \right] = \frac{\pi}{2b} e^{-bt}.$$

Maka

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = I(1) = \frac{\pi}{2b} e^{-b}.$$

6.8.2 Persamaan Diferensial dengan Koefisien Variabel

Jika $f(t)$ dalam rumus

$$\mathfrak{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds} \mathfrak{L}[f(t)]$$

diambil sebagai turunan $y(t)$ ke $-n$ maka

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[ty^{(n)}(t)] &= -\frac{d}{ds} \mathfrak{L}[y^{(n)}(t)] \\ &= -\frac{d}{ds} \{s^n \mathfrak{L}[y(t)] - s^{n-1}y(0) \cdots - y^{(n-1)}(0)\}. \end{aligned} \quad (6.119)$$

Persamaan ini dapat digunakan untuk mentransformasikan sebuah persamaan diferensial linier dengan koefisien variabel menjadi sebuah persamaan yang melibatkan transformasinya. Prosedur ini berguna jika persamaan baru mudah dipecahkan.

Contoh 6.8.7. Carilah solusi dari

$$ty''(t) - ty'(t) - y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

Solusi 6.8.7.

$$\mathfrak{L}[ty''(t)] = -\frac{d}{ds}\{s^2\mathfrak{L}[y(t)] - sy(0) - y'(0)\}.$$

Misalkan $\mathfrak{L}[y(t)] = F(s)$ dengan $y(0) = 0$, kita memiliki

$$\mathfrak{L}[ty''(t)] = -2sF(s) - s^2F'(s),$$

$$\mathfrak{L}[ty'(t)] = -F(s) - sF'(s).$$

Sehingga

$$\mathfrak{L}[ty''(t) - ty'(t) - y(t)] = -s(s-1)F'(s) - 2sF(s) = 0.$$

Mengikuti hal ini

$$\frac{dF(s)}{F(s)} = -2\frac{ds}{s-1},$$

$$\ln F(s) = \ln(s-1)^{-2} + \ln C$$

$$F(s) = \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{C}{(s-1)^2}\right] = C e^{tt}.$$

Karena

$$y'(t) = C e^{tt} + C e^t,$$

$$y'(0) = C = 2,$$

Maka

$$y(t) = 2e^{tt}.$$

Mudah dibuktikan bahwa ini adalah solusinya karena memenuhi persamaan diferensial dan kondisi awalnya.

Contoh 6.8.8. Fungsi Bessel Orde ke-Nol Carilah solusi dari

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Contoh 6.8.8. Dengan $\mathfrak{L}[y(t)] = F(s)$ dan $y(0) = 1, y'(0) = 0$

$$\mathfrak{L}[ty''(t) + y'(t) + ty(t)] = -\frac{d}{ds}\{s^2F(s) - s\} + sF(s) - 1 - \frac{d}{ds}F(s) = 0.$$

Dengan mengumpulkan suku-sukunya

$$(s^2 + 1)\frac{d}{ds}F(s) + sF(s) = 0,$$

atau

$$\frac{dF(s)}{F(s)} = -\frac{s ds}{s^2 + 1} = -\frac{1}{2} \frac{ds^2}{s^2 + 1}.$$

Mengikuti dari sini

$$\ln F(s) = -\frac{1}{2} \ln(s^2 + 1) + \ln C,$$

$$F(s) = \frac{C}{(s^2 + 1)^{1/2}}.$$

Untuk mencari invers transformasi Laplace ini, kita ekspansikan menjadi deret untuk kasus $s > 1$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{C}{s} \left[1 + \frac{1}{s^2} \right]^{-1/2} \\ &= \frac{C}{s} \left[1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} \frac{1}{s^4} \cdots + \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{s^{2n}} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

Dengan membalik/inversi suku per suku diperoleh

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2^n n!)^2}.$$

Karena $y(0) = 1$, maka $C = 1$. Dari sini deret dengan $C = 1$ dikenal sebagai fungsi Bessel orde ke-nol $J_0(t)$, yaitu

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2^n n!)^2},$$

yang akan kita bicarakan lebih detil dalam bab fungsi Bessel. Maka solusi persamaannya adalah

$$y(t) = J_0(t).$$

Lebih dari itu, kita mempunyai

$$\mathcal{L}[J_0(t)] = \frac{1}{(s^2 + 1)^{1/2}}.$$

Dengan sifat penskalaan transformasi Laplace, untuk $a > 0$ kita mempunyai

$$\mathcal{L}[J_0(at)] = \frac{1}{a} \frac{1}{[(s/a)^2 + 1]^{1/2}} = \frac{1}{(s^2 + a^2)^{1/2}}.$$

6.8.3 Persamaan Integral dan Integrodiferensial

Persamaan dengan fungsi yang tidak diketahui muncul di bawah integral disebut persamaan integral. Jika turunan juga ada pada persamaan tersebut, maka dinamakan persamaan integrodiferensial. Biasanya persamaan ini sulit dipecahkan. Tetapi jika bentuk integralnya adalah konvolusi, maka transformasi Laplace dapat digunakan untuk memecahkannya. Contoh berikut akan membuat prosedur ini jelas.

Contoh 6.8.9. Selesaikan persamaan integral

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

Solusi 6.8.9.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[y(t)] &= \mathfrak{L}[t] + \mathfrak{L}\left[\int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau\right] \\ &= \mathfrak{L}[t] + \mathfrak{L}[y(t)]\mathfrak{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2} + \mathfrak{L}[y(t)]\frac{1}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Kita selesaikan $\mathfrak{L}[y(t)]$

$$\left(1 - \frac{1}{s^2 + 1}\right) \mathfrak{L}[y(t)] = \frac{1}{s^2}.$$

Sehingga

$$\mathfrak{L}[y(t)] = \frac{s^2 + 1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

dan

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}\right] = t + \frac{1}{6}t^3.$$

Contoh 6.8.10. Carilah solusi dari

$$y'(t) - 3 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} y(\tau) d\tau = z(t), \quad y(0) = 4,$$

$$z(t) = \begin{cases} 4e^{-2t}, & 1 < t \\ 0, & 0 < t < 1 \end{cases}.$$

Solusi 6.8.10. Pertama perhatikan

$$\mathfrak{L}[z(t)] = \mathfrak{L}[4e^{-2t}u(t-1)] = \mathfrak{L}\left[4e^{-2}e^{-2(t-1)}u(t-1)\right] = 4e^{-2}\frac{1}{s+2}e^{-s},$$

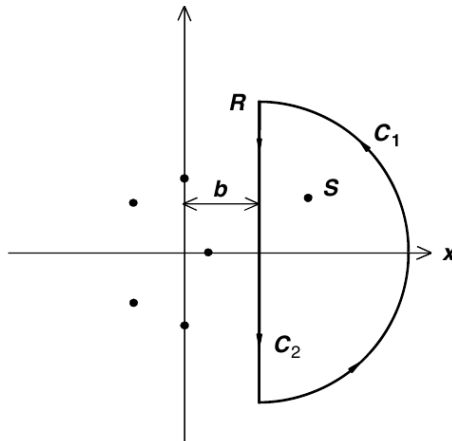
$$\mathfrak{L}\left[3 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} y(\tau) d\tau\right] = 3\frac{1}{s+2}\mathfrak{L}[y].$$

Dengan menggunakan transformasi Laplace pada dua ruas persamaan diperoleh

$$s\mathfrak{L}[y] - 4 - 3\frac{1}{s+2}\mathfrak{L}[y] = 4e^{-2}\frac{1}{s+2}e^{-s},$$

dengan mengumpulkan suku-sukunya

$$\frac{s^2 + 2s - 3}{s + 2}\mathfrak{L}[y] = 4 + 4e^{-2}\frac{1}{s + 2}e^{-s},$$



Gambar 6.11: Kontur pertama yang digunakan untuk memperoleh inversi kompleks transformasi Laplace.

atau

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] &= \frac{4(s+2) + 4e^{-2}e^{-s}}{s^2 + 2s - 3} \\ &= \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s+3} + e^{-2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+3} \right) e^{-s}.\end{aligned}$$

Sehingga

$$y(t) = 3e^t + e^{-3t} + e^{-2} \left(e^{(t-1)} - e^{-3(t-1)} \right) u(t-1).$$

6.9 Inversi dengan Integral Kontur

Seperti yang sudah kita lihat bahwa untuk bisa membalik sebuah transformasi $F(s)$ yang diberikan untuk mencari fungsi $f(t)$ adalah kunci untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan transformasi Laplace. Untuk pembaca yang familiar dengan integrasi kontur kompleks, kita memberikan dalam subbab ini teknik universal mencari invers transformasi Laplace. Penurunannya sangat imajinatif, tetapi hasilnya sangat sederhana.

Pertama marilah kita perluas transformasi Laplace dalam domain kompleks. Fungsi $F(z)$ sama dengan fungsi $F(s)$ hanya s diganti dengan z . Dalam bidang kompleks, $F(z)$ akan memiliki beberapa titik singular. Marilah kita pilih sebuah garis $x = b$ dalam bidang kompleks sehingga semua titik singular $F(z)$ berada di sisi kiri garis ini. Sehingga $F(z)$ analitik pada garis $x = b$ dan pada semua setengah bidang di sebelah kanan garis. Jika s titik sebarang pada setengah bidang ini, kita dapat memilih kontur setengah lingkaran $C = C_1 + C_2$, seperti Gambar 6.11, dan menggunakan rumus

integral Cauchy

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(z)}{z-s} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b+iR}^{b-iR} \frac{F(z)}{z-s} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{F(z)}{z-s} dz. \end{aligned} \quad (6.120)$$

Sekarang jika kita ijin kan R menuju tak hingga, (6.120) tetap berlaku, tetapi semua nilai z pada C_1 sangat besar. Karena $F(z) \rightarrow 0$ ketika $z \rightarrow \infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} \frac{F(z)}{z-s} dz = 0.$$

Dalam limit ini (6.120) menjadi

$$F(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b+i\infty}^{b-i\infty} \frac{F(z)}{z-s} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(z)}{s-z} dz.$$

Dalam langkah terakhir kita telah mengubah tanda integran dan menukar batas atas dan bawah integral.

Dengan mengambil invers transformasi Laplace, kita peroleh

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(z)}{s-z} dz \right].$$

Karena operator invers transformasi Laplace \mathfrak{L}^{-1} hanya untuk variabel s , kita dapat menuliskan

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z) \mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-z} \right] dz.$$

Karena

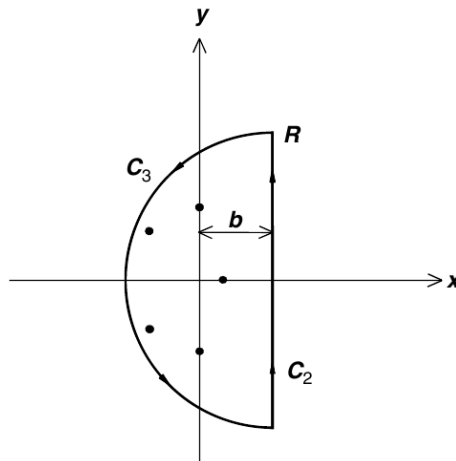
$$\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-z} \right] = e^{zt}$$

Kita memiliki

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z) e^{zt} dz. \quad (6.121)$$

Prosedur ini dikenal sebagai inversi Mellin. Integral ini dari $b-i\infty$ ke $b+i\infty$ sepanjang C_2 . Biasanya perhitungan integral ini diselesaikan dengan teorema residu. Untuk menggunakan teorema residu, kita harus memiliki kontur tertutup. Untuk menutup kontur, kita harus menambahkan garis balik dari $b+i\infty$ ke $b-i\infty$ sedemikian rupa sehingga nilai integralnya tidak berubah. Hal ini dapat dilakukan dengan kontur setengah lingkaran C_3 dalam setengah bidang di sebelah kiri seperti Gambar 6.12, karena

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_3} F(z) e^{zt} dz = 0. \quad (6.122)$$



Gambar 6.12: Kontur pertama yang digunakan untuk memperoleh inversi kompleks transformasi Laplace.

Hal ini dapat dipahami dari kenyataan bahwa dengan t positif, integran

$$F(z)e^{zt} = F(z)e^{xt+iyt}$$

nilainya menuju nol ketika z menuju tak hingga. Faktor e^{iyt} berosilasi dengan nilai maksimum 1. Untuk x agar mengubah b dari $-\infty$ seperti pada C_3 , faktor e^{xt} selalu lebih kecil dari e^{bt} . Sehingga $F(z)e^{zt}$ akan menuju nol sepanjang $F(z)$ juga menuju nol. Perhatikan bahwa hal ini tidak berlaku pada setengah bidang di sebelah kanan dengan x menuju positif tak hingga dan e^{zt} akan sangat besar. Maka dengan C_3 , kita memiliki

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(z)e^{zt} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{C_2} F(z)e^{zt} dz + \int_{C_3} F(z)e^{zt} dz \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z)e^{zt} dz, \end{aligned} \quad (6.123)$$

dengan $C = C_2 + C_3$ seperti Gambar 6.12 dengan $R \rightarrow \infty$. Kontur ini juga dinamakan kontur Bromwich. Karena b berada di sebelah kanan semua titik singular dari $F(z)$, kontur C melingkupi semua titik singular dari $e^{zt}F(z)$. Sehingga dengan teorema residu

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) e^{zt} dz \\ &= \sum \text{semua sisa dari } F(z) e^{zt}. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Contoh 6.9.1. Gunakan inversi integral kompleks untuk menghitung

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+a)^2 + b^2} \right].$$

Solusi 6.9.1. Karena

$$\frac{1}{(s+a)^2 + b^2} = \frac{1}{[s - (-a + ib)][s - (-a - ib)]},$$

residu dari

$$\frac{e^{zt}}{(z+a)^2 + b^2}$$

pada dua buah titik singular

$$\begin{aligned} r_1 &= \lim_{z \rightarrow -a+ib} [z - (-a + ib)] \frac{e^{zt}}{[z - (-a + ib)][z - (-a - ib)]} \\ &= \frac{e^{(-a+ib)t}}{2ib} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} r_2 &= \lim_{z \rightarrow -a-ib} [z - (-a - ib)] \frac{e^{zt}}{[z - (-a + ib)][z - (-a - ib)]} \\ &= \frac{e^{(-a-ib)t}}{-2ib}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+a)^2 + b^2} \right] &= \frac{e^{(-a+ib)t}}{2ib} + \frac{e^{(-a-ib)t}}{-2ib} \\ &= \frac{1}{b} e^{-at} \frac{1}{2i} (e^{ibt} - e^{-ibt}) \\ &= \frac{1}{b} e^{-at} \sin bt. \end{aligned}$$

Ini adalah hasil yang familiar. Contoh ini menunjukkan inversi integral kompleks merupakan cara lain untuk mencari invers transformasi Laplace. Dalam aplikasi yang lebih sulit, penggunaan inversi integral kompleks dan integral kontur bisa merupakan satu-satunya cara atau cara paling sederhana untuk mencari invers transformasi Laplace.

6.10 Latihan

1. Carilah transformasi Laplace tiap fungsi berikut dengan integral langsung

(a) $\frac{1}{2}t^2$, (b) e^{3t} , (c) $3\sin(3t)$.

Jawab. (a) $\frac{1}{s^3}$, (b) $\frac{1}{s-3}$, (c) $\frac{9}{s^2+9}$.

2. Carilah transformasi Laplace fungsi berikut dengan menggunakan operasi “Perkalian t ” pada Tabel 6.2.

(a) te^t , (b) $t \cos t$, (c) $t^2 \cos t$.

Jawab. (a) $\frac{1}{(s-1)^2}$, (b) $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$, (c) $\frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}$.

3. Carilah transformasi Laplace fungsi berikut dengan menggunakan operasi “Pembagian t ” pada Tabel 6.2.

(a) $\frac{1}{t}(e^{2t} - e^{-2t})$, (b) $\frac{2}{t}(1 - \cos(2t))$, (c) $\frac{1}{t} \sin(4t)$.

Jawab. (a) $\ln\left(\frac{s+2}{s-2}\right)$, (b) $\ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$, (c) $\frac{\pi}{2} \tan^{-1}\left(\frac{s}{4}\right)$.

4. Carilah transformasi Laplace fungsi berikut dengan menggunakan operasi “Shifting $-s$ ” pada Tabel 6.2.

(a) $e^{at} \sin 3t$, (b) $e^{-2t} t \sin at$, (c) $\sinh t \cos t$.

Jawab. (a) $\frac{3}{(s-a)^2+9}$, (b) $\frac{2a(s+2)}{[(s+2)^2+a^2]^2}$, (c) $\frac{s^2-2}{s^4+4}$.

5. Gunakan definisi transformasi Laplace untuk membuktikan

(a) $\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0)$;

(b) $\mathcal{L}[f''] = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0)$.

6. Gunakan hasil dari soal sebelumnya dan juga kenyataan bahwa $\frac{d^2}{dt^2} \cos at = -a^2 \cos at$ dan $\frac{d^2}{dt^2} \sin at = -a^2 \sin at$ untuk membuktikan

(a) $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$, (b) $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$.

7. Turunkan bagian (b) soal sebelumnya terhadap a dan buktikan bahwa

(a) $\mathcal{L}[t \cos at] = \frac{1}{s^2+a^2} - \frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}$.

Turunkan bagian (a) soal sebelumnya terhadap s dan buktikan bahwa

(b) $\mathcal{L}[-t \cos at] = \frac{1}{s^2+a^2} - \frac{2s^2}{(s^2+a^2)^2}$.

8. Gunakan hasil pada soal 6 dan 7 untuk membuktikan

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at)$,

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{1}{2}(t \cos at + \frac{1}{a} \sin at)$

9. Kerjakan soal 8 dengan teorema konvolusi.

Petunjuk: Anda mungkin memerlukan integral berikut

$$\int_0^t \sin a\tau \cos a\tau \, d\tau = \frac{1}{4a}(1 - \cos 2at);$$

$$\int_0^t \sin^2 a\tau \, d\tau = \frac{1}{4a}(2at - \sin 2at).$$

10. Jika $f(t) = t^n$, $g(t) = t^m$, $n > -1$, $m > -1$,

(a) Tunjukkan bahwa

$$\int_0^t \tau^n (t - \tau)^m d\tau = t^{n+m+1} \int_0^1 y^n (1 - y)^m dy.$$

(b) Dengan menggunakan teorema konvolusi, buktikan bahwa

$$\int_0^1 y^n (1 - y)^m dy = \frac{n!m!}{(n + m + 1)!}.$$

Petunjuk: (a) $\tau = yt$, (b) $\int_0^t \tau^n (t - \tau)^m d\tau$.

11. Carilah transformasi Laplace fungsi berikut dengan integral langsung

(a) $\sin(t - a)u(t - a)$,

(b) $f(t) = \begin{cases} \cos(t - \pi) & t > \pi \\ 0 & t < \pi \end{cases}$,

(c) $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 5 \\ 1 & 5 \leq t < 10 \\ 0 & 10 \leq t \end{cases}$.

Jawab. (a) $e^{-as} \frac{1}{s^2 + 1}$, (b) $e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + 1}$, (c) $\frac{1}{s}(e^{-5s} - e^{-10s})$.

12. Kerjakan soal sebelum ini dengan menggunakan operasi “*Shifting -t*” pada Tabel 6.2

13. Gunakan pecahan parsial untuk mencari invers transformasi Laplace ekspresi berikut (a) $\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{4}{s^2 - 4s} \right]$, (b) $\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right]$, (c) $\mathfrak{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s^2 + 1)} \right]$,

Jawab. (a) $e^{4t} - 1$, (b) $1 - \cos t$, (c) $t - \sin t$.

14. Kerjakan soal sebelumnya dengan menggunakan rumus

$$\mathfrak{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \mathfrak{L}[f(t)].$$

15. Gunakan ekspansi Heaviside untuk mengerjakan soal sebelumnya.

16. Gunakan transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial berikut

(a) $y'' + 2y' + y = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$,

(b) $y'' + y = \sin(3t)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Jawab. (a) $y(t) = 1 + (1 - t)e^{-t}$, (b) $y(t) = \frac{3}{8} \sin t - \frac{1}{8} \sin 3t$.

17. Gunakan transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan berikut

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 2y - 3z, \\ \frac{dz}{dt} &= -2y + z, \\ y(0) &= 8, \quad z(0) = 3.\end{aligned}$$

Jawab. $y(t) = 3e^{4t} + 5e^{-t}$, $z(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$.

18. Carilah solusi persamaan integrodiferensial

$$y'(t) - \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = 0, \quad y(0) = 1.$$

Jawab. $y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$.

19. Selesaikan persamaan berikut dengan kondisi awal pada $t = 0$, baik y dan turunannya sama dengan nol.

(a) $y'' + 2y' + y = A\delta(t - t_0)$,

(b) $y'''' - y = A\delta(t - t_0)$.

Jawab. (a) $y(t) = A(t - t_0)e^{-(t-t_0)}u(t - t_0)$,

(b) $y(t) = \frac{1}{2}A[\sinh(t - t_0) - \sin(t - t_0)]u(t - t_0)$.

20. Perhatikan hambatan R dan sebuah induktansi L dihubungkan seri dengan tegangan $V(t)$. Persamaan pembangkitan arusnya

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V(t).$$

Anggap $i(0) = 0$ dan $V(t)$ adalah tegangan impulsif pada $t = t_0$ yang diberikan oleh

$$V(t) = A\delta(t - t_0).$$

Carilah arus dengan menggunakan metode transformasi Laplace.

Jawab. $i(t) = \frac{A}{L}e^{-R(t-t_0)/L}u(t - t_0)$.

21. Osilator harmonik teredam mengikuti persamaan

$$mx'' + bx' + kx = f(t); \quad \text{dengan } x(0) = x'(0) = 0.$$

(a) Carilah solusi persamaan dengan konvolusi (Nyatakan $x(t)$ sebagai integral).

- (b) Jika $f(t) = P\delta(t - t_0)$, carilah solusinya dengan menghitung integral konvolusi.
- (c) Jika $b = 0$, dan $f(t) = F_0 \sin \omega_0 t$ dengan $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, selesaikan persamaan dengan transformasi Laplace.
- (d) Jika $b = 0$, dan $f(t) = F_0 u(t - t_0)$ dengan $u(t - t_0)$ fungsi tangga, selesaikan persamaannya.

Jawab. (a) $x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau$

dengan $\alpha = \frac{b}{2m}$, $\omega^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2$,

(b) $x(t) = \frac{P}{m\omega} e^{-\alpha(t-t_0)} \sin \omega(t-t_0) u(t-t_0)$,

(c) $x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t)$,

(c) $x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} [1 - \cos \omega_0(t-t_0)] u(t-t_0)$.

22. Gunakan inversi integral kompleks, carilah invers transformasi Laplace berikut.

(a) $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$, (b) $\frac{1}{(s+2)^2}$, (c) $\frac{1}{(s^2+9)(s^2+4)}$.

Jawab. (a) $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$, (b) $t e^{-2t}$, (c) $\frac{1}{30}(3 \sin 2t - 2 \sin 3t)$.