

**K.T. Tang**

**Metode Matematik  
untuk Teknik dan Sains  
3**

Analisis Fourier, Fungsi Khusus,  
Persamaan Diferensial Parsial dan Metode Variasi

diterjemahkan oleh:

Imamal Muttaqien

Jurusan Fisika

UIN SUNAN GUNUNG DJATI

BANDUNG

# Pengantar



# Daftar Isi

Pengantar	i
<b>I Analisis Fourier</b>	<b>1</b>
<b>1 Deret Fourier</b>	<b>3</b>
1.1 Deret Fourier untuk Fungsi Berperiode $2\pi$	3
1.1.1 Ortogonalitas Fungsi Trigonometrik	3
1.1.2 Koefisien Fourier	5
1.1.3 Ekspansi sebuah Fungsi dalam Deret Fourier	6
1.2 Konvergensi Deret Fourier	9
1.2.1 Kondisi Dirichlet	9
1.2.2 Deret Fourier dan Fungsi Delta	10
1.3 Deret Fourier Fungsi Berperiode Sebarang	13
1.3.1 Penggantian Interval	13
1.3.2 Deret Fourier untuk Fungsi Genap dan Ganjil	20
1.4 Deret Fourier Fungsi Nonperiodik pada Selang Terbatas	22
1.5 Deret Fourier Kompleks	28
1.6 Metode Lompatan	31
1.7 Sifat-sifat Deret Fourier	36
1.7.1 Teorema Parseval	36
1.7.2 Jumlah Pangkat Bolak-balik Bilangan Bulat	37
1.7.3 Integrasi Deret Fourier	40
1.7.4 Turunan Deret Fourier	41
1.8 Deret Fourier dan Persamaan Diferensial	43
1.8.1 Persamaan Diferensial dengan Syarat Batas	44
1.8.2 Osilator Periodik Teredam	47
1.9 Latihan	50

<b>2</b>	<b>Transformasi Fourier</b>	<b>57</b>
2.1	Integral Fourier sebagai sebuah Batas dari Deret Fourier . . . . .	57
2.1.1	Integral Fourier Cosinus dan Sinus . . . . .	61
2.1.2	Transformasi Fourier Cosinus dan Sinus . . . . .	63
2.2	Tabel Transformasi Fourier . . . . .	68
2.3	Transformasi Fourier . . . . .	68
2.4	Transformasi Fourier dan Fungsi Delta . . . . .	75
2.4.1	Ortogonalitas . . . . .	75
2.4.2	Transformasi Fourier Melibatkan Fungsi Delta . . . . .	76
2.4.3	Pasangan Transformasi Fourier Tiga Dimensi . . . . .	77
2.5	Beberapa Pasangan Transformasi Penting . . . . .	80
2.5.1	Fungsi Pulsa Persegi . . . . .	81
2.5.2	Fungsi Gaussian . . . . .	81
2.5.3	Fungsi Meluruh secara Eksponen . . . . .	82
2.6	Sifat-sifat Transformasi Fourier . . . . .	83
2.6.1	Sifat Simetri . . . . .	83
2.6.2	Linieritas, Pergeseran, Penskalaan . . . . .	85
2.6.3	Transformasi Turunan . . . . .	87
2.6.4	Transformasi Integral . . . . .	88
2.6.5	Teorema Parseval . . . . .	88
2.7	Konvolusi . . . . .	90
2.7.1	Operasi Matematik Konvolusi . . . . .	90
2.7.2	Teorema Konvolusi . . . . .	92
2.8	Transformasi Fourier dan Persamaan Diferensial . . . . .	95
2.9	Ketidakpastian Gelombang . . . . .	99
2.10	Latihan . . . . .	101
<b>II</b>	<b>Teori Sturm-Liouville dan Fungsi Khusus</b>	<b>105</b>
<b>3</b>	<b>Fungsi Ortogonal dan Persamaan Sturm-Liouville</b>	<b>107</b>
3.1	Fungsi sebagai Vektor dalam Ruang Vektor Dimensi Tak Hingga . . .	108

3.1.1	Ruang Vektor . . . . .	108
3.1.2	<i>Inner Product</i> dan Ortogonalitas . . . . .	110
3.1.3	Fungsi Ortogonal . . . . .	112
3.2	Deret Fourier Umum . . . . .	117
3.3	Operator Hermitian . . . . .	119
3.3.1	Operator Adjoint dan <i>Self-Adjoint</i> (Hermitian) . . . . .	119
3.3.2	Sifat-sifat Operator Hermitian . . . . .	122
3.4	Teori Sturm-Liouville . . . . .	126
3.4.1	Persamaan Sturm-Liouville . . . . .	126
3.4.2	Syarat Batas Persoalan Sturm-Liouville . . . . .	128
3.4.3	Persoalan Sturm-Liouville Reguler . . . . .	129
3.4.4	Persoalan Sturm-Liouville Periodik . . . . .	138
3.4.5	Persoalan Sturm-Liouville Singular . . . . .	139
3.5	Fungsi Green . . . . .	145
3.5.1	Fungsi Green dan Persamaan Diferensial Tak Homogen . . . . .	145
3.5.2	Fungsi Green dan Fungsi Delta . . . . .	147
3.6	Latihan . . . . .	154
<b>4</b>	<b>Fungsi Bessel dan Polinomial Legendre</b>	<b>161</b>
4.1	Metode Frobenius . . . . .	162
4.1.1	Solusi Deret Pangkat Persamaan Diferensial . . . . .	162
4.1.2	Klasifikasi Titik Singular . . . . .	164
4.1.3	Metode Frobenius . . . . .	165
4.2	Fungsi Bessel . . . . .	169
4.2.1	Fungsi Bessel $J_n(x)$ untuk Orde Bilangan Bulat . . . . .	170
4.2.2	Nilai Nol Fungsi Bessel . . . . .	172
4.2.3	Fungsi Gamma . . . . .	173
4.2.4	Fungsi Bessel Orde Pecahan . . . . .	175
4.2.5	Fungsi Bessel Orde Bilangan Negatif . . . . .	177
4.2.6	Fungsi Neumann dan Fungsi Hankel . . . . .	177

4.3	Sifat-sifat Fungsi Bessel . . . . .	180
4.3.1	Hubungan Rekursi . . . . .	180
4.3.2	Fungsi Pembangkit untuk Fungsi Bessel . . . . .	183
4.3.3	Representasi Integral . . . . .	184
4.4	Fungsi Bessel dan Persamaan Sturm-Liouville . . . . .	185
4.4.1	Syarat Batas Persamaan Bessel . . . . .	185
4.4.2	Ortogonalitas Fungsi Bessel . . . . .	187
4.4.3	Normalisasi Fungsi Bessel . . . . .	187
4.5	Fungsi Bessel Jenis Lain . . . . .	189
4.5.1	Fungsi Bessel Termodifikasi . . . . .	189
4.5.2	Fungsi Bessel Sferis . . . . .	190
4.6	Fungsi Legendre . . . . .	194
4.6.1	Solusi Deret Persamaan Legendre . . . . .	194
4.6.2	Polinomial Legendre . . . . .	198
4.6.3	Fungsi Legendre Jenis Kedua . . . . .	200
4.7	Sifat-sifat Polinomial Legendre . . . . .	202
4.7.1	Rumus Rodrigues . . . . .	202
4.7.2	Fungsi Pembangkit Polinomial Legendre . . . . .	204
4.7.3	Hubungan Rekursi . . . . .	206
4.7.4	Ortogonalitas dan Normalisasi Polinomial Legendre . . . . .	209
4.8	Fungsi Legendre Terasosiasi dan Fungsi Harmonik Bola . . . . .	210
4.8.1	Polinomial Legendre Terasosiasi . . . . .	210
4.8.2	Ortogonalitas dan Normalisasi Polinomial Legendre Terasosiasi . . . . .	212
4.8.3	Fungsi Harmonik Bola . . . . .	215
4.9	Latihan . . . . .	216
<b>III</b>	<b>Persamaan Diferensial Parsial</b>	<b>225</b>
<b>5</b>	<b>Persamaan Diferensial Parsial dalam Koordinat Cartesien</b>	<b>227</b>
5.1	Persamaan Gelombang Satu Dimensi . . . . .	228

5.1.1	Persamaan untuk Getaran Dawai . . . . .	228
5.1.2	Separasi Variabel . . . . .	230
5.1.3	Gelombang Berdiri . . . . .	236
5.1.4	Gelombang Berjalan . . . . .	240
5.1.5	Persamaan Gelombang Tak Homogen . . . . .	246
5.1.6	Solusi D'Alembert Persamaan Gelombang . . . . .	250
5.2	Persamaan Gelombang Dua Dimensi . . . . .	259
5.2.1	Persamaan Pembangkit Getaran Membran . . . . .	259
5.2.2	Getaran Membran Persegi . . . . .	261
5.3	Persamaan Gelombang Tiga Dimensi . . . . .	266
5.3.1	Gelombang Bidang . . . . .	267
5.3.2	Gelombang Partikel dalam Kotak . . . . .	269
5.4	Persamaan Konduksi Panas . . . . .	270
5.5	Persamaan Difusi Satu Dimensi . . . . .	273
5.5.1	Distribusi Suhu dengan Nilai Tertentu pada Batas . . . . .	273
5.5.2	Persoalan Melibatkan Batas Tersekat . . . . .	277
5.5.3	Pertukaran Panas pada Batas . . . . .	279
5.6	Persamaan Difusi Dua Dimensi . . . . .	282
5.7	Persamaan Laplace . . . . .	285
5.7.1	Persamaan Laplace Dua Dimensi . . . . .	285
5.7.2	Persamaan Laplace Tiga Dimensi . . . . .	287
5.8	Persamaan Helmholtz . . . . .	289
5.9	Latihan . . . . .	290
<b>6</b>	<b>Persamaan Diferensial Parsial dengan Batas Lengkung</b>	<b>299</b>
6.1	Laplacian . . . . .	300
6.2	Persamaan Laplace Dua Dimensi . . . . .	302
6.2.1	Rumus Integral Poisson . . . . .	310
6.3	Persamaan Helmholtz Dua-Dimensi dalam Koordinat Polar . . . . .	313
6.3.1	Persamaan Gelombang Dua-Dimensi dalam Koordinat Polar . . . . .	314



6.3.2	Persamaan Difusi Dua-Dimensi dalam Koordinat Polar . . . . .	319
6.3.3	Persamaan Laplace dalam Koordinat Silinder . . . . .	323
6.3.4	Persamaan Helmholtz dalam Koordinat Silinder . . . . .	328
6.4	Laplacian Tiga-Dimensi dalam Koordinat Bola . . . . .	331
6.4.1	Persamaan Laplace dalam Koordinat Bola . . . . .	331
6.4.2	Persamaan Helmholtz dalam Koordinat Bola . . . . .	342
6.4.3	Persamaan Gelombang dalam Koordinat Bola . . . . .	343
6.5	Persamaan Poisson . . . . .	346
6.5.1	Persamaan Poisson dan Fungsi Green . . . . .	348
6.5.2	Fungsi Green dengan Syarat Batas . . . . .	351
6.6	Latihan . . . . .	355
<b>IV</b>	<b>Metode Variasi</b>	<b>361</b>
<b>7</b>	<b>Kalkulus Variasi</b>	<b>363</b>
7.1	Persamaan Euler-Lagrange . . . . .	364
7.1.1	Nilai Stasioner Fungsional . . . . .	364
7.1.2	Teorema Fundamental Kalkulus Variasi . . . . .	366
7.1.3	Notasi Variasi . . . . .	368
7.1.4	Kasus Khusus . . . . .	369
7.2	Variasi dengan Kendala . . . . .	372
7.3	Solusi Persoalan Terkenal . . . . .	375
7.3.1	Persoalan Brachistochrone . . . . .	375
7.3.2	Persoalan Isoperimetrik . . . . .	379
7.3.3	Catenary . . . . .	381
7.3.4	Putaran Permukaan Minimal . . . . .	386
7.3.5	Prinsip Fermat . . . . .	390
7.4	Beberapa Perluasan . . . . .	393
7.4.1	Fungsional dengan Turunan Lebih Tinggi . . . . .	393
7.4.2	Kebergantungan Beberapa Variabel . . . . .	394

---

7.4.3	Beberapa Variabel Bebas . . . . .	396
7.5	Persoalan Sturm-Liouville dan Prinsip Variasi . . . . .	399
7.5.1	Formulasi . . . . .	399
7.5.2	Perhitungan Nilai Eigen dan Fungsi Eigen . . . . .	400
7.6	Metode Rayleigh-Ritz untuk Persamaan Diferensial . . . . .	406
7.6.1	Persamaan Laplace . . . . .	406
7.6.2	Persamaan Poisson . . . . .	410
7.6.3	Persamaan Helmholtz . . . . .	412
7.7	Prinsip Hamilton . . . . .	415
7.8	Latihan . . . . .	420

**I**

# **Analisis Fourier**



# 1

## Deret Fourier

Deret Fourier merupakan salah satu alat matematik yang sangat penting dan berguna, yang ditemukan oleh seorang matematikawan sekaligus fisikawan berkebangsaan Perancis, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830). Analisis Fourier ini bisa ditemui hampir di semua bidang ilmu fisika (*physical sciences*).

Pada tahun 1822, Fourier yang saat itu mempelajari aliran panas membuat suatu pernyataan bahwa tiap fungsi  $f(x)$  dengan periode  $2\pi$  dapat dinyatakan dengan deret trigonometrik tak hingga dalam bentuk

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1.1)$$

Kita tahu bahwa, dengan sedikit batasan pada fungsi, hal ini adalah kasus yang kita tinjau. Deret tak hingga dengan bentuk ini dinamakan sebagai deret Fourier. Deret ini pada awalnya digunakan untuk solusi persamaan diferensial parsial dengan syarat batas maupun kondisi awal. Selain tetap sebagai metode yang ampuh untuk persoalan seperti itu, kegunaannya bukan hanya untuk menyelesaikan konduksi panas. Deret Fourier sekarang merupakan alat yang penting dalam analisis semua jenis gelombang, dari mulai pemrosesan sinyal sampai dengan fisika kuantum.

### 1.1 Deret Fourier untuk Fungsi Berperiode $2\pi$

#### 1.1.1 Ortogonalitas Fungsi Trigonometrik

Dalam membicarakan deret Fourier, kita memerlukan integral berikut. Jika  $m$  dan  $n$  adalah bilangan bulat maka

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx = 0, \quad (1.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx = 0, \quad (1.3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0, \quad (1.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases}, \quad (1.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}. \quad (1.6)$$

Dua buah integral pertama trivial, baik dengan pengintegralan langsung maupun dengan menandai bahwa tiap fungsi trigonometrik yang diintegrasikan satu periode akan bernilai nol karena suku positif akan menghilangkan suku negatif. Integral sisanya dihitung dengan rumus perkalian trigonometri kemudian diintegrasikan. Cara paling mudah adalah menggunakan bentuk kompleks

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \, dx.$$

Kita dapat melihat hasilnya tanpa benar-benar mengalikannya. Semua suku hasil perkalian memiliki bentuk  $e^{ikx}$ , dengan  $k$  sebuah bilangan bulat. Karena

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \, dx = \frac{1}{ik} [e^{ikx}]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

sehingga semua perkalian dalam integral hasilnya nol. Dengan cara yang sama

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \, dx$$

secara identik nilainya nol kecuali  $n = m$ , dalam kasus ini

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos mx \, dx &= \frac{e^{i2mx} + 2 + e^{-i2mx}}{4} \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 + \cos 2mx] \, dx = \begin{cases} \pi, & m \neq 0, \\ 2\pi, & m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama kita dapat membuktikan jika  $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0$$

dan jika  $n = m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos 2mx] \, dx = \pi.$$

Ini tidak lain adalah bukti (1.2)-(1.6).

Secara umum, jika dua buah anggota himpunan  $\psi_n, \psi_m$  dari himpunan fungsi  $\{\psi_i\}$  memenuhi syarat

$$\int_a^b \psi_n(x)\psi_m(x) dx = 0 \quad \text{jika } n \neq m, \quad (1.7)$$

maka  $\psi_n$  dan  $\psi_m$  disebut ortogonal, dan (1.7) dinamakan sebagai syarat ortogonalitas dalam selang antara  $a$  dan  $b$ . Himpunan  $\{\psi_i\}$  disebut himpunan ortogonal pada selang yang sama.

Sehingga jika himpunan fungsi trigonometrik adalah

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots,$$

maka ini merupakan himpunan ortogonal pada selang  $-\pi$  sampai  $\pi$ .

### 1.1.2 Koefisien Fourier

Jika  $f(x)$  sebuah fungsi periodik berperiode  $2\pi$ , misalnya

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

dan dinyatakan dengan deret Fourier dalam bentuk (1.1), koefisien  $a_n$  dan  $b_n$  dapat dicari dengan cara berikut.

Kalikan kedua ruas (1.1) dengan  $\cos mx$ , dengan  $m$  bilangan bulat positif

$$f(x) \cos mx = \frac{1}{2}a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx).$$

Deret ini dapat diintegrasikan suku per suku

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx. \end{aligned}$$

Dari integral yang sudah kita bicarakan, semua suku yang berhubungan dengan  $b_n$  hilang dan yang berhubungan dengan  $a_n$  juga akan hilang kecuali untuk  $n = m$ , suku tersebut diberikan oleh

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \begin{cases} \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi, & m = 0 \\ a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = a_m\pi, & m \neq 0 \end{cases}.$$

Hubungan ini mengijinkan kita untuk menghitung koefisien  $a_m$  sebarang yang diinginkan termasuk  $a_0$  ketika fungsi  $f(x)$  diketahui.

Koefisien  $b_m$  juga dapat dicari dengan cara yang sama. Ekspansi tersebut dikalikan dengan  $\sin mx$  dan diintegrasikan suku per suku. Hubungan ortogonalitas memberikan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = b_m \pi.$$

Karena  $m$  dapat berupa bilangan bulat sebarang, dari sini diperoleh  $a_m$  (termasuk  $a_0$ ) dan  $b_n$  diberikan oleh:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad (1.8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (1.9)$$

Koefisien ini dikenal sebagai rumus Euler untuk koefisien Fourier, atau sederhananya koefisien Fourier.

Esensinya, deret Fourier mendekomposisi fungsi periodik menjadi gelombang cosinus dan sinus. Dari prosedur, kita dapat mengamati:

- Suku pertama  $a_0/2$  merepresentasikan nilai rata-rata  $f(x)$  pada periode  $2\pi$ .
- Suku  $a_n \cos nx$  merepresentasikan gelombang cosinus dengan amplitudo  $a_n$ . Dalam satu periode  $2\pi$ , terdapat gelombang cosinus lengkap sebanyak  $n$ .
- Suku  $b_n \sin nx$  merepresentasikan gelombang sinus dengan amplitudo  $b_n$ . Dalam satu periode  $2\pi$ , terdapat gelombang sinus lengkap sebanyak  $n$ .
- Secara umum  $a_n$  dan  $b_n$  diharapkan turun ketika  $n$  naik.

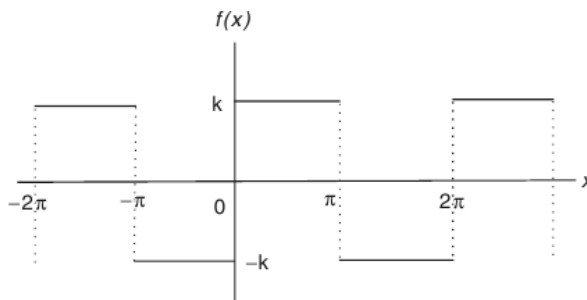
### 1.1.3 Ekspansi sebuah Fungsi dalam Deret Fourier

Sebelum kita membicarakan validitas deret Fourier, marilah kita menggunakan contoh berikut untuk menunjukkan kemungkinan merepresentasikan fungsi periodik berperiode  $2\pi$  dengan deret Fourier, dengan mengambil suku secukupnya.

Anggap kita ingin mengekspansikan fungsi gelombang persegi seperti pada Gambar 1.1, menjadi deret Fourier Fungsi ini merupakan fungsi periodik berperiode  $2\pi$ , yang dapat didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$





Gambar 1.1: Fungsi gelombang persegi.

Untuk mencari koefisien deret Fourier dari fungsi ini

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

selalu menjadi sebuah ide yang bagus untuk menghitung  $a_0$  secara terpisah karena diberikan oleh integral yang sederhana. Dalam kasus ini

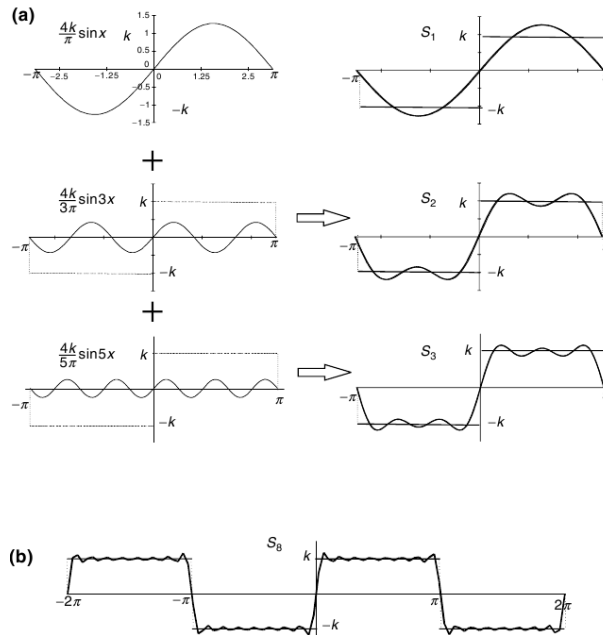
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

dapat dilihat tanpa integrasi, karena luas di bawah kurva  $f(x)$  antara  $-\pi$  sampai  $\pi$  adalah nol. Koefisien yang lain, diberikan oleh (1.8) dan (1.9). Untuk menghitung integral ini, kita harus memisahkan masing-masing menjadi dua buah integral karena  $f(x)$  didefinisikan berbeda dalam dua interval yaitu  $(-\pi, 0)$  dan  $(0, \pi)$ . Dari (1.8)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} k \cos nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ -k \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[ k \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dari (1.9)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} k \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left[ k \frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[ -k \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \right\} = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos nx) \\ &= \frac{2k}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4k}{n\pi}, & \text{jika } n \text{ ganjil,} \\ 0, & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases} \end{aligned}$$



Gambar 1.2: Konvergensi dari ekspansi deret Fourier. (a) Tiga buah jumlah parsial pertama pada kolom kanan, masing-masing sukunya ada di kiri. (b) Jumlah delapan suku pertama deret Fourier dari fungsi tersebut.

Dengan koefisien ini, deret Fouriernya menjadi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4k}{\pi} \sum_{n \text{ ganjil}} \frac{1}{n} \sin nx \\ &= \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Kita juga dapat menuliskannya sebagai

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x.$$

Untuk menguji konvergensinya, marilah kita mendefinisikan jumlah parsial sebagai

$$S_N = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x.$$

Dengan kata lain,  $S_N$  adalah jumlah  $N$  suku pertama dari deret Fourier.  $S_1$  adalah suku pertama  $(4k/\pi) \sin x$ ,  $S_2$  adalah jumlah dua buah suku pertama  $(4k/\pi)(\sin x + (1/3) \sin 3x)$  dan lain sebagainya.

Dalam Gambar 1.2.(a) tiga buah jumlah parsial pertama bisa dilihat di kolom kanan, masing-masing suku terdapat pada kolom kiri. Terlihat jelas bahwa  $S_N$  mendekati

$f(x)$  ketika  $N$  membesar meskipun kontribusi masing-masing suku semakin kecil ketika  $n$  membesar. Dalam Gambar 1.2.(b) terlihat hasil dari  $S_8$ . Dengan delapan buah suku, jumlah parsial sudah mirip dengan fungsi gelombang persegi. Kita melihat pada titik diskontinu,  $x = -\pi, x = 0$  dan  $x = \pi$ , semua jumlah parsial memiliki nilai nol, yang merupakan nilai rata-rata fungsi dari  $-k$  ke  $k$ . Perhatikan juga  $x$  mendekati diskontinuitas  $f(x)$  dari kedua sisi, nilai  $S_N(x)$  cenderung melebihi nilai  $f(x)$ , dalam kasus ini  $-k$  dan  $k$ . Ketika  $N$  naik, kelebihan nilai (sekitar 9% dari diskontinuitas) didorong semakin mendekati titik diskontinuitas, dan tidak akan hilang meskipun  $N$  menuju tak hingga. Perilaku deret Fourier dekat pada titik diskontinu ini dikenal sebagai fenomena Gibbs.

## 1.2 Konvergensi Deret Fourier

### 1.2.1 Kondisi Dirichlet

Kondisi agar  $f(x)$  memenuhi (1.1) dinyatakan dengan teorema berikut.

**Teorema 1.2.1.** *Jika sebuah fungsi periodik  $f(x)$  berperiode  $2\pi$  terikat dan kontinu dan memiliki jumlah titik maksimum dan minimum berhingga pada tiap periode, maka deret trigonometrik*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

konvergen pada  $f(x)$  dengan  $f(x)$  kontinu, dan deret ini konvergen pada rata-rata limit kiri dan kanan dari  $f(x)$  pada titik diskontinu.

Bukti dari teorema ini bisa dilihat pada G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Dover, New York, 1976.

Sepanjang  $f(t)$  periodik, pemilihan batas integrasi simetrik  $(-\pi, \pi)$  tidaklah penting. Selang  $2\pi$  lain seperti  $(x_0, x_0 + 2\pi)$  juga akan memberikan hasil yang sama.

Kondisi konvergensi ini pertama kali dibuktikan oleh matematikawan berkebangsaan Jerman P.G. Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), sehingga dikenal sebagai kondisi Dirichlet. Kondisi ini hanya memaksa sedikit batasan pada fungsi. Selanjutnya hal ini hanyalah kondisi (syarat) cukup. Kita juga tahu beberapa fungsi yang tidak memenuhi kondisi ini dapat direpresentasikan dalam deret Fourier. Kondisi minimum yang diperlukan untuk konvergensinya tidak diketahui. Dalam kasus sebarang, kita dapat mengasumsikan bahwa setiap fungsi yang kita pelajari dapat direpresentasikan dalam deret Fourier.

### 1.2.2 Deret Fourier dan Fungsi Delta

Dibandingkan membuktikan teorema konvergensi, kita akan menggunakan fungsi delta untuk mendemonstrasikan deret Fourier

$$S_{\infty}(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergen pada  $f(x)$ .

Dengan  $a_n$  dan  $b_n$  diberikan pada (1.8) dan (1.9),  $S_{\infty}(x)$  dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} S_{\infty}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x') dx' + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \cos nx' dx' \right) \cos nx \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \sin nx' dx' \right) \sin nx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx' \cos nx + \sin nx' \sin nx) \right] dx' \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x') \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x' - x) \right] dx'. \end{aligned}$$

Jika deret cosinus

$$D(x' - x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x' - x)$$

berperilaku seperti fungsi delta  $\delta(x' - x)$ , maka  $S_{\infty}(x) = f(x)$  karena

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x') \delta(x' - x) dx' = f(x) \quad \text{untuk} \quad -\pi < x < \pi.$$

Ingat bahwa fungsi delta  $\delta(x' - x)$

$$\delta(x' - x) = \begin{cases} 0, & x' \neq x \\ \infty, & x' = x \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta(x' - x) dx' = 1 \quad \text{untuk} \quad -\pi < x < \pi.$$

Sekarang kita akan membuktikan bahwa  $D(x' - x)$  memiliki sifat-sifat ini. Pertama untuk meyakinkan konvergensi, kita menuliskan deret cosinus sebagai

$$\begin{aligned} D(x' - x) &= \lim_{\gamma \rightarrow 1^-} D_{\gamma}(x' - x), \\ D_{\gamma}(x' - x) &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \cos n(x' - x) \right], \end{aligned}$$

dengan limit  $\gamma \rightarrow 1^-$  berarti  $\gamma$  mendekati 1 dari bawah, yang berarti  $\gamma$  mendekati satu, tetapi selalu lebih kecil dari 1. Untuk menjumlahkan deret ini, akan lebih menguntungkan untuk melihat  $D_\gamma(x' - x)$  sebagai bagian riil deret kompleks

$$D_\gamma(x' - x) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n e^{in(x'-x)} \right) \right].$$

Karena

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \gamma e^{i(x'-x)}} &= 1 + \gamma e^{i(x'-x)} + \gamma^2 e^{i2(x'-x)} + \dots \\ \frac{\gamma e^{i(x'-x)}}{1 - \gamma e^{i(x'-x)}} &= \gamma e^{i(x'-x)} + \gamma^2 e^{i2(x'-x)} + \gamma^3 e^{i3(x'-x)} + \dots, \end{aligned}$$

jadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n e^{in(x'-x)} &= \frac{1}{2} + \frac{\gamma e^{i(x'-x)}}{1 - \gamma e^{i(x'-x)}} \\ &= \frac{1 + \gamma e^{i(x'-x)}}{2(1 - \gamma e^{i(x'-x)})} = \frac{1 + \gamma e^{i(x'-x)}}{2(1 - \gamma e^{i(x'-x)})} \frac{1 - \gamma e^{i(x'-x)}}{1 - \gamma e^{i(x'-x)}} \\ &= \frac{1 - \gamma^2 + \gamma e^{i(x'-x)} - \gamma e^{-i(x'-x)}}{2[1 - \gamma(e^{i(x'-x)} + e^{-i(x'-x)}) + \gamma^2]} = \frac{1 - \gamma^2 + i2\gamma \sin(x' - x)}{2[1 - 2\gamma \cos(x' - x) + \gamma^2]} \end{aligned}$$

maka dengan demikian

$$\begin{aligned} D_\gamma(x' - x) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1 - \gamma^2 + i2\gamma \sin(x' - x)}{2\pi [1 - 2\gamma \cos(x' - x) + \gamma^2]} \right] \\ &= \frac{1 - \gamma^2}{2\pi [1 - 2\gamma \cos(x' - x) + \gamma^2]}. \end{aligned}$$

Jelas bahwa, jika  $x' \neq x$

$$D(x' - x) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{1 - \gamma^2}{2\pi [1 - 2\gamma \cos(x' - x) + \gamma^2]} = 0.$$

Jika  $x' = x$ , maka  $\cos(x' - x) = 1$ , dan

$$\begin{aligned} \frac{1 - \gamma^2}{2\pi [1 - 2\gamma \cos(x' - x) + \gamma^2]} &= \frac{1 - \gamma^2}{2\pi [1 - 2\gamma + \gamma^2]} \\ &= \frac{(1 - \gamma)(1 + \gamma)}{2\pi [1 - \gamma]^2} = \frac{1 + \gamma}{2\pi(1 - \gamma)}. \end{aligned}$$

Dari sini

$$D(x' - x) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{1 + \gamma}{2\pi(1 - \gamma)} \rightarrow \infty, \quad x' = x.$$

Lebih dari itu

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_\gamma(x' - x) dx' = \frac{1 - \gamma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx'}{(1 + \gamma^2) - 2\gamma \cos(x' - x)}.$$

Dalam teori residu

$$\oint \frac{d\theta}{a - b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b.$$

dengan substitusi  $x' - x = \theta$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx'}{(1 + \gamma^2) - 2\gamma \cos(x' - x)} = \oint \frac{d\theta}{(1 + \gamma^2) - 2\gamma \cos \theta}.$$

Sepanjang  $\gamma$  tidak tepat 1,  $1 + \gamma^2 > 2\gamma$ , maka

$$\oint \frac{d\theta}{(1 + \gamma^2) - 2\gamma \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{(1 + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2}} = \frac{2\pi}{1 - \gamma^2}.$$

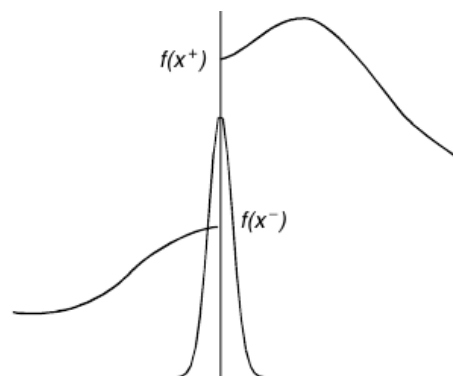
sehingga

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_{\gamma}(x' - x) dx' = \frac{1 - \gamma^2}{2\pi} \frac{2\pi}{1 - \gamma^2} = 1.$$

Hal ini adalah pembuktian kita bahwa  $D(x' - x)$  berperilaku seperti fungsi delta  $\delta(x' - x)$ . Sehingga jika  $f(x)$  kontinu maka deret Fourier konvergen pada  $f(x)$

$$S_{\infty}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x') D(x' - x) dx' = f(x).$$

Anggap bahwa  $f(x)$  diskontinu pada beberapa titik  $x$ , sehingga  $f(x^+)$  dan  $f(x^-)$  adalah nilai limit ketika kita mendekati dari kanan dan kiri. Sehingga dalam menghitung integral terakhir, separuh  $D(x' - x)$  dikalikan dengan  $f(x^+)$  dan separuhnya dengan  $f(x^-)$ , sebagaimana gambar berikut



Sehingga persamaan terakhir menjadi

$$S_{\infty}(x) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)].$$

Maka pada titik-titik  $f(x)$  kontinu, deret Fourier memberikan nilai  $f(x)$  dan pada titik-titik diskontinu deret Fourier memberikan nilai rata-rata limit kanan dan kiri dari  $f(x)$ .

## 1.3 Deret Fourier Fungsi Berperiode Sebarang

### 1.3.1 Penggantian Interval

Sejauh ini perhatian kita terbatas pada fungsi dengan periode  $2\pi$ . Batasan ini dapat dengan mudah kita rubah. Jika  $f(t)$  periodik berperiode  $2L$ , kita dapat melakukan perubahan variabel

$$t = \frac{L}{\pi}x$$

dan misalkan

$$f(x) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) \equiv F(x).$$

Dengan definisi ini

$$f(t + 2L) = f\left(\frac{L}{\pi}x + 2L\right) = f\left(\frac{L}{\pi}[x + 2\pi]\right) = F(x + 2\pi).$$

Karena  $f(t)$  fungsi periodik berperiode  $2L$

$$f(t + 2L) = f(t)$$

dari sini

$$F(x + 2\pi) = F(x).$$

Sehingga  $F(x)$  periodik berperiode  $2\pi$ .

Kita dapat mengekspansikan  $F(x)$  menjadi deret Fourier dan mentransformasikan kembali menjadi fungsi  $t$

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1.11)$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx.$$

Karena  $x = \frac{\pi}{L}t$ , dan  $F(x) = f(t)$  maka (1.11) dapat dituliskan

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L}t + b_n \sin \frac{n\pi}{L}t \right), \quad (1.12)$$

dan koefisiennya juga dapat kita nyatakan dalam integral terhadap  $t$ . Dengan mengubah variabel integrasi dari  $x$  menjadi  $t$  dan  $dx = \frac{\pi}{L} dt$ , kita mempunyai

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \left( \frac{n\pi}{L}t \right) dt, \quad (1.13)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \left( \frac{n\pi}{L}t \right) dt. \quad (1.14)$$

### Metode Kronecker

Dalam praktek, kita sering menjumpai  $f(t)$  memiliki bentuk  $t^k$ ,  $\sin kt$ ,  $\cos kt$  atau  $e^{kt}$  untuk beberapa nilai bilangan bulat  $k$ . Sehingga kita harus mengintegrasikan jenis

$$\int t^k \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \int \sin kt \cos \frac{n\pi t}{L} dt.$$

Integral ini dapat dihitung dengan integral parsial yang berulang. Pendekatan sistematis berikut memudahkan pekerjaan kita dalam menghitung secara detail. Perhatikan integral berikut

$$\int f(t)g(t) dt$$

dan misalkan

$$g(t) dt = dG(t), \quad \text{maka} \quad G(t) = \int g(t) dt.$$

Dengan integral parsial

$$\int f(t)g(t) dt = f(t)G(t) - \int f'(t)G(t) dt.$$

Jika kita lanjutkan prosesnya

$$G_1(t) = \int G(t) dt, \quad G_2(t) = \int G_1(t) dt, \dots, G_n(t) = \int G_{n-1}(t) dt,$$

kita mempunyai

$$\int f(t)g(t) dt = f(t)G(t) - f'(t)G_1(t) + \int f''(t)G_1(t) dt \quad (1.15)$$

$$= f(t)G(t) - f'(t)G_1(t) + f''(t)G_2(t) - f'''(t)G_3(t) + \dots \quad (1.16)$$

Prosedur ini dikenal sebagai metode Kronecker.

Sekarang jika  $f(t) = t^k$  maka

$$f'(t) = kt^{k-1}, \dots, f^k(t) = k!, \quad f^{k+1}(t) = 0,$$

ekspresi di atas akan berhenti. Selanjutnya jika  $g(t) = \cos \frac{n\pi t}{L}$ , maka

$$G(t) = \int \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \left(\frac{L}{n\pi}\right) \sin \frac{n\pi t}{L}$$

$$G_1(t) = \left(\frac{L}{n\pi}\right) \int \sin \frac{n\pi t}{L} dt = -\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \cos \frac{n\pi t}{L}$$

$$G_2(t) = -\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 \sin \frac{n\pi t}{L}, \quad G_3(t) = \left(\frac{L}{n\pi}\right)^4 \cos \frac{n\pi t}{L}, \dots$$



Dengan cara yang sama, jika  $g(t) = \sin \frac{n\pi t}{L}$ , maka

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \sin \frac{n\pi t}{L} dt = -\left(\frac{L}{n\pi}\right) \cos \frac{n\pi t}{L}, \\ G_1(t) &= -\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi t}{L}, \\ G_2(t) &= \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 \cos \frac{n\pi t}{L}, \quad G_3(t) = \left(\frac{L}{n\pi}\right)^4 \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned} \int_a^b t^k \cos \frac{n\pi t}{L} dt &= \left[ \frac{L}{n\pi} t^k \sin \frac{n\pi t}{L} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 k t^{k-1} \cos \frac{n\pi t}{L} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 k(k-1) t^{k-2} \sin \frac{n\pi t}{L} + \dots \right]_a^b \end{aligned} \quad (1.17)$$

dan

$$\begin{aligned} \int_a^b t^k \sin \frac{n\pi t}{L} dt &= \left[ -\frac{L}{n\pi} t^k \cos \frac{n\pi t}{L} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 k t^{k-1} \sin \frac{n\pi t}{L} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 k(k-1) t^{k-2} \cos \frac{n\pi t}{L} + \dots \right]_a^b. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Jika  $f(t) = \sin kt$ , maka

$$f'(t) = k \cos kt, \quad f''(t) = -k^2 \sin kt.$$

kita dapat menggunakan (1.15) untuk menuliskan

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin kt \cos \frac{n\pi}{L} t dt &= \left[ \frac{L}{n\pi} \sin kt \sin \frac{n\pi t}{L} + k \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \cos kt \cos \frac{n\pi t}{L} \right]_a^b \\ &\quad + k^2 \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \int_a^b \sin kt \cos \frac{n\pi}{L} t dt. \end{aligned}$$

Dengan mengkombinasikan suku terakhir dengan ruas kiri

$$\begin{aligned} &\left[ 1 - k^2 \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \right] \int_a^b \sin kt \cos \frac{n\pi}{L} t dt \\ &= \left[ \frac{L}{n\pi} \sin kt \sin \frac{n\pi t}{L} + k \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \cos kt \cos \frac{n\pi t}{L} \right]_a^b \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} &\int_a^b \sin kt \cos \frac{n\pi}{L} t dt \\ &= \frac{(n\pi)^2}{(n\pi)^2 - (kL)^2} \left[ \frac{L}{n\pi} \sin kt \sin \frac{n\pi t}{L} + k \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \cos kt \cos \frac{n\pi t}{L} \right]_a^b. \end{aligned}$$

Jelas integral seperti

$$\int_a^b \sin kt \sin \frac{n\pi}{L} t dt, \quad \int_a^b \cos kt \cos \frac{n\pi}{L} t dt, \quad \int_a^b \cos kt \sin \frac{n\pi}{L} t dt$$

$$\int_a^b e^{kt} \cos \frac{n\pi}{L} t dt, \quad \int_a^b e^{kt} \sin \frac{n\pi}{L} t dt$$

bisa diintegrasikan dengan cara yang sama.

---

**Contoh 1.3.1.** Carilah deret Fourier fungsi  $f(t)$  berikut

$$f(t) = t \text{ untuk } -L < t \leq L, \quad \text{dan} \quad f(t + 2L) = f(t).$$

**Solusi 1.3.1.**

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L t dt = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L t \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{L} \left[ \frac{L}{n\pi} t \sin \frac{n\pi t}{L} + \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi t}{L} \right]_{-L}^L = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L t \sin \frac{n\pi t}{L} dt$$

$$= \frac{1}{L} \left[ -\frac{L}{n\pi} t \cos \frac{n\pi t}{L} + \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi t}{L} \right]_{-L}^L = -\frac{2L}{n\pi} \cos n\pi.$$

Maka

$$f(t) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \cos n\pi \sin \frac{n\pi t}{L} = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi t}{L}$$

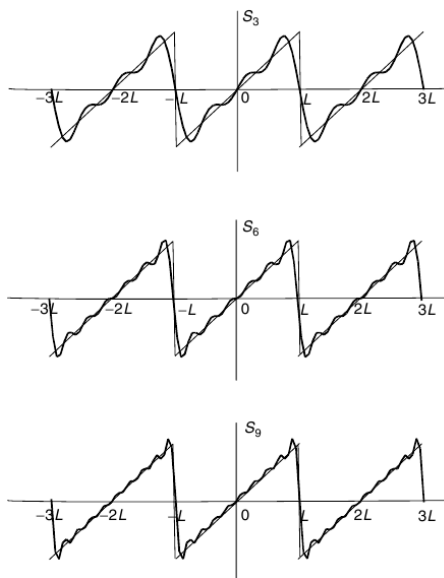
$$= \frac{2L}{\pi} \left( \sin \frac{\pi t}{L} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi t}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{L} - \dots \right). \quad (1.19)$$

Konvergensinya dapat dilihat pada Gambar 1.3 dengan  $S_N$  adalah jumlah parsial yang didefinisikan sebagai

$$S_N = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi t}{L}$$

Perhatikan bahwa akurasi meningkat seiring banyaknya suku yang dilibatkan. Dengan tiga buah suku,  $S_3$  sudah menyerupai fungsi. Kecuali untuk fenomena Gibbs, aproksimasi yang baik diperoleh untuk  $S_9$ .

---



Gambar 1.3: Konvergensi deret Fourier sebuah fungsi periodik yang definisi satu periodenya  $f(t) = t$ ,  $-L < t < L$ .  $N$  suku pertama aproksimasinya ditunjukkan sebagai  $S_N$ .

**Contoh 1.3.2.** Carilah deret Fourier fungsi  $f(t)$  berikut

$$f(t) = t^2 \text{ untuk } -L < t \leq L, \quad \text{dan} \quad f(t + 2L) = f(t)$$

**Solusi 1.3.2.** Koefisien Fouriernya diberikan oleh

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L t^2 dt = \frac{1}{L} \frac{1}{3} [L^3 - (-L)^3] = \frac{2}{3} L^2$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L t^2 \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n \neq 0 \\ &= \frac{1}{L} \left[ \frac{L}{n\pi} t^2 \sin \frac{n\pi t}{L} + \left( \frac{L}{n\pi} \right)^2 2t \cos \frac{n\pi t}{L} - \left( \frac{L}{n\pi} \right)^3 2 \sin \frac{n\pi t}{L} \right]_{-L}^L \\ &= \frac{2L}{(n\pi)^2} [L \cos n\pi + L \cos(-n\pi)] = \frac{4L^2}{n^2\pi^2} (-1)^n, \end{aligned}$$

dan

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L t^2 \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0.$$

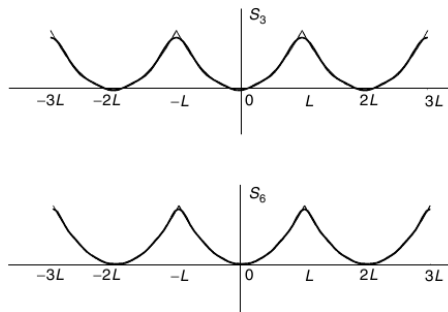
Sehingga ekspansi Fouriernya

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L} \\ &= \frac{L^2}{3} - \frac{4L^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi}{L}t - \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{L}t + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi}{L}t + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Dengan jumlah parsial yang didefinisikan sebagai

$$S_N = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{L},$$

kita membandingkan  $S_3$ ,  $S_6$  dengan  $f(t)$  pada Gambar 1.4.



Gambar 1.4: Konvergensi deret Fourier sebuah fungsi periodik yang definisi satu periodenya  $f(t) = t^2$ ,  $-L < t < L$ . Jumlah parsial  $S_3$  sudah merupakan aproksimasi yang baik.

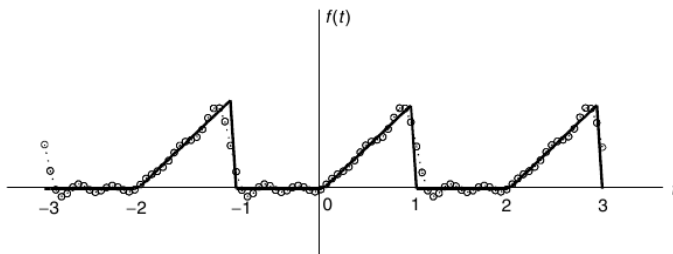
Jelas terlihat bahwa  $S_3$  sudah merupakan aproksimasi yang sangat baik. Perbedaan antara  $S_6$  dan  $f(x)$  sulit untuk dicari. Deret Fourier ini lebih cepat konvergen dibandingkan dengan contoh sebelumnya. Perbedaannya adalah  $f(t)$  dalam soal ini kontinu bukan hanya pada satu periode tetapi juga pada selang yang lebih lebar, sedangkan  $f(t)$  pada contoh sebelumnya diskontinu pada selang yang diperlebar.

**Contoh 1.3.3.** Carilah deret Fourier fungsi periodik yang definisinya dalam satu periode

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 < t < 0 \\ t, & 0 < t < 1 \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t) \quad (1.21)$$

**Solusi 1.3.3.** Perodesitas  $2L$  fungsi ini adalah 2, sehingga  $L = 1$ , dan deret Fouriernya diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)]$$



Gambar 1.5: Fungsi periodik (1.21) ditunjukkan bersama dengan jumlah parsial  $S_5$  dari deret Fourier. Fungsinya ditunjukkan dengan garis penuh dan  $S_5$  sebagai garis lingkaran kecil.

dengan

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(t) \cos(n\pi t) dt = \int_0^1 t \cos(n\pi t) dt,$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(t) \sin(n\pi t) dt = \int_0^1 t \sin(n\pi t) dt.$$

Dengan menggunakan (1.17) dan (1.18) kita mempunyai

$$a_n = \left[ \frac{1}{n\pi} t \sin n\pi t + \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi t \right]_0^1 = \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi - \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = \left[ -\frac{1}{n\pi} t \cos n\pi t + \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \sin n\pi t \right]_0^1 = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi = -\frac{(-1)^n}{n\pi}.$$

Maka deret Fourier untuk fungsi ini adalah  $f(t) = S_\infty$ , dengan

$$S_N = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^N \left[ \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} \cos n\pi t - \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin n\pi t \right].$$

Pada Gambar 1.5 fungsi ini diaproksimasi dengan  $S_5$  yang diberikan oleh

$$S_5 = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos \pi t - \frac{2}{9\pi^2} \cos 3\pi t - \frac{2}{25\pi^2} \cos 5\pi t$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sin \pi t - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t + \frac{1}{3\pi} \sin 3\pi t - \frac{1}{4\pi} \sin 4\pi t + \frac{1}{5\pi} \sin 5\pi t.$$

Konvergensi deret ini tidak begitu cepat, tetapi jelas dengan jumlah suku yang cukup, deret Fourier memberikan representasi akurat dari fungsi ini.

### 1.3.2 Deret Fourier untuk Fungsi Genap dan Ganjil

Jika  $f(t)$  merupakan fungsi genap yakni

$$f(-t) = f(t),$$

sehingga deret Fouriernya hanya mengandung suku cosinus saja. Hal ini bisa kita lihat sebagai berikut. Koefisien  $b_n$  dapat dituliskan sebagai

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(s) \sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt. \quad (1.22)$$

Jika kita mengubah variabel dan memisalkan  $s = -t$ , integral pertama pada ruas kanan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(s) \sin\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(-t) \sin\left(-\frac{n\pi}{L}t\right) d(-t) \\ &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \end{aligned}$$

karena  $\sin(-x) = -\sin(x)$  dan  $f(-x) = f(x)$ . Tetapi

$$\frac{1}{L} \int_L^0 f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt = -\frac{1}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt,$$

yang merupakan negatif dari integral kedua ruas kanan dari (1.22). Sehingga  $b_n = 0$  untuk semua  $n$ .

Dengan cara yang sama dan  $\cos(-x) = \cos(x)$ , kita memperoleh:

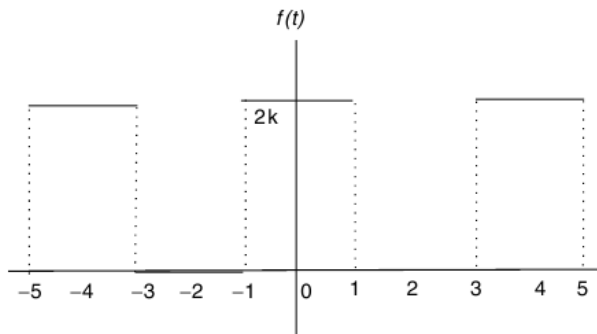
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(s) \cos\left(\frac{n\pi}{L}s\right) ds + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt \\ &= \frac{1}{L} \int_L^0 f(-t) \cos\left(-\frac{n\pi}{L}t\right) d(-t) + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt \\ &= -\frac{1}{L} \int_L^0 f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt + \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Maka

$$f(t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(t') dt' + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L f(t') \cos\left(\frac{n\pi}{L}t'\right) dt' \right] \cos \frac{n\pi}{L}t. \quad (1.24)$$

Dengan cara yang sama, jika  $f(t)$  fungsi ganjil

$$f(-t) = -f(t),$$



Gambar 1.6: Fungsi gelombang persegi genap.

maka

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L f(t') \sin\left(\frac{n\pi}{L} t'\right) dt' \right] \sin \frac{n\pi}{L} t. \quad (1.25)$$

Dalam contoh sebelumnya, fungsi periodik pada Gambar 1.3 adalah fungsi ganjil, maka ekspansi Fouriernya adalah deret sinus. Pada Gambar 1.4 fungsinya adalah fungsi genap, sehingga ekspansinya adalah deret cosinus. Pada Gambar 1.5, fungsinya tidak memiliki simetri, sehingga ekspansinya mengandung suku sinus dan cosinus.

**Contoh 1.3.4.** Carilah deret Fourier fungsi yang ditunjukkan pada Gambar 1.6.

**Solusi 1.3.4.** Fungsi pada Gambar 1.6 dapat dinyatakan sebagai

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{jika } -2 < t < -1 \\ 2k, & \text{jika } -1 < t < 1 \\ 0, & \text{jika } 1 < t < 2 \end{cases}, \quad f(t) = f(t+4).$$

Periode fungsi  $2L$  sama dengan 4 sehingga  $L = 2$ . Selanjutnya fungsinya adalah fungsi genap, maka deret Fouriernya adalah deret cosinus, semua koefisien untuk suku sinus nilainya nol

$$b_n = 0.$$

Koefisien untuk deret cosinus diberikan oleh

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 2k dt = 2k,$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \int_0^1 2k \cos \frac{n\pi t}{2} dt = \frac{4k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Maka deret Fourier  $f(t)$  adalah

$$f(t) = k + \frac{4k}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{2} t - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} t + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} t - \dots \right) \quad (1.26)$$

Sekarang kita bandingkan Gambar 1.6 dengan Gambar 1.1. Gambar 1.6 merepresentasikan fungsi genap yang ekspansi Fouriernya adalah deret cosinus, sedangkan pada Gambar 1.1 adalah fungsi ganjil yang ekspansi Fouriernya adalah deret sinus. Jelas keduanya memiliki hubungan. Dua buah gambar tersebut dapat kita buat bersinggungan jika (a) kita menggeser sumbu- $y$  pada Gambar 1.6 satu satuan ke kiri (dari  $t = 0$  ke  $t = -1$ ), (b) kita mengganti variabel sehingga periodisitas berubah dari 4 menjadi  $2\pi$ , (c) geser Gambar 1.6 ke bawah sebesar  $k$ .

Perubahan deret Fouriernya karena operasi tersebut adalah sebagai berikut. Pertama, misalkan  $t' = t + 1$ , sehingga  $t = t' - 1$  pada (1.26)

$$f(t) = k + \frac{4k}{\pi} \left( \cos \frac{\pi}{2}(t' - 1) - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2}(t' - 1) + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2}(t' - 1) - \dots \right).$$

Karena

$$\cos \frac{n\pi}{2}(t' - 1) = \cos \left( \frac{n\pi}{2}t' - \frac{n\pi}{2} \right) = \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{2}t', & n = 1, 5, 9, \dots \\ -\sin \frac{n\pi}{2}t', & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases},$$

$f(t)$  jika dinyatakan dalam  $t'$  menjadi

$$f(t) = k + \frac{4\pi}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2}t' + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2}t' + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2}t' - \dots \right) = g(t').$$

Ekspresi ini kita nyatakan dengan  $g(t')$ , dan masih memiliki periode sebesar 4. Sekarang kita rubah variabel  $t' = 2x/\pi$  sehingga fungsi yang dinyatakan dalam  $x$  memiliki periode  $2\pi$

$$\begin{aligned} g(t') &= k + \frac{4k}{\pi} \left( \sin \frac{\pi}{2} \left( \frac{2x}{\pi} \right) + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} \left( \frac{2x}{\pi} \right) + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} \left( \frac{2x}{\pi} \right) - \dots \right) \\ &= k + \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \dots \right) = h(x). \end{aligned}$$

Terakhir kita geser ke bawah sebesar  $k$ , kita memiliki

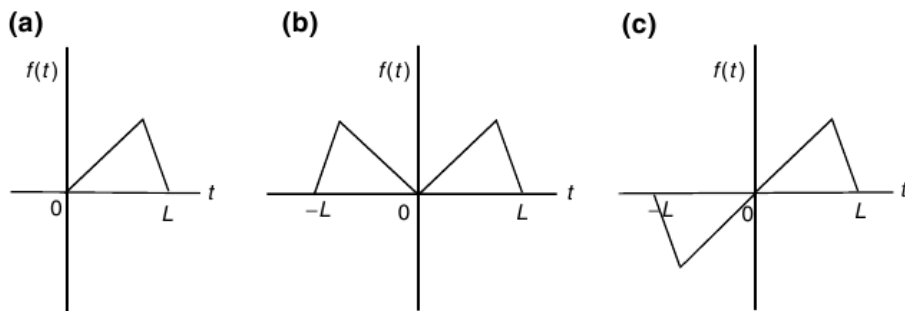
$$h(x) - k = \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \dots \right).$$

Ini tidak lain adalah deret Fouriere (1.10) untuk fungsi ganjil pada Gambar 1.1.

## 1.4 Deret Fourier Fungsi Nonperiodik pada Selang Terbatas

Sejauh ini kita hanya memperhatikan fungsi periodik dari  $-\infty$  ke  $\infty$ . Dalam aplikasi fisis, kita biasanya hanya tertarik pada nilai fungsi untuk selang yang terbatas.





Gambar 1.7: Ekstensi sebuah fungsi. (a) Fungsi hanya terdefinisi antara 0 dengan  $L$ . (b) Ekstensi simetrik memberikan fungsi genap berperiode  $2L$ . (c) Ekstensi antisimetrik memberikan fungsi ganjil berperiode  $2L$

Dalam selang tersebut fungsi mungkin tidak periodik. Sebagai contoh, yaitu ketika kita mempelajari tali dengan kedua ujung tetap. Tidak terdapat syarat periodik pada kasus fisis yang ditinjau, tetapi juga tidak terdapat hal menarik untuk fungsi di luar panjang tali. Analisis Fourier tetap dapat digunakan untuk persoalan ini, karena kita masih bisa meneruskan fungsinya di luar selang yang diinginkan untuk membuatnya periodik.

Anggap bahwa selang yang kita tinjau dari sebuah fungsi  $f(t)$  yang ditunjukkan pada Gambar 1.7(a) adalah dari 0 sampai  $L$ . Kita dapat memperluas selangnya dari  $-L$  sampai 0 dengan cara yang kita sukai. Jika kita memperluasnya secara simetrik seperti pada bagian (b), sehingga pada semua garis riil, kondisi periodik  $f(t + 2L) = f(t)$ , sebuah deret Fourier hanya dengan suku cosinus dapat ditemukan untuk fungsi genap. Perluasan seperti bagian (c) memungkinkan kita mencari deret Fourier untuk fungsi ganjil. Dua buah deret tersebut akan konvergen pada  $f(t)$  dalam interval 0 sampai  $L$ . Ekspansi (perluasan) deret seperti ini dinamakan ekspansi setengah selang (*half-range expansion*). Untuk lebih jelasnya kita lihat contoh berikut.

**Contoh 1.4.1.** Fungsi  $f(t)$  hanya terdefinisi pada  $0 < t < 1$  yaitu

$$f(t) = t - t^2.$$

Carilah ekspansi Fourier cosinus dan sinus setengah selang.

**Solusi 1.4.1.** (a). Misalkan interval  $(0,1)$  adalah setengah periode fungsi yang diperluas simetrik, sehingga  $2L = 2$  atau  $L = 1$ . Ekspansi setengah selang fungsi genap ini adalah deret cosinus

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos n\pi t$$

dengan

$$a_0 = 2 \int_0^1 (t - t^2) dt = \frac{1}{3},$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (t - t^2) \cos n\pi t dt, \quad n \neq 0.$$

Dengan metode Kronecker, kita mempunyai

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \cos n\pi t dt &= \left[ \frac{1}{n\pi} t \sin n\pi t + \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi t \right]_0^1 \\ &= \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 (\cos n\pi - 1) \\ \int_0^1 t^2 \cos n\pi t dt &= \left[ \frac{1}{n\pi} t^2 \sin \pi t + \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 2t \cos n\pi t - \left( \frac{1}{n\pi} \right)^3 2 \sin n\pi t \right]_0^1 \\ &= 2 \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 \cos n\pi, \end{aligned}$$

sehingga

$$a_n = 2 \int_0^1 (t - t^2) \cos n\pi t dt = -2 \left( \frac{1}{n\pi} \right)^2 (\cos n\pi + 1).$$

Dengan koefisien-koefisien ini, ekspansi Fourier setengah selang cosinus diberikan oleh  $S_{\infty}^{\text{genap}}$ , dengan

$$\begin{aligned} S_N^{\text{genap}} &= \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{(\cos n\pi + 1)}{n^2} \cos n\pi t \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left( \cos 2\pi t + \frac{1}{4} \cos 4\pi t + \frac{1}{9} \cos 6\pi t + \dots \right). \end{aligned}$$

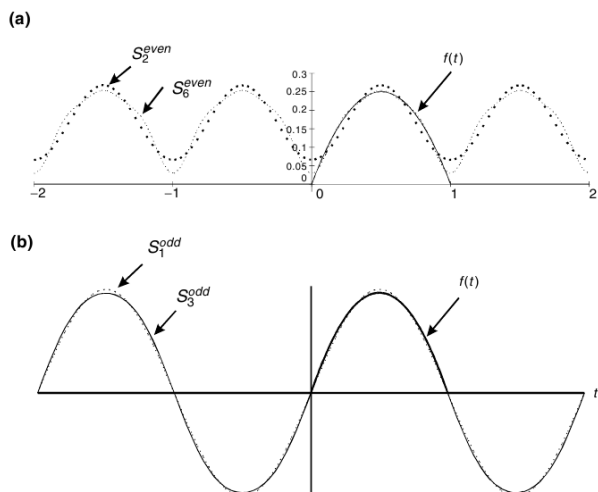
Konvergensi deret ini ditunjukkan pada Gambar 1.8.(a).

(b) Ekspansi setengah selang sinus diberikan dengan membentuk ekstensi antisimetri. Karena fungsi ganjil, ekspansi Fouriernya adalah deret sinus

$$f(t) = \sum_{n=1} b_n \sin \pi t,$$

dengan

$$b_n = 2 \int_0^1 (t - t^2) \sin n\pi t dt.$$



Gambar 1.8: Konvergensi deret setengah-selang. Fungsi  $f(t) = t - t^2$  diberikan antara 0 dan 1. Baik cosinus maupun sinus sama-sama konvergen pada fungsi dalam selang ini. Tetapi di luar ini, deret cosinus konvergen pada fungsi genap seperti pada (a) dan deret sinus konvergen pada fungsi ganjil seperti pada (b).  $S_2^{genap}$  dan  $S_6^{genap}$  adalah aproksimasi dua dan empat suku dari deret cosinus.  $S_1^{ganjil}$  dan  $S_3^{ganjil}$  adalah aproksimasi satu dan dua suku dari deret sinus.

Sekarang

$$\int_0^1 t \sin n\pi t \, dt = \left[ -\frac{1}{n\pi} t \cos n\pi t + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi t \right]_0^1 = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi$$

$$\int_0^1 t^2 \sin n\pi t \, dt = \left[ -\frac{1}{n\pi} t^2 \cos n\pi t + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 2t \sin n\pi t + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^3 2 \cos n\pi t \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi + 2 \left(\frac{1}{n\pi}\right)^3 \cos n\pi - 2 \left(\frac{1}{n\pi}\right)^3,$$

sehingga

$$b_n = 2 \int_0^1 (t - t^2) \sin n\pi t \, dt = 4 \left(\frac{1}{n\pi}\right)^3 (1 - \cos n\pi).$$

Maka ekspansi setengah selang sinusnya diberikan oleh  $S_\infty^{ganjil}$ , dengan

$$S_\infty^{ganjil} = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^N \frac{(1 - \cos n\pi)}{n^3} \sin n\pi t$$

$$= \frac{8}{\pi^3} \left( \sin \pi t + \frac{1}{27} \sin 3\pi t + \frac{1}{125} \sin 5\pi t + \dots \right)$$

Konvergensi deret ini ditunjukkan pada Gambar 1.8.(b).

Terlihat bahwa baik deret cosinus maupun sinus konvergen pada  $t - t^2$  antara 0 dan 1. Di luar ini, deret cosinus konvergen pada fungsi genap dan deret sinus konvergen

pada fungsi ganjil. Laju konvergensinya juga berbeda. Untuk deret sinus, hanya dengan satu suku  $S_1^{\text{ganjil}}$  sudah sangat dekat dengan  $f(t)$ . Hanya dengan dua suku  $S_3^{\text{ganjil}}$  (tiga suku jika kita memasukkan  $n = 2$  yang nilainya nol), sudah tidak bisa dibedakan dengan  $f(t)$  pada selang yang kita perhatikan. Konvergensi deret cosinus dalam (a) jauh lebih lambat. Meskipun aproksimasi  $S_6^{\text{genap}}$  lebih dekat dengan  $f(t)$  dibandingkan dengan aproksimasi dua suku  $S_2^{\text{genap}}$ , perbedaan antara  $S_\infty^{\text{genap}}$  dengan  $f(t)$  masih terlihat dengan jelas.

Hal ini adalah kasus umum jika kita membuat ekstensi halus, hasilnya adalah lebih akurat untuk jumlah suku tertentu.

**Contoh 1.4.2.** Sebuah fungsi  $f(t)$  terdefinisi hanya pada selang  $0 \leq t \leq 2$  yaitu  $f(t) = t$ . Carilah deret Fourier yang hanya memiliki suku sinus untuk fungsi ini.

**Solusi 1.4.2.** Kita dapat memperoleh ekspansi setengah-selang sinus dengan memperluas fungsi asimetrik. Fungsi seperti itu dideskripsikan sebagai

$$f(t) = t \quad \text{untuk} \quad -2 < t \leq 2, \quad \text{dan} \quad f(t+4) = f(t).$$

Deret Fourier untuk fungsi ini diberikan oleh (1.19) dengan  $L = 2$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi t}{2}.$$

Tetapi deret ini tidak konvergen pada 2, nilai fungsi dari  $t = 2$ , melainkan konvergen pada 0, nilai rata-rata limit kanan dan kiri fungsi pada  $t = 2$ , seperti pada Gambar 1.3.

Kita bisa memperoleh deret sinus yang konvergen pada nilai yang benar pada titik akhir, jika kita memperhatikan deret

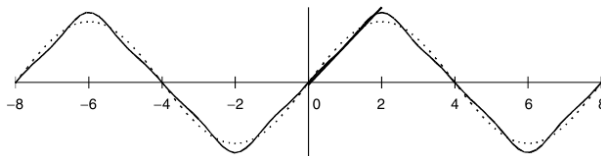
$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{untuk} \quad 0 < t \leq 2, \\ 4 - t, & \text{untuk} \quad 2 < t \leq 4. \end{cases}$$

Sebuah ekstensi antisimetrik dari fungsi ini memberikan fungsi ganjil dengan periodisitas 8 ( $2L = 8$ ,  $L = 4$ ). Ekspansi Fourier dari fungsi ini adalah deret sinus

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{4}$$

dengan

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_0^4 f(t) \sin \frac{n\pi t}{4} dt \\ &= \frac{2}{4} \int_0^2 t \sin \frac{n\pi t}{4} dt + \frac{2}{4} \int_2^4 (4 - t) \sin \frac{n\pi t}{4} dt \end{aligned}$$



Gambar 1.9: Deret Fourier sebuah fungsi yang terdefinisi pada selang terbatas. Pada  $0 \leq t \leq 2$  deret tersebut konvergen pada  $f(t) = t$ . Di luar selang ini, deret tersebut konvergen pada fungsi ganjil periodik dengan periode 8.

Dengan menggunakan metode Kronecker, kita memiliki

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{4}t \cos \frac{n\pi t}{4} + \left( \frac{4}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi t}{4} \right]_0^2 + 2 \left[ -\frac{4}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{4} \right]_2^4 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ -\frac{4}{n\pi}t \cos \frac{n\pi t}{4} + \left( \frac{4}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi t}{4} \right]_2^4 \\ &= \left( \frac{4}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi t}{4} \\ &= \frac{16}{\pi^2} \left[ \sin \frac{\pi t}{4} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi t}{4} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi t}{4} - \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Pada  $0 \leq t \leq 2$ , deret sinus tersebut konvergen pada  $f(t) = t$ . Di luar selang ini, deret tersebut konvergen pada fungsi ganjil periodik ditunjukkan Gambar 1.9. Deret ini jauh lebih cepat konvergensinya dibandingkan (1.19). Suku pertama (garis putus-putus), sudah memberikan aproksimasi yang cukup baik. Perbedaan antara aproksimasi tiga buah suku sudah sangat sulit dibedakan.

Seperti yang sudah kita lihat, sebuah fungsi yang hanya terdefinisi pada selang terbatas, terdapat kemungkinan untuk memiliki beberapa deret Fourier yang berbeda. Deret tersebut semuanya konvergen pada selang yang diberikan, meskipun dengan laju konvergensi yang bisa berbeda. Untungnya dalam aplikasinya, deret yang harus kita gunakan sudah ditentukan otomatis oleh syarat batas.

Dari contoh-contoh yang sudah kita temui, kita bisa melakukan pengamatan sebagai berikut:

- Jika fungsinya diskontinu pada beberapa titik, koefisien Fouriernya berkurang dengan  $1/n$ .
- Jika fungsinya kontinu, tetapi turunan pertamanya diskontinu pada beberapa titik, koefisien Fouriernya berkurang dengan  $1/n^2$ .
- Jika fungsi dan turunan pertamanya kontinu, koefisien Fouriernya berkurang dengan  $1/n^3$ .

Meskipun komentar ini berdasarkan pada contoh yang sedikit, komentar ini secara umum valid. Sangat berguna untuk mengingatkannya ketika kita menghitung koefisien Fourier.

## 1.5 Deret Fourier Kompleks

Deret Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{p}t + b_n \sin \frac{n\pi}{p}t \right)$$

dapat dinyatakan dalam bentuk kompleks karena

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi}{p}t &= \frac{1}{2} \left( e^{i(\frac{n\pi}{p})t} + e^{-i(\frac{n\pi}{p})t} \right), \\ \sin \frac{n\pi}{p}t &= \frac{1}{2i} \left( e^{i(\frac{n\pi}{p})t} - e^{-i(\frac{n\pi}{p})t} \right) \end{aligned}$$

maka

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2i}b_n \right) e^{i(\frac{n\pi}{p})t} + \left( \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2i}b_n \right) e^{-i(\frac{n\pi}{p})t} \right].$$

Sekarang jika kita mendefinisikan  $c_n$  sebagai

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2i}b_n \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos \left( \frac{n\pi}{p}t \right) dt + \frac{1}{2i} \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin \left( \frac{n\pi}{p}t \right) dt \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) \left[ \cos \left( \frac{n\pi}{p}t \right) - i \sin \left( \frac{n\pi}{p}t \right) \right] dt \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i(\frac{n\pi}{p})t} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{-n} &= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2i}b_n \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos \left( \frac{n\pi}{p}t \right) dt - \frac{1}{2i} \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin \left( \frac{n\pi}{p}t \right) dt \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i(n\pi/p)t} dt \end{aligned}$$

dan

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) dt,$$

sehingga deretnya dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{i(n\pi/p)t} + c_{-n} e^{i(n\pi/p)t}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/p)t} \end{aligned} \quad (1.28)$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-i(n\pi/p)t} dt \quad (1.29)$$

Sekarang deret Fourier muncul dalam bentuk kompleks. Jika  $f(t)$  adalah fungsi kompleks dari variabel riil  $t$ , maka deret Fourier kompleks merupakan sesuatu yang alami. Jika  $f(t)$  sebuah fungsi riil, maka kita tetap dapat menyatakannya dalam deret kompleks (1.28). Dalam kasus ini  $c_{-n}$  adalah kompleks konjugat dari  $c_n$  ( $c_{-n} = c_n^*$ ).

Karena

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),$$

maka

$$a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Sehingga apabila  $f(t)$  fungsi genap, maka  $c_{-n} = c_n$ . Jika  $f(t)$  fungsi ganjil maka  $c_{-n} = -c_n$ .

**Contoh 1.5.1.** Carilah deret Fourier kompleks dari fungsi berikut

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \pi \end{cases}$$

**Solusi 1.5.1.** Karena periodenya adalah  $2\pi$ , sehingga  $p = \pi$  dan deret Fourier kompleksnya adalah

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int},$$

dengan

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2} \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-int} dt = \frac{1 - e^{-in\pi}}{2\pi ni} = \begin{cases} 0, & n = \text{genap}, \\ \frac{1}{\pi ni}, & n = \text{ganjil}. \end{cases} \end{aligned}$$

Maka deret kompleksnya adalah

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi} \left( \dots - \frac{1}{3} e^{-i3t} - e^{-it} + e^{it} + \frac{1}{3} e^{i3t} + \dots \right).$$

Jelas bahwa

$$c_{-n} = \frac{1}{\pi(-n)i} = \frac{1}{\pi n(-i)} = c_n^*$$

seperti yang sudah kita duga, karena  $f(t)$  riil. Selanjutnya, karena

$$e^{int} - e^{-int} = 2i \sin nt$$

deret Fouriernya dapat dituliskan

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right).$$

Hal ini juga sudah kita duga karena  $f(t) - \frac{1}{2}$  merupakan fungsi ganjil

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi n i} + \frac{1}{\pi(-n)i} = 0$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i \left( \frac{1}{\pi n i} - \frac{1}{\pi(-n)i} \right) = \frac{2}{\pi n}$$

**Contoh 1.5.2.** Carilah deret Fourier fungsi berikut

$$f(t) = e^t \quad \text{untuk} \quad -\pi < t < \pi, \quad f(t+2\pi) = f(t).$$

**Solusi 1.5.2.** Fungsi periodik ini berperiode  $2\pi$ . Kita dapat menyatakannya sebagai deret Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Tetapi koefisien Fourier kompleksnya lebih mudah dihitung, sehingga pertama kita nyatakan dalam deret Fourier kompleks

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

dengan

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1-in} e^{(1-in)t} \right]_{-\pi}^{\pi}.$$

Karena

$$\begin{aligned} e^{(1-in)\pi} &= e^{\pi} e^{-in\pi} = (-1)^n e^{\pi}, \\ e^{-(1-in)\pi} &= e^{-\pi} e^{in\pi} = (-1)^n e^{-\pi} \\ e^{\pi} - e^{-\pi} &= 2 \sinh \pi \end{aligned}$$



sehingga

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)}(e^\pi - e^{-\pi}) = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{1+in}{1+n^2} \sinh \pi.$$

Sekarang

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2}{1+n^2} \sinh \pi,$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = -\frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2n}{1+n^2} \sinh \pi$$

Sehingga deret Fouriernya diberikan oleh

$$e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} + \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nt - n \sin nt).$$

## 1.6 Metode Lompatan

Terdapat sebuah metode efektif untuk menghitung koefisien Fourier dikenal sebagai metode lompatan (*methods of jumps*). Sepanjang fungsinya kontinu sebagian, metode ini memungkinkan kita mencari koefisien Fourier dengan metode grafik.

Anggap bahwa  $f(t)$  pada Gambar 1.10, sebuah fungsi periodik berperiode  $2\pi$ . Fungsi ini kontinu sebagian. Letak diskontinunya ada pada  $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ , dihitung dari kiri ke kanan. Dua buah titik akhir  $t_0$  dan  $t_N$  bisa merupakan titik diskontinu maupun bukan. Misalkan  $f(t_i^+)$  merupakan limit kanan fungsi ketika  $t$  mendekati dari kanan  $t_i$ , sedangkan  $f(t_i^-)$  merupakan limit kiri. Pada tiap diskontinuitas  $t_i$ , kecuali pada dua titik akhir  $t_0$  dan  $t_N = t_0 + 2p$ , kita mendefinisikan sebuah lompatan  $J_i$  sebagai

$$J_i = f(t_i^+) - f(t_i^-).$$

Pada  $t_0$ , lompatan  $J_0$  didefinisikan sebagai

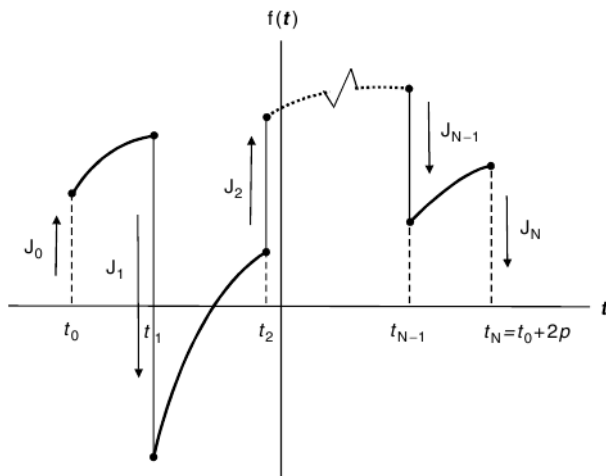
$$J_0 = f(t_0^+) - 0 = f(t_0^+)$$

dan pada  $t_N$ , lompatan  $J_N$  didefinisikan sebagai

$$J_N = 0 - f(t_N^-) = -f(t_N^-).$$

Lompatan ini digambarkan dengan tanda panah pada Gambar 1.10.  $J_i$  akan positif jika lompatan pada  $t_i$  ke atas dan akan negatif jika lompatannya ke bawah. Perhatikan bahwa pada  $t_0$  lompatannya adalah dari nol ke  $f(t_0^+)$ , dan pada  $t_N$  lompatannya adalah  $f(t_N^+)$  ke nol.

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa koefisien deret Fouriernya dapat dinyatakan dengan suku lompatan ini.



Gambar 1.10: Satu periode sebuah fungsi kontinu sebagian  $f(t)$  berperiode  $2p$ .

Koefisien deret Fourier kompleks (1.29) diberikan oleh

$$c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-i(n\pi/p)t} dt.$$

Marilah kita definisikan integralnya sebagai

$$\int_{-p}^p f(t) e^{-i(n\pi/p)t} dt = I_n [f(t)].$$

Sehingga  $c_n = \frac{1}{2p} I_n [f(t)]$  Karena

$$\frac{d}{dt} \left[ -\frac{p}{in\pi} f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] = -\frac{p}{in\pi} \frac{df(t)}{dt} e^{-i(n\pi/p)t} + f(t) e^{-i(n\pi/p)t},$$

sehingga

$$f(t) e^{-i(n\pi/p)t} dt = d \left[ -\frac{p}{in\pi} f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] + \frac{p}{in\pi} e^{-i(n\pi/p)t} df(t)$$

dari sini diperoleh

$$I_n [f(t)] = \int_{-p}^p d \left[ -\frac{p}{in\pi} f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] + \frac{p}{in\pi} \int_{-p}^p e^{-i(n\pi/p)t} df(t).$$

Perhatikan bahwa

$$\int_{-p}^p e^{-i(n\pi/p)t} df(t) = \int_{-p}^p e^{-i(n\pi/p)t} \frac{df(t)}{dt} dt = I_n [f'(t)],$$

dan

$$\begin{aligned} \int_{-p}^p d \left[ -\frac{p}{in\pi} f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] &= -\frac{p}{in\pi} \left[ \int_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \cdots + \int_{t_{N-1}}^{t_N} \right] \\ &\quad \times d \left[ f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right]. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} d \left[ f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] &= f(t_1^-) e^{-i(n\pi/p)t_1} - f(t_0^+) e^{-i(n\pi/p)t_0} \\ \int_{t_1}^{t_2} d \left[ f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] &= f(t_2^-) e^{-i(n\pi/p)t_2} - f(t_1^+) e^{-i(n\pi/p)t_1} \\ \int_{t_{N-1}}^{t_N} d \left[ f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] &= f(t_N^-) e^{-i(n\pi/p)t_N} - f(t_{N-1}^+) e^{-i(n\pi/p)t_{N-1}},\end{aligned}$$

kita mempunyai

$$\begin{aligned}\int_{-p}^p d \left[ -\frac{p}{in\pi} f(t) e^{-i(n\pi/p)t} \right] &= \frac{p}{in\pi} f(t_0^+) e^{-i(n\pi/p)t_0} \\ &+ \frac{p}{in\pi} [f(t_1^+) - f(t_1^-)] e^{-i(n\pi/p)t_1} \\ &+ \dots - \frac{p}{in\pi} f(t_N^-) e^{-i(n\pi/p)t_N} = \frac{p}{in\pi} \sum_{k=0}^{k=N} J_k e^{-i(n\pi/p)t_k}.\end{aligned}$$

Sehingga

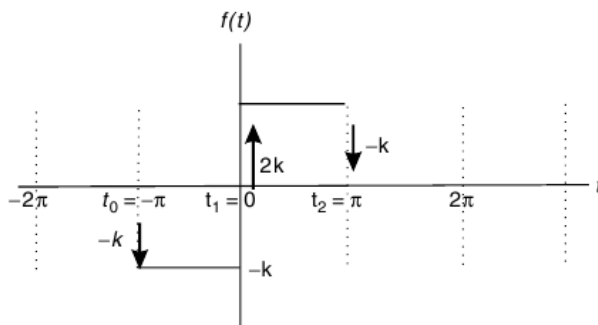
$$I_n [f(t)] = \frac{p}{in\pi} \sum_{k=0}^{k=N} J_k e^{-i(n\pi/p)t_k} + \frac{p}{in\pi} I_n [f'(t)].$$

Jelas  $I_n [f'(t)]$  dapat dihitung dengan cara yang sama  $I_n [f(t)]$ . Rumus ini dapat digunakan secara iteratif untuk mencari koefisien Fourier  $c_n$  untuk nilai  $n$  tak nol, karena  $c_n = I_n [f(t)] / 2p$ . Bersama dengan  $c_0$  yang diberikan oleh integral sederhana, koefisien-koefisien ini menentukan deret Fourier. Untuk kebanyakan fungsi yang sering ditemui, deret Fouriernya dapat dengan sederhana didapatkan dari lompatan pada titik-titik diskontinu. Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana hal ini dapat dilakukan dengan cepat dengan sketsa grafik beserta turunannya.

**Contoh 1.6.1.** Gunakan metode lompatan untuk mencari deret Fourier fungsi periodik  $f(t)$ , salah satu periodenya terdefinisi pada selang  $-\pi < t < \pi$  sebagai

$$f(t) = \begin{cases} k, & \text{untuk } -\pi < t < 0 \\ -k, & \text{untuk } 0 < t < \pi \end{cases}$$

**Solusi 1.6.1.** Sketsa fungsi ini



Periode fungsi ini adalah  $2\pi$ , sehingga  $p = \pi$ . Jelas bahwa semua turunan fungsi ini adalah nol, sehingga kita memiliki

$$c_n = \frac{1}{2\pi} I_n [f(t)] = \frac{1}{i2\pi n} \sum_{k=0}^2 J_k e^{-i(n\pi/p)t_k}, \quad n \neq 0,$$

dengan

$$t_0 = -\pi, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \pi$$

dan

$$J_0 = -k, \quad J_1 = 2k, \quad J_2 = -k.$$

Karena

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{i2\pi n} [-ke^{in\pi} + 2k - ke^{-in\pi}] \\ &= \frac{k}{i2\pi n} [2 - 2\cos(n\pi)] = \begin{cases} 0, & n = \text{genap} \\ \frac{2k}{in\pi}, & n = \text{ganjil} \end{cases}. \end{aligned}$$

Dari sini

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = 0 \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = \begin{cases} 0, & n = \text{genap} \\ \frac{4k}{n\pi}, & n = \text{ganjil} \end{cases}. \end{aligned}$$

Selanjutnya

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0,$$

maka deret Fouriernya diberikan oleh

$$f(t) = \frac{4k}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right).$$

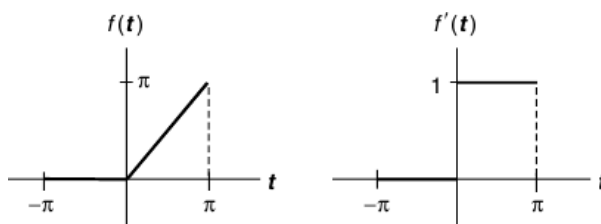
**Contoh 1.6.2.** Gunakan metode lompatan untuk mencari deret Fourier fungsi berikut

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ t, & 0 < t < \pi \end{cases}, \quad f(t+2\pi) = f(t).$$

**Contoh 1.6.2.** Turunan pertama fungsi ini adalah

$$f'(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \pi \end{cases},$$

turunan yang lebih tinggi nilainya nol. Gambar  $f(t)$  dan  $f'(t)$  adalah sebagai berikut



Dalam kasus ini

$$p = \pi, \quad t_0 = -\pi, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \pi.$$

Sehingga

$$I_n[f(t)] = \frac{1}{in} \sum_{k=0}^2 J_k e^{-int_k} + \frac{1}{in} I_n[f'(t)],$$

dengan

$$J_0 = 0, \quad J_1 = 0, \quad J_2 = -\pi$$

dan

$$I_n[f'(t)] = \frac{1}{in} \sum_{k=0}^2 J'_k e^{-int_k}$$

dengan

$$J'_0 = 0, \quad J'_1 = 1, \quad J'_2 = -1.$$

Dari sini diperoleh

$$I_n[f(t)] = \frac{1}{in} (-\pi) e^{-in\pi} + \frac{1}{in} \left[ \frac{1}{in} (1 - e^{-in\pi}) \right]$$

dan

$$c_n = \frac{1}{2\pi} I_n[f(t)] = -\frac{1}{i2n} e^{-in\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} (1 - e^{-in\pi}), \quad n \neq 0.$$

Sebagai tambahan

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t \, dt = \frac{\pi}{4}.$$

Sehingga koefisien Fourier-nya  $a_n$  dan  $b_n$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{1}{i2n}(-e^{-in\pi} + e^{in\pi}) + \frac{1}{2\pi n^2}(e^{-in\pi} + e^{in\pi}) - \frac{1}{\pi n^2} \\ &= \frac{1}{n} \sin n\pi + \frac{1}{\pi n^2} \cos n\pi - \frac{1}{\pi n^2} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2}, & n = \text{ganjil} \\ 0, & n = \text{genap} \end{cases}, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) = i \left[ -\frac{1}{i2n}(e^{-in\pi} + e^{in\pi}) + \frac{1}{2\pi n^2}(e^{-in\pi} - e^{in\pi}) \right] \\ &= -\frac{1}{n} \cos n\pi + \frac{1}{\pi n^2} \sin n\pi = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = \text{ganjil} \\ -\frac{1}{n}, & n = \text{genap} \end{cases} \end{aligned}$$

Sehingga deret Fourier-nya dapat dituliskan sebagai

$$f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nt$$

## 1.7 Sifat-sifat Deret Fourier

### 1.7.1 Teorema Parseval

Jika periodisitas sebuah fungsi periodik  $f(t)$  adalah  $2p$ , teorema Parseval menyatakan:

$$\frac{1}{2p} \int_{-p}^p [f(t)]^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

dengan  $a_n$  dan  $b_n$  adalah koefisien Fourier. Teorema ini dapat dibuktikan dengan menyatakan  $f(t)$  sebagai deret Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi t}{p} + b_n \sin \frac{n\pi t}{p} \right)$$

dan mengintegrasikannya. Tetapi penghitungan lebih sederhana jika kita mengerjakannya terlebih dahulu dengan deret Fourier kompleks

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/p)t}, \\ c_n &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-i(n\pi/p)t} dt. \end{aligned}$$

Dengan ekspresi ini, integralnya dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{1}{2p} \int_{-p}^p [f(t)]^2 dt &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/p)t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i(n\pi/p)t} dt. \end{aligned}$$

Karena

$$c_{-n} = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{-i((-n)\pi/p)t} dt = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i(n\pi/p)t} dt,$$

diperoleh

$$\frac{1}{2p} \int_{-p}^p [f(t)]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_{-n} = c_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n c_{-n}.$$

Jika  $f(t)$  sebuah fungsi riil, maka  $c_{-n} = c_n^*$ . Karena

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + ib_n),$$

maka

$$c_n c_{-n} = c_n c_n^* = \frac{1}{4} [a_n^2 - (ib_n)^2] = \frac{1}{4} (a_n^2 + b_n^2).$$

Sehingga

$$\frac{1}{2p} \int_{-p}^p [f(t)]^2 dt = c_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n c_{-n} = \left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Teorema ini memiliki interpretasi penting dan menarik. Kita telah belajar bahwa energi yang dibawa gelombang proporsional dengan kuadrat amplitudonya. Untuk gelombang yang dinyatakan dengan  $f(t)$ , energi dalam satu periode akan sebanding dengan  $\int_{-p}^p [f(t)]^2 dt$ . Karena  $a_n \cos(n\pi t/p)$  juga merepresentasikan gelombang, maka energi gelombang cosinus murni ini sebanding dengan

$$\int_{-p}^p \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{p}\right)^2 dt = a_n^2 \int_{-p}^p \cos^2 \frac{n\pi t}{p} dt = p a_n^2$$

maka energi gelombang sinus murni

$$\int_{-p}^p \left(b_n \sin \frac{n\pi t}{p}\right)^2 dt = b_n^2 \int_{-p}^p \sin^2 \frac{n\pi t}{p} dt = p b_n^2.$$

Dari teorema Parseval, kita memiliki

$$\int_{-p}^p [f(t)]^2 dt = p \frac{1}{2} a_0^2 + p \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Hal ini juga mengatakan bahwa energi total dalam gelombang hanyalah jumlah total energi dalam komponen Fouriernya. Untuk alasan ini teorema Parseval juga dikatakan sebagai “teorema energi”.

## 1.7.2 Jumlah Pangkat Bolak-balik Bilangan Bulat

Aplikasi menarik dari deret Fourier yaitu kegunaannya untuk menjumlahkan deret pangkat bolak-balik. Sebagai contoh, deret Fourier sebuah gelombang persegi

$$f(t) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

diberikan oleh

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

Pada  $x = \pi/2$ , kita memiliki

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right).$$

maka

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Hasil ini pertama kali ditemukan oleh Leibniz pada tahun 1673 secara geometrik. Hasil ini menjadi terkenal karena menjadi deret pertama yang ditemukan melibatkan  $\pi$ .

Teorema Parseval juga dapat digunakan untuk memberikan hasil tambahan. Dalam persoalan ini

$$[f(t)]^2 = k^2, \quad a_n = 0, \quad b_n = \begin{cases} \frac{4k}{\pi n}, & n = \text{ganjil} \\ 0, & n = \text{genap} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt = k^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{4k}{\pi} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right).$$

Sehingga kita mempunyai

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

Dalam contoh berikut, kita akan menunjukkan penjumlahan seperti itu dengan deret Fourier.

**Contoh 1.7.1.** Gunakan deret Fourier untuk fungsi yang definisinya adalah

$$f(x) = x^2 \quad \text{untuk} \quad -1 < x < 1, \quad \text{dan} \quad f(x+2) = f(x)$$

untuk menunjukkan

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} &= \frac{\pi^2}{12}, & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \\ \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} &= \frac{\pi^3}{32}, & \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

**Solusi 1.7.1.** Deret Fourier fungsi ini diberikan oleh (1.20) dengan  $L = 1$

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x.$$



(a) Ambil  $x = 0$ , sehingga kita mempunyai

$$x^2 = 0, \quad \cos n\pi x = 1.$$

Maka

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

atau

$$-\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{3}.$$

Kita memperoleh

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

(b) Dengan  $x = 1$ , deretnya menjadi

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^2} \cos n\pi.$$

Karena  $\cos n\pi = (-1)^n$ , kita memiliki

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2 n}{n^2}$$

atau

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

(c) Integralkan kedua ruas dari 0 sampai  $1/2$

$$\int_0^{1/2} x^2 dx = \int_0^{1/2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x \right] dx$$

kita memiliki

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

atau

$$-\frac{1}{8} = \frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Karena

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = \text{genap}, \\ 1, & n = 1, 5, 9, \dots, \\ -1, & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

kita bisa menuliskan penjumlahan sebagai

$$-\frac{1}{8} = -\frac{4}{\pi^3} \left( 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots \right).$$

Kita memiliki

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}.$$

(d) Dengan menggunakan teorema Parseval, kita mempunyai

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2)^2 dx = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^n}{n^2} \right]^2.$$

Maka

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{9} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Kita memiliki

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Deret terakhir ini sangat penting dalam teori radiasi benda hitam, yang krusial dalam perkembangan teori kuantum.

### 1.7.3 Integrasi Deret Fourier

Jika deret Fourier diintegrasikan suku per suku, maka kita akan menemukan faktor  $1/n$  pada deret tersebut. Hal ini berefek pada percepatan konvergensi. Sehingga kita berharap deret dari hasil integrasi suku per suku akan konvergen dengan integral dari  $f(x)$ . Sebagai contoh, kita telah menunjukkan deret Fourier fungsi ganjil  $f(t) = t$  berperiode  $2L$  diberikan oleh

$$t = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t.$$

Kita mengharapkan integrasi suku per suku ruas kanan persamaan ini konvergen pada integral dari  $t$ . Yaitu

$$\int_0^t x dx = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^t \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

Hasil integrasi ini adalah

$$\frac{1}{2} t^2 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[ -\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x \right]_0^t$$

atau

$$t^2 = \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t.$$

Karena

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

kita memiliki

$$t^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t$$

Hal ini tidak lain adalah deret Fourier konvergen pada  $t^2$  berperiode  $2L$  seperti pada (1.20).

**Contoh 1.7.2.** Carilah deret Fourier fungsi yang definisi dalam satu periodenya adalah

$$f(t) = t^3, \quad -L < t < L.$$

**Solusi 1.7.2.** Dengan mengintegrasikan deret Fourier untuk  $t^2$  pada selang tersebut suku per suku diperoleh

$$\int t^2 dt = \int \left[ \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t \right] dt,$$

kita mendapatkan

$$\frac{1}{3}t^3 = \frac{L^2}{3}t + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} t + C.$$

Kita dapat mencari konstanta integrasi  $C$  pada integral tersebut dengan melihat nilai kedua ruas pada  $t = 0$ , diperoleh  $C = 0$ . Selanjutnya karena pada selang  $-L < t < L$

$$t = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t,$$

maka deret Fouriernya

$$t^3 = \frac{2L^3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t + \frac{12L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin \frac{n\pi}{L} t.$$

## 1.7.4 Turunan Deret Fourier

Dalam menurunkan deret Fourier suku per suku, kita harus lebih berhati-hati. Turunan suku per suku akan menyebabkan koefisien  $a_n$  dan  $b_n$  dikalikan dengan faktor  $n$ . Karena  $n$  naik linier, deret hasilnya bisa tidak konvergen. Ambil contoh

$$t = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t.$$

Persamaan ini valid pada  $-L < t < L$ , seperti pada (1.19). Turunan dari  $t$  jelas sama dengan 1. Tetapi turunan suku per suku deret Fourier ruas kanan

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t \right] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos \frac{n\pi}{L} t.$$

bahkan tidak konvergen.

Untuk melihat syarat agar deret Fourier dari sebuah fungsi  $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right)$$

dapat diturunkan suku per suku, pertama kita mengasumsikan  $f(t)$  kontinu pada selang  $-L < t < L$  dan turunan fungsi  $f'(t)$  dapat diekspansikan dalam deret Fourier yang lain

$$f'(t) = \frac{1}{2} a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a'_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b'_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right).$$

Koefisien  $a'_n$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt \\ &= \frac{1}{L} \left[ f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t \right]_{-L}^L + \frac{n\pi}{L^2} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt. \\ &= \frac{1}{L} [f(L) - f(-L)] \cos n\pi + \frac{n\pi}{L} b_n \end{aligned} \quad (1.30)$$

Dengan cara yang sama

$$b'_n = \frac{1}{L} [f(L) - f(-L)] \sin n\pi - \frac{n\pi}{L} a_n. \quad (1.31)$$

Dengan cara yang sama menurunkan deret Fourier sebuah fungsi suku per suku, kita memperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t \right) \right] \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -a_n \frac{n\pi}{L} \sin \frac{n\pi}{L} t + b_n \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi}{L} t \right) \end{aligned}$$

Sehingga akan memberikan koefisien

$$a'_n = \frac{n\pi}{L} b_n, \quad b'_n = -\frac{n\pi}{L} a_n. \quad (1.32)$$

Sehingga kita melihat secara umum turunan fungsinya bukan merupakan turunan deret Fourier suku per suku. Tetapi jika fungsinya memenuhi syarat

$$f(L) = f(-L), \quad (1.33)$$

dengan  $a'_n$  dan  $b'_n$  diberikan pada (1.30) dan (1.31) identik dengan yang diberikan (1.32). Kita menyebut (1.33) kondisi “kepala sama dengan ekor”. Ketika syarat ini terpenuhi, turunan suku per suku deret Fourier sebuah fungsi akan konvergen dengan turunan fungsi. Perhatikan bahwa jika fungsi periodik  $f(t)$  kontinu di semua tempat, kondisi ini otomatis terpenuhi.

Sekarang jelas mengapa (1.19) tidak dapat diturunkan suku per suku. Untuk fungsi ini

$$f(L) = L \neq -L = f(-L)$$

kondisi “kepala sama dengan ekor” tidak terpenuhi. Dalam contoh berikut, fungsinya memenuhi kondisi ini, sehingga turunan deretnya diberikan oleh turunan suku per suku.

**Contoh 1.7.3.** Deret Fourier  $t^2$  pada selang  $-L < t < L$  diberikan oleh (1.20)

$$\frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t = t^2$$

Deret ini memenuhi “kepala sama dengan ekor”, seperti ditunjukkan pada Gambar 1.4. Tunjukkan bahwa turunan suku per sukunya sama dengan  $2t$ .

**Solusi 1.7.3.**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t \right] &= \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{d}{dt} \cos \frac{n\pi}{L} t \\ &= \frac{4L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{L} t \end{aligned}$$

yang merupakan deret Fourier  $2t$  dalam selang yang diinginkan seperti pada (1.19)

## 1.8 Deret Fourier dan Persamaan Diferensial

Deret Fourier mempunyai peran penting dalam menyelesaikan persamaan diferensial, seperti yang akan kita lihat pada contoh di akhir bab ini. Dalam subbab ini kita akan membatasi diri kita dengan beberapa aplikasi deret Fourier untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa tak homogen.

### 1.8.1 Persamaan Diferensial dengan Syarat Batas

Marilah kita perhatikan persamaan diferensial tak homogen berikut

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 4t,$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Kita ingin mencari solusi antara  $t = 0$  dan  $t = 1$ . Sebelumnya kita telah mempelajari bahwa solusi umum dari persamaan ini adalah jumlah dari fungsi pelengkap  $x_c$  dengan solusi khusus  $x_p$ . Solusinya yaitu

$$x = x_c + x_p,$$

dengan  $x_c$  adalah solusi persamaan homogen

$$\frac{d^2x_c}{dt^2} + 4x_c = 0,$$

dengan dua buah konstanta sebarang, dan  $x_p$  adalah solusi khusus dari

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} + 4x_p = 4t,$$

tanpa konstanta sebarang. Solusi dari kasus ini

$$x_c = A \cos 2t + B \sin 2t,$$

$$x_p = t.$$

Sehingga solusi umumnya

$$x = A \cos 2t + B \sin 2t + t.$$

Konstanta  $A$  dan  $B$  ditentukan oleh syarat batas. Karena

$$x(0) = A = 0$$

$$x(1) = A \cos 2 + B \sin 2 + 1 = 0.$$

Sehingga

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{\sin 2}.$$

Sehingga solusi eksak yang memenuhi syarat batas adalah

$$x(t) = t - \frac{1}{\sin 2} \sin 2t.$$

Fungsi ini dalam selang  $0 \leq t \leq 1$  dapat diekspansikan dalam deret Fourier sinus setengah selang

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t,$$

dengan

$$b_n = 2 \int_0^1 \left( t - \frac{1}{\sin 2} \sin 2t \right) \sin n\pi t \, dt.$$

Kita telah menunjukkan bahwa

$$\int_0^1 t \sin n\pi t \, dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Dengan integral parsial dua kali, kita mempunyai

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin 2t \sin n\pi t \, dt &= \left[ -\frac{1}{n\pi} \sin 2t \cos n\pi t + \frac{2}{(n\pi)^2} \cos 2t \sin n\pi t \right]_0^1 \\ &\quad + \frac{4}{(n\pi)^2} \int_0^1 \sin 2t \sin n\pi t \, dt. \end{aligned}$$

Menggabungkan suku terakhir dengan ruas kiri dan mengambil limit kita memperoleh

$$\int_0^1 \sin 2t \sin n\pi t \, dt = \frac{(-1)^{n+1} n\pi}{[(n\pi)^2 - 4]} \sin 2.$$

Dari sini diperoleh

$$b_n = 2 \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{1}{\sin 2} \frac{(-1)^{n+1} n\pi}{[(n\pi)^2 - 4]} \sin 2 \right] = (-1)^{n+1} \frac{8}{n\pi [4 - (n\pi)^2]}. \quad (1.34)$$

Sehingga solusi yang memenuhi syarat batas adalah

$$x(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n [4 - (n\pi)^2]} \sin n\pi t.$$

Sekarang kita harus menunjukkan bahwa hasil ini bisa didapatkan langsung dari metode deret Fourier berikut. Pertama kita ekspansikan solusinya, apapun itu, pada deret Fourier sinus setengah selang

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

Prosedur ini valid karena kita tidak peduli dengan solusinya, kita selalu bisa memperluasnya antisimetrik pada selang  $-1 < t < 0$  dan kemudian pada semua garis riil dengan syarat periodik  $x(t+2) = x(t)$ . Deret Fourier yang merepresentasikan fungsi ganjil ini dengan periode 2 diberikan di atas. Fungsi ini kontinu di tiap tempat, sehingga dapat diturunkan suku per suku. Lebih dari itu, syarat batas  $x(0) = 0$  dan  $x(1) = 1$  secara otomatis dipenuhi deret ini.

Jika kita masukkan deret ini pada persamaan diferensial

$$\sum_{n=1}^{\infty} [-(n\pi)^2 + 4] b_n \sin n\pi t = 4t.$$

Persamaan ini dapat dianggap sebagai fungsi  $4t$  yang dinyatakan dalam deret Fourier sinus. Koefisien  $[-(n\pi)^2 + 4] b_n$  diberikan oleh

$$[-(n\pi)^2 + 4] b_n = 2 \int_0^1 4t \sin n\pi t \, dt = 8 \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Diperoleh

$$b_n = \frac{8(-1)^{n+1}}{n\pi [4 - (n\pi)^2]}$$

yang identik dengan (1.34). Sehingga kita bisa memperoleh hasil yang persis sama dengan sebelumnya.

Hal ini menunjukkan bahwa metode deret Fourier adalah metode yang sesuai dan langsung. Tidak semua persoalan syarat batas dapat diselesaikan dengan cara ini, tetapi kebanyakan bisa. Ketika satu persoalan dapat diselesaikan dengan metode deret Fourier, bentuk solusinya biasanya lebih berguna.

**Contoh 1.8.1.** Sebuah balok sepanjang  $L$  yang ujungnya ditahan memiliki beban yang seragam. Pergeseran balok tersebut  $y(x)$  memenuhi persamaan

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w}{EI}$$

dengan  $w$ ,  $E$  dan  $I$  adalah konstanta ( $w$  beban per satuan panjang,  $E$  modulus Young dan  $I$  momen inersia). Selanjutnya  $y(t)$  juga memenuhi syarat batas

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y(L) &= 0 \\ y''(0) &= 0, & y''(L) &= 0 \end{aligned}$$

(Hal ini karena tidak ada pergeseran dan juga momen pada dua buah ujung.) Carilah kurva pergeseran balok  $y(x)$ .

**Solusi 1.8.1.** Fungsi ini bisa kita ekspansikan dalam deret Fourier sinusnya

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Empat buah syarat batas secara otomatis terpenuhi. Deret ini dan turunannya kontinu, sehingga bisa diturunkan suku per suku. Jika kita masukkan dalam persamaan, kita mempunyai

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{w}{EI}.$$

Hal ini berarti  $b_n(n\pi/L)^4$  adalah koefisien deret Fourier sinus dari  $w/EI$ . Sehingga

$$b_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{w}{EI} \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx = -\frac{2}{L} \frac{w}{EI} \frac{L}{n\pi} (\cos n\pi - 1).$$



Dari sini

$$b_n = \begin{cases} \frac{4wL^4}{EI} \frac{1}{(n\pi)^5}, & n = \text{ganjil} \\ 0, & n = \text{genap} \end{cases}.$$

Sehingga

$$y(x) = \frac{4wL^4}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \sin \frac{(2n-1)n\pi x}{L}.$$

Deret ini akan cepat konvergen dikarenakan suku pangkat 5 pada penyebut.

## 1.8.2 Osilator Periodik Teredam

Perhatikan sistem massa dan pegas teredam yang diakibatkan fungsi gaya periodik eksternal. Persamaan diferensial untuk gerak ini adalah

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t). \quad (1.35)$$

Kita mengingatkan kembali jika fungsi gaya eksternal  $F(t)$  merupakan fungsi sinus atau cosinus, maka solusi keadaan stabil sistem adalah gerak osilatorik dengan frekuensi yang sama dengan fungsi input. Sebagai contoh jika

$$F(t) = F_0 \sin \omega t,$$

maka

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t - \alpha), \quad (1.36)$$

dengan

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}.$$

Tetapi jika  $F(t)$  fungsi periodik dengan frekuensi  $\omega$ , tetapi bukan merupakan fungsi sinus dan cosinus, maka solusi stabilnya bukan hanya mengandung suku dengan frekuensi input  $\omega$ , tetapi juga suku yang lain dikalikan frekuensi ini. Anggap fungsi gaya input diberikan oleh gelombang persegi

$$F(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < L \\ -1, & -L < t < 0 \end{cases}, \quad F(t + 2L) = F(t). \quad (1.37)$$

Gelombang persegi ini berulang pada waktu  $2L$ . Jumlah ulangan tiap satu detik dinamakan frekuensi  $\nu$ . Jelaslah  $\nu = 1/(2L)$ . Ingat bahwa frekuensi sudut  $\omega$  didefinisikan sebagai  $2\pi\nu$ . Maka

$$\omega = 2\pi \frac{1}{2L} = \frac{\pi}{L},$$

kadang kita mengatakan  $\omega$  sebagai frekuensi.

Sekarang seperti yang sudah ditunjukkan ekspansi deret Fourier  $F(t)$  diberikan oleh

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} t,$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n = \text{ganjil}, \\ 0, & n = \text{genap}. \end{cases}$$

Terlihat di sini suku pertama adalah gelombang sinus murni dengan frekuensi yang sama dengan frekuensi input gelombang persegi. Kita menyebutnya sebagai frekuensi dasar  $\omega_1 (\omega_1 = \omega)$ . Suku lain dalam deret Fourier memiliki frekuensi dari perkalian frekuensi dasar. Frekuensi ini dinamakan frekuensi harmonik. Sebagai contoh, frekuensi harmonik kedua dan ketiga memiliki frekuensi masing-masing  $\omega_2 = 2\pi/L = 2\omega$  dan  $\omega_3 = 3\pi/L = 3\omega$ . (Di sini tidak ada frekuensi harmonik pertama).

Dengan input gelombang persegi  $F(t)$  yang dinyatakan dalam deret Fourier pada (1.35), respon dari sistem juga merupakan superposisi dari frekuensi harmonik ini, karena (1.35) merupakan persamaan diferensial linier. Hal ini berarti jika  $x_n$  merupakan solusi khusus dari

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} + c \frac{dx_n}{dt} + kx_n = b_n \sin \omega_n t,$$

sehingga solusi (1.35) adalah

$$x_p = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Sehingga mengikuti (1.36) yaitu dengan input yang berupa fungsi gaya gelombang persegi, solusi stabil dari sistem massa pegas diberikan oleh

$$x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin(\omega_n t - \alpha_n)}{\sqrt{(k - m\omega_n^2)^2 + (c\omega_n)^2}}$$

dengan

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} = n\omega, \quad \alpha_n = \tan^{-1} \frac{c\omega_n}{k - m\omega_n^2}.$$

Solusi ini mengandung tidak hanya suku dengan frekuensi yang sama dengan frekuensi input  $\omega$ , tetapi juga suku dengan perkalian frekuensi ini. Jika salah satu frekuensi yang lebih tinggi dekat dengan frekuensi alami sebuah sistem  $\omega_0 (\omega_0 = \sqrt{k/m})$ , maka suku tertentu akan sangat dominan dalam respon sistem. Hal ini merupakan masalah serius dalam analisis getaran. Frekuensi input bisa saja lebih rendah dibandingkan dengan frekuensi alami sistem, tetapi jika inputnya bukan sinusoidal murni, maka resonansi bisa saja terjadi. Kita akan lihat contoh tersebut berikut ini.

**Contoh 1.8.2.** Anggap kita bekerja pada satuan yang konsisten,  $m = 1$ ,  $c = 0.2$ ,  $k = 9$  dan  $\omega = 1$ , dan gaya input  $F(t)$  diberikan oleh (1.37). Carilah solusi stabil  $x_p$  dari sistem massa pegas ini.

**Solusi 1.8.2.** Karena  $\omega = \pi/L = 1$  maka  $L = \pi$  dan  $\omega_n = n$ . Seperti yang sudah kita tunjukkan deret Fourier  $F(t)$  adalah

$$F(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right).$$

Solusi stabilnya diberikan oleh

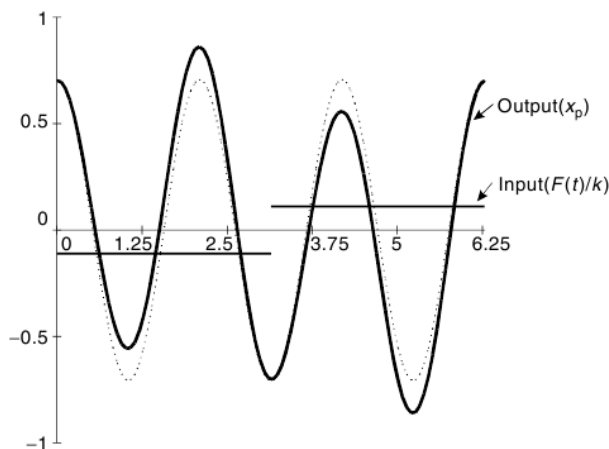
$$x_p(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{ganjil}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin(nt - \alpha_n)}{\sqrt{(9 - n^2)^2 + (0.2n)^2}}$$

$$\alpha_n = \tan^{-1} \frac{0.2n}{9 - n^2}, \quad 0 \leq \alpha_n \leq \pi.$$

Setelah kita hitung, kita peroleh

$$x_p(t) = 0.1591 \sin(t - 0.0250) + 0.7073 \sin(3t - 1.5708) \\ + 0.0159 \sin(5t - 3.0792) + \dots$$

Gambar berikut menunjukkan  $x_p$  yang dibandingkan dengan fungsi gaya input. Agar memiliki dimensi jarak yang sama, gaya input dinyatakan sebagai  $F(t)/k$  yang disebut “jarak statik”. Suku  $0.7073 \sin(3t - 1.5708)$  ditunjukkan sebagai garis titik-titik. Terlihat bahwa suku ini mendominasi respon sistem. Hal ini karena suku dengan  $n = 3$  pada deret Fourier  $F(t)$  memiliki frekuensi yang sama dengan frekuensi alami sistem ( $\sqrt{k/m} = 3$ ). Sehingga dekat resonansi getaran muncul, dengan massa beresilasi lengkap tiga kali untuk tiap osilasi gaya luar.



Untuk demonstrasi yang menraik dari fenomena ini bisa dilihat pada Feynmann Lecture of Physics, Vol. I, Chapter 50.

Marilah kita berikan label untuk dua buah  $C$  berurutan di dekat tengah-tengah keyboard dengan  $C$ ,  $C'$  dan di atas  $G$  dengan  $G$ ,  $G'$ . Nada dasar akan memiliki frekuensi relatif sebagai berikut

$$\begin{aligned} C - 2, & \quad G - 3 \\ C' - 4, & \quad G' - 6 \end{aligned}$$

Hubungan harmonik ini dapat kita demonstrasikan dengan cara berikut. Anggap kita menekan  $C'$  pelan-pelan sehingga tidak berbunyi tetapi hanya menyebabkan peredamnya terangkat. Jika kita membunyikan  $C$ , maka akan terbentuk nada dasarnya dan nada harmoniknya. Nada harmonik kedua akan menyebabkan tali  $C'$  bergetar. Jika kita lepaskan  $C$  ( $C'$  tetap kita tekan) peredam akan meredam getaran tali  $C$ , dan kita akan mendengar (dengan pelan) nada  $C'$  ketika ini hilang. Dengan cara yang sama nada harmonik  $C$  ketiga akan menyebabkan getaran  $G'$ .

Fenomena ini selain menarik juga penting. Dalam sistem mekanik dan elektrik yang dipaksa dengan sebuah fungsi periodik berfrekuensi lebih kecil dari frekuensi alami sistem, sepanjang fungsi gayanya tidak sinusoidal murni, salah satu frekuensi harmoniknya mungkin akan beresonansi dengan sistem. Untuk menghilangkan/mengurangi kemunculan abnormal dari getaran resonansi yang besar dan merusak, kita tidak boleh membiarkan adanya frekuensi harmonik dari gaya input mendominasi respon sistem.

## 1.9 Latihan

1. Tunjukkan bahwa jika  $m$  dan  $n$  bilangan bulat maka:

$$(a) \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

$$(b) \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

$$(c) \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \text{ untuk semua } n, m.$$

$$(d) \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & n, m \text{ semuanya ganjil atau genap} \\ \frac{L}{\pi} \frac{2n}{n^2 - m^2} & n \text{ ganjil, } m \text{ genap, atau, } n \text{ genap, } m \text{ ganjil} \end{cases}.$$

2. Carilah deret Fourier untuk fungsi berikut

$$(a) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x),$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x),$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

Jawab:

$$(a) f(x) = 1 + \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \dots \right).$$

$$(b) f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \dots \right).$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 4x + \frac{1}{3} \cos 6x - \dots \right] + \frac{1}{2} \sin x.$$

3. Carilah deret Fourier fungsi berikut:

$$(a) f(t) = \begin{cases} -1, & -2 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 2 \end{cases}, \quad f(t+4) = f(t),$$

$$(b) f(t) = t^2, \quad 0 < t < 2, \quad f(t+2) = f(t).$$

Jawab

$$(a) f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin \frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi t}{2} + \dots \right].$$

$$(b) f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} \cos n\pi t + \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin n\pi t.$$

4. Carilah ekspansi Fourier cosinus dan sinus setengah selang untuk fungsi berikut

$$(a) f(t) = 1, \quad 0 < t < 2.$$

$$(b) f(t) = t, \quad 0 < t < 1.$$

$$(c) f(t) = t^2, \quad 0 < t < 3.$$

Jawab:

$$(a) 1; \quad \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2},$$

$$(b) \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi t; \quad \frac{2}{\pi} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi t,$$

$$(c) \quad 3 + \frac{36}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi t}{3};$$

$$\frac{18}{\pi^3} \left[ \left( \frac{\pi^2}{1} - \frac{4}{1^3} \right) \sin \frac{\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{2} \sin \frac{2\pi t}{3} \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{3^3} \right) \sin \frac{3\pi t}{3} - \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{4\pi t}{3} + \dots \right].$$

5. Bentuk keluaran osilator elektronik memiliki bentuk gelombang sinus  $f(t) = \sin t$  untuk  $0 < t \leq \pi/2$ , kemudian turun menjadi nol dan mulai lagi. Carilah deret Fourier kompleks bentuk gelombang ini.

Jawab:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{4ni - 1}{16n^2 - 1} e^{i4nt}.$$

6. Gunakan metode lompatan untuk mencari deret Fourier sinus setengah selang fungsi  $g(t) = \sin t$  terdefinisi pada interval  $0 < t < \pi$ .

Petunjuk: Untuk deret cosinus, kita membutuhkan ekstensi genap dari fungsi.

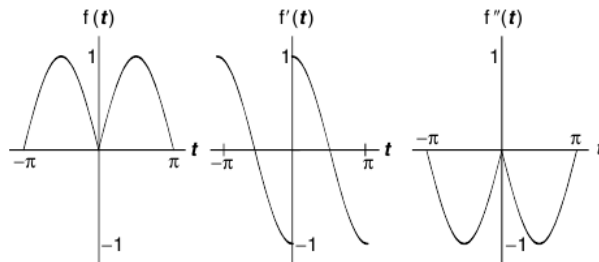
Misalkan

$$f(t) = \begin{cases} g(t) = \sin t, & 0 < t < \pi, \\ g(-t) = -\sin t, & -\pi < t < 0. \end{cases}$$

Turunannya adalah

$$f'(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 < t < \pi \\ -\cos t, & -\pi < t < 0, \end{cases}, \quad f''(t) = -f(t).$$

Sketsa fungsi dan turunannya adalah



Jawab:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{3} \cos 2t + \frac{1}{15} \cos 4t + \frac{1}{35} \cos 6t + \dots \right).$$

7. Gunakan metode lompatan untuk mencari ekspansi Fourier setengah selang (a) cosinus dan (b) sinus dari  $g(t)$  yang hanya terdefinisi pada selang  $0 < t < 1$  sebagai

$$g(t) = t - t^2, \quad 0 < t < 1.$$

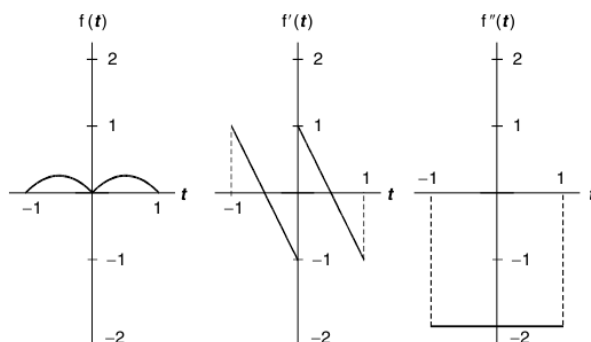
Petunjuk: Untuk ekspansi setengah selang cosinus, fungsinya haruslah diperluas simetrik untuk negatif  $t$ . Sehingga kita harus mengekspansikan deret Fourier fungsi genap  $f(t)$  sebagai

$$f(t) = \begin{cases} g(t) = t - t^2, & 0 < t < 1 \\ g(-t) = -t - t^2, & -1 < t < 0 \end{cases}.$$

Turunan pertama dan kedua fungsi ini diberikan oleh

$$f'(t) = \begin{cases} 1 - 2t, & 0 < t < 1 \\ -1 - 2t, & -1 < t < 0 \end{cases}, \quad f''(t) = -2$$

dan turunan lebih tingginya nol. Sketsa fungsi ini dan turunannya



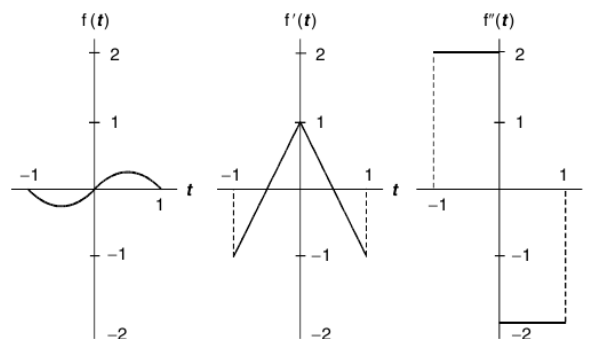
(b) Untuk ekspansi setengah selang sinus, ekstensi antisimetrik  $g(t)$  pada negatif  $t$  dieprlukan. Misalkan

$$f(t) = \begin{cases} g(t) = t - t^2, & 0 < t < 1, \\ -g(-t) = t + t^2, & -1 < t < 0. \end{cases}$$

Turunan pertama dan kedua fungsi ini diberikan oleh

$$f'(t) = \begin{cases} 1 - 2t, & 0 < t < 1 \\ 1 + 2t, & -1 < t < 0 \end{cases}, \quad f''(t) = \begin{cases} -2, & 0 < t < 1, \\ 2, & -1 < t < 0, \end{cases}$$

dan turunan lebih tingginya nol. Sketsa fungsi ini dan turunannya



Jawab:

$$(a) f(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left( \cos 2t + \frac{1}{4} \cos 4t + \frac{1}{9} \cos 6t + \dots \right).$$

$$(b) f(t) = \frac{8}{\pi^3} \left( \sin \pi t + \frac{1}{27} \sin 3\pi t + \frac{1}{125} \sin 5\pi t + \dots \right).$$

8. Kerjakan soal nomor 3 dengan metode lompatan.
9. (a) Carilah ekspansi setengah selang cosinus fungsi berikut

$$f(t) = t, \quad 0 < t < 2.$$

- (b) Sketsakan fungsinya dari  $-8 \leq t \leq 8$  deret Fourier ini.
- (c) Berapakah periode fungsi ini?

Jawab:

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi}{2} t, \quad \text{periode} = 4.$$

10. (a) Carilah ekspansi setengah selang cosinus fungsi berikut

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 2 \\ 4 - t, & 2 \leq t < 4 \end{cases}.$$

- (b) Sketsakan fungsinya dari  $-8 \leq t \leq 8$  deret Fourier ini.
- (c) Berapakah periode fungsi ini?

Jawab:

$$f(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( 1 + \cos n\pi - 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi}{4} t, \quad \text{periode} = 8.$$

11. (a) Tunjukkan deret Fourier dua soal sebelum ini adalah identik.
- (b) bandingkan dua buah sketsa dan carilah alasannya mengapa seperti ini.

Jawab: Karena merepresentasikan fungsi yang sama, keduanya dapat dinyatakan dalam deret Fourier

$$f(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi t}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi t}{2} + \dots \right).$$

12. Gunakan deret Fourier untuk

$$f(t) = t \quad \text{untuk} \quad -1 < t < 1 \quad f(t+2) = f(t)$$

untuk menunjukkan bahwa



$$(a) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4},$$

$$(b) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

13. Gunakan deret Fourier pada Gambar 1.5 untuk menunjukkan

$$(a) 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8},$$

$$(b) 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}.$$

Petunjuk (a). Ambil  $t = 0$ . (b). Gunakan teorema Parseval dan  $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ .

14. Gunakan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{dan} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

untuk membuktikan

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{7\pi^4}{720}.$$

15. Sebuah fungsi  $f(t)$  berperiode  $2\pi$  didekati dengan deret Fourier yang hanya memiliki  $N$  buah suku. Deviasi kuadrat didefinisikan sebagai

$$\varepsilon = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(t) - \sum_{n=1}^N b_n \sin nt \right]^2 dt.$$

Hal ini merupakan ukuran dari kesalahan aproksimasi. Tunjukkan bahwa agar  $\varepsilon$  minimum maka  $b_n$  haruslah merupakan koefisien Fourier

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt.$$

Petunjuk: Ambil  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_n} = 0$ .

16. Tunjukkan untuk  $-\pi \leq x \leq \pi$

$$(a) \cos k\pi = \frac{\sin k\pi}{k\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2k \sin k\pi}{\pi(k^2 - n^2)} \cos nx.$$

$$(b) \cot k\pi = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n^2 - k^2} \right)$$

17. Carilah solusi stabil dari

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 3x = f(t),$$

dengan  $f(t) = t$ ,  $-\pi \leq t < \pi$  dan  $f(t + 2\pi) = f(t)$ .

Jawab

$$x_p = \sum \frac{(-1)^{n2} (n^2 - 3)}{n(n^4 - 2n^2 + 9)} \sin nt + \sum \frac{(-1)^{n4}}{(n^4 - 2n^2 + 9)} \cos nt.$$

18. Gunakan metode deret Fourier untuk menyelesaikan persoalan syarat batas berikut

$$\begin{aligned}\frac{d^4 y}{dx^4} &= \frac{Px}{EIL}, \\ y(0) &= 0, \quad y(L) = 0, \\ y''(0) &= 0, \quad y''(L) = 0.\end{aligned}$$

$y(x)$  adalah pergeseran tongkat akibat dari bertambahnya beban yang diberikan oleh  $Px/L$ .

Jawab.

$$y(x) = \frac{2PL^4}{\pi^4 EI} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

19. Carilah deret Fourier untuk

(a)  $f(t) = t$  untuk  $-\pi < t < \pi$  dan  $f(t + 2\pi) = f(t)$ .

(b)  $f(t) = |t|$  untuk  $-\pi < t < \pi$  dan  $f(t + 2\pi) = f(t)$ .

Tunjukkan bahwa deret yang diperoleh dengan turunan suku per suku pada (a) tidak konvergen dengan  $f'(t)$  sedangkan penurunan suku per suku pada (b) konvergen dengan  $f'(t)$ . Mengapa?

## 2

# Transformasi Fourier

Transformasi Fourier adalah generalisasi dari deret Fourier. Transformasi ini memberikan representasi, sebagai superposisi dari gelombang sinusoidal, untuk fungsi yang didefinisikan pada selang tak hingga tanpa periodisitas tertentu. Transformasi ini merupakan alat matematik yang sangat penting ketika kita mempelajari gelombang, dalam satu bentuk atau yang lainnya, yang biasa kita jumpai dalam fisika dan teknologi dewasa ini.

Transformasi Fourier, sama seperti transformasi Laplace, tidak lain adalah anggota dari sebuah kelas yang dinamakan sebagai transformasi integral. Transformasi ini sangat berguna untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Tetapi kegunaan transformasi Fourier jauh melebihi sekedar menyelesaikan persamaan diferensial. Dalam mekanika (fisika) kuantum, transformasi ini memungkinkan kita melihat fungsi gelombang baik dalam ruang koordinat maupun ruang momentum. Dalam teori informasi, transformasi ini memungkinkan seseorang mempelajari sebuah bentuk gelombang dalam domain waktu maupun frekuensi. Dengan alasan ini, transformasi Fourier menjadi batu pijakan dari berbagai bidang yang berbeda mulai dari teknologi pengolahan sinyal sampai teori mekanika kuantum.

## 2.1 Integral Fourier sebagai sebuah Batas dari Deret Fourier

Seperti yang sudah kita lihat, deret Fourier sangat berguna untuk merepresentasikan baik fungsi periodik maupun fungsi yang terbatas. Tetapi dalam berbagai permasalahan, fungsi yang ditinjau seperti pulsa tak berulang dari gaya atau tegangan, merupakan fungsi non periodik dalam waktu yang terbatas. Dalam kasus tersebut,

kita masih bisa membayangkan bahwa fungsinya periodik dengan periode mendekati tak hingga. Dalam limit ini, deret Fourier menjadi integral Fourier.

Untuk memperluas konsep deret Fourier pada fungsi tak periodik, pertama kita tinjau sebuah fungsi yang berulang setelah periode  $2p$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{p}t + b_n \sin \frac{n\pi}{p}t \right),$$

dengan

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos \frac{n\pi}{p}t dt, \quad n = 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin \frac{n\pi}{p}t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa tiap suku  $\cos(n\pi/p)t$  dan  $\sin(n\pi/p)t$  adalah fungsi periodik. Periode-nya  $T_n$  ditentukan oleh hubungan ketika  $t$  naik sebesar  $T_n$ , fungsinya kembali ke nilai sebelumnya

$$\cos \frac{n\pi}{p}(t + T_n) = \cos \left( \frac{n\pi}{p}t + \frac{n\pi}{p}T_n \right) = \cos \frac{n\pi}{p}t,$$

maka

$$\frac{n\pi}{p}T_n = 2\pi \quad \text{dan} \quad T_n = \frac{2p}{n}.$$

Frekuensi  $\nu$  adalah jumlah osilasi tiap detik. Sehingga tiap suku berhubungan dengan frekuensi  $\nu_n$ ,

$$\nu_n = \frac{1}{T_n} = \frac{n}{2p}.$$

Sekarang jika  $t$  adalah waktu, maka  $\nu_n$  hanyalah frekuensi temporal. Jika variabel  $x$  adalah jarak, maka  $\nu_n$  merupakan frekuensi spasial. Distribusi dari semua frekuensi  $\left\{ \frac{n}{2p} \right\}$  disebut sebagai spektrum frekuensi. Untuk melihat perubahan pada spektrum frekuensi ketika  $p$  naik, perhatikan kasus ketika  $p = 1, 2$  dan  $10$  yang frekuensinya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p = 1, \quad \nu_n &= 0, 0.50, 1.0, 1.50, 2.0, \dots \\ p = 2, \quad \nu_n &= 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, \dots \\ p = 10, \quad \nu_n &= 0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, \dots \end{aligned}$$

Terlihat di sini bahwa ketika  $p$  semakin besar, maka spektrum diskritnya menjadi semakin dan semakin rapat. Dan akan menjadi spektrum kontinu ketika  $p \rightarrow \infty$ , dan deret Fourier-nya menjadi sebuah integral. Hal ini bisa terjadi ketika  $f(t)$  terintegralkan dalam selang tak hingga (tidak ada singularitas).

Kadang untuk meringkas penulisan, kita memperkenalkan frekuensi sudut sebagai  $\omega_n = 2\pi\nu_n$ . Sehingga

$$\omega_n = 2\pi\nu_n = 2\pi \frac{n}{2p} = \frac{n\pi}{p},$$

jadi deret Fouriernya bisa dituliskan sebagai

$$f(t) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t).$$

Sepanjang  $f(t)$  terintegralkan dalam selang tak hingga, berarti integral  $\int_{-p}^p |f(t)| dt$  ada meskipun  $p \rightarrow \infty$ . Sehingga

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) dt = 0.$$

Maka,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t),$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos \omega_n t dt,$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin \omega_n t dt.$$

Selanjutnya kita dapat mendefinisikan

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{p} - \frac{n\pi}{p} = \frac{\pi}{p}.$$

Kita memperoleh

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-p}^p f(t) \cos \omega_n t dt \right] \cos \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-p}^p f(t) \sin \omega_n t dt \right] \sin \omega_n t.$$

Jika kita menuliskan deretnya sebagai

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_p(\omega_n) \cos \omega_n t + B_p(\omega_n) \sin \omega_n t] \Delta\omega,$$

maka

$$A_p(\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(t) \cos \omega_n t dt,$$

$$B_p(\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-p}^p f(t) \sin \omega_n t dt.$$

Sekarang jika  $p \rightarrow \infty$ , maka  $\Delta\omega \rightarrow 0$  dan  $\omega_n$  menjadi variabel kontinu. Selanjutnya

$$A(\omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} A_p(\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt,$$

$$B(\omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} B_p(\omega_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt.$$

Sehingga deret tak hingganya menjadi jumlah Riemann sebuah integral

$$f(t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] \, d\omega.$$

Integral ini dikenal sebagai integral Fourier. Kita telah memiliki penurunan yang formal. Tetapi kita dapat membuatnya lebih ringkas dengan (1)  $f(t)$  adalah fungsi kontinu dan dapat diturunkan dan (2) fungsi ini terintegralkan pada selang tak hingga, seperti yang sudah kita asumsikan.

Integral ini akan konvergen pada  $f(t)$  dengan  $f(t)$  adalah fungsi kontinu, dan konvergen pada rata-rata limit kiri dan kanan dari  $f(t)$  pada titik tak kontinu, sama seperti deret Fourier.

**Contoh 2.1.1.** (a) Carilah integral Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}.$$

(b) Tunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t \sin \omega}{\omega} \, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{jika } -1 < t < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{jika } |t| = 1 \\ 0 & \text{jika } |t| > 1 \end{cases}.$$

(c) Tunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \, d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

**Solusi 2.1.1.** (a)

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos \omega t \, dt = \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega}.$$

Karena  $f(t)$  merupakan fungsi genap

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = 0.$$

Sehingga integral Fourier-nya diberikan oleh

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t \, d\omega.$$

(b) Dalam selang  $-1 < t < 1$ ,  $f(t) = 1$ , maka

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t \, d\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \text{untuk } -1 < t < 1.$$

Pada  $|t| = 1$ , yang merupakan titik diskontinu, integral Fourier-nya konvergen pada rata-rata 1 dan 0 yakni  $1/2$ . Sehingga

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega \, d\omega,$$

atau

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega \, d\omega = \frac{\pi}{4}.$$

Untuk  $|t| > 1$ ,  $f(t) = 0$ . Maka

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t \, d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \, d\omega.$$

(c) Secara khusus pada  $t = 0$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega t \, d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \, d\omega.$$

Pada  $t = 0$ ,  $f(0) = 1$ , maka

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \, d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

### 2.1.1 Integral Fourier Cosinus dan Sinus

Jika  $f(t)$  sebuah fungsi genap maka,

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = 0$$

dan

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos t \, d\omega.$$

Ini dikenal sebagai integral Fourier cosinus. Jika  $f(t)$  sebuah fungsi ganjil, maka

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = 0,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

dan

$$f(t) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t \, d\omega,$$

yang dikenal sebagai integral Fourier sinus.

Perhatikan bahwa fungsi ini diharapkan terdefinisi dari  $-\infty$  sampai  $\infty$ , tetapi karena adanya paritas fungsi, untuk mendefinisikan transformasinya kita hanya memerlukan fungsinya dari 0 sampai  $\infty$ . Ini juga berarti kita hanya tertarik pada selang 0 sampai  $\infty$ , kita dapat mendefinisikan fungsinya dari  $-\infty$  sampai 0 dengan cara yang kita inginkan, sehingga kita bisa memperoleh baik itu integral cosinus maupun integral sinus dengan memperluas fungsinya dalam selang negatifnya baik dalam bentuk genap maupun ganjil. Di sini, integral Fourier cosinus dan sinus ekuivalen dengan ekspansi setengah selang deret Fourier.

**Contoh 2.1.2.** Carilah integral Fourier cosinus dan sinus dari

$$f(t) = e^{-st}, \quad t > 0, \quad s > 0.$$

**Solusi 2.1.2.** Untuk integral Fourier cosinus, kita dapat membayangkan  $f(t)$  adalah fungsi genap terhadap  $t = 0$ , maka

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t \, dt.$$

Integral ini dapat dihitung dengan integral parsial dua kali (**buktikan!!**). Tetapi di sini kita akan menggunakan metode yang disebut sebagai transformasi Laplace yang sudah kita pelajari. Integral ini tidak lain hanyalah transformasi Laplace dari  $\cos \omega t$ . Sehingga

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Jadi integral Fourier cosinusnya diberikan oleh

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \frac{2s}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{s^2 + \omega^2} \, d\omega.$$

Karena  $f(t) = e^{-st}$  hasil integral cosinus ini adalah

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{s^2 + \omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2s} s^{-st},$$

sebuah rumus yang juga bisa didapatkan dengan integral kontur. Secara khusus untuk  $t = 0$  kita mempunyai

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2s}.$$



Dengan cara yang sama, untuk integral Fourier sinus, kita bisa membayangkan bahwa fungsi  $f(t)$  adalah fungsi ganjil. Dalam kasus ini

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

sebagai integral yang tidak lain adalah transformasi Laplace dari  $\sin \omega t$ . Sehingga integral Fourier sinus diberikan oleh

$$f(t) = e^{-st} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \sin \omega t \, d\omega.$$

Dari sini kita bisa memperoleh rumus integral lain

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{s^2 + \omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-st}.$$

**Contoh 2.1.3.** Carilah  $f(t)$ , jika  $f(t)$  adalah sebuah fungsi genap dan

$$\int_0^{\infty} f(t) \cos at \, dt = \begin{cases} 1 - a & \text{jika } 0 \leq a \leq 1, \\ 0 & \text{jika } a > 1 \end{cases}$$

**Solusi 2.1.3.** Kita dapat menggunakan integral Fourier cosinus untuk menyelesaikan persamaan integral ini. Misalkan

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (1 - \omega) & \text{jika } 0 \leq \omega \leq 1, \\ 0 & \text{jika } \omega > 1, \end{cases}$$

maka

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega = \int_0^1 \frac{2}{\pi} (1 - \omega) \cos \omega t \, d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{t^2} (1 - \cos t). \end{aligned}$$

## 2.1.2 Transformasi Fourier Cosinus dan Sinus

Jika  $f(t)$  adalah sebuah fungsi genap, kita telah melihat bahwa fungsi tersebut dapat dinyatakan dalam integral Fourier

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \quad (2.1)$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt. \quad (2.2)$$

Sekarang jika kita mendefinisikan sebuah fungsi

$$\widehat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt, \quad (2.3)$$

maka

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \widehat{f}_c(\omega).$$

Jika kita masukkan pada (2.1), kita mempunyai

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega. \quad (2.4)$$

Simetri antara (2.3) dan (2.4) tidak dapat dihindari dan bukan sebuah kesalahan. Dua persamaan ini membuat sebuah bentuk yang dinamakan sebagai pasangan transformasi Fourier cosinus. Fungsi  $\widehat{f}_c(\omega)$  dikenal sebagai transformasi Fourier cosinus. Rumus (2.4) memberikan  $f(t)$  kembali dari  $\widehat{f}_c(\omega)$ , sehingga disebut sebagai invers transformasi Fourier cosinus dari  $\widehat{f}_c(\omega)$ . Proses untuk memperoleh transformasi  $\widehat{f}_c(\omega)$  dari sebuah fungsi  $f(t)$  juga disebut transformasi Fourier cosinus dan dinyatakan dengan  $F_c\{f(t)\}$ , yang berarti, ketika  $F_c$  bekerja pada  $f(t)$  maka hasilnya  $\widehat{f}_c(\omega)$ ,

$$F_c\{f(t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \widehat{f}_c(\omega).$$

Operasi balikkannya dikenal sebagai invers transformasi Fourier cosinus dan dinyatakan dengan  $F_c^{-1}\{\widehat{f}_c(\omega)\}$ ,

$$F_c^{-1}\{\widehat{f}_c(\omega)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega = f(t).$$

Dengan cara yang sama, jika  $f(t)$  adalah fungsi ganjil, kita memiliki pasangan transformasi Fourier sinus

$$F_s\{f(t)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt = \widehat{f}_s(\omega),$$

$$F_s^{-1}\{\widehat{f}_s(\omega)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \widehat{f}_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega = f(t).$$

Perhatikan bahwa integral Fourier dan transformasi Fourier secara esensi sama. Modifikasi pada konstanta sebagai faktor pengali tidak begitu signifikan. Akan mudah dibuktikan jika kita mendefinisikan

$$\widehat{f}_c(\omega) = \alpha \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt, \quad (2.5)$$

maka

$$f(t) = \beta \int_0^{\infty} \widehat{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \quad (2.6)$$

dengan

$$\beta = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha}.$$

Sehingga sepanjang

$$\alpha\beta = \frac{2}{\pi},$$

dengan  $\alpha$  sebuah bilangan sebarang, (2.5) dan (2.6) tetap merupakan pasangan transformasi Fourier cosinus. Perlu diperhatikan, dalam berbagai literatur yang ada, terdapat berbagai konvensi dalam mendefinisikan transformasi Fourier. Perbedaannya adalah pada letak faktor  $2/\pi$ . Dengan menggunakan tabel yang ada, kita perlu memperhatikan letak dari faktor tersebut dalam definisi.

Pertanyaan selanjutnya adalah mengapa kita perlu dua nama untuk satu hal yang esensinya sama. Jawabnya adalah karena kita mempunyai dua cara pandang (perspektif) yang berbeda dalam melihatnya. Dalam integral Fourier,  $f(t)$ , dideskripsikan sebagai gelombang cosinus (sinus) kontinu dan  $A(\omega)$  hanyalah amplitudo dari komponen harmonik  $f(t)$  dalam domain waktu. Sedangkan dalam transformasi Fourier,  $\hat{f}_c(\omega)$  dianggap sebagai fungsi dalam domain frekuensi. Fungsi dalam domain frekuensi ini mendeskripsikan entitas yang sama dengan fungsi domain waktu  $f(t)$ . Terdapat banyak alasan mengapa kita sering bekerja dengan transformasi sebuah fungsi. Sebagai contoh, dalam domain frekuensi, kita bisa dengan mudah melakukan operasi yang secara matematik sulit dilakukan seperti diferensial dan integral hanya dengan pertambahan dan perkalian.

**Contoh 2.1.4.** Tunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} F_c \{f'(t)\} &= \omega F_s \{f(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0), \\ F_s \{f'(t)\} &= -\omega F_c \{f(t)\}, \\ F_c \{f''(t)\} &= \omega^2 F_c \{f(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0), \\ F_s \{f''(t)\} &= -\omega^2 F_s \{f(t)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0). \end{aligned}$$

**Solusi 2.1.4.** Karena  $f(t)$  terintegralkan, kita mengasumsikan

$$f(t) \rightarrow 0 \quad \text{ketika} \quad t \rightarrow \infty$$

Dengan menggunakan integral parsial, kita dapat menghitung transformasi dari tu-

runan

$$\begin{aligned} F_c \{f'(t)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{df}{dt} \cos \omega t \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ f(t) \cos \omega t \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \frac{d}{dt} \cos \omega t \, dt \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ -f(0) + \omega \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt \right] = \omega F_s \{f(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_s \{f'(t)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{df}{dt} \sin \omega t \, dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ f(t) \sin \omega t \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \frac{d}{dt} \sin \omega t \, dt \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ -\omega \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt \right] = -\omega F_c \{f(t)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_c \{f''(t)\} &= F_c \{[f'(t)]'\} = \omega F_s \{f'(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) \\ &= \omega [-\omega F_c \{f(t)\}] - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0) = -\omega^2 F_c \{f(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_s \{f''(t)\} &= F_s \{[f'(t)]'\} = -\omega F_c \{f'(t)\} \\ &= -\omega \left[ \omega F_s \{f(t)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) \right] = -\omega^2 F_s \{f(t)\} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0). \end{aligned}$$

**Contoh 2.1.5.** Gunakan transformasi dari turunan untuk membuktikan

$$F_s \{e^{-at}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

**Solusi 2.1.5.** Misalkan  $f(t) = e^{-at}$ , sehingga  $f(0) = 1$  dan

$$f'(t) = -ae^{-at}, \quad f''(t) = a^2 e^{-at} = a^2 f(t).$$

maka

$$F_s \{f''(t)\} = F_s \{a^2 f(t)\} = a^2 F_s \{f(t)\}.$$

Tetapi

$$F_s \{f''(t)\} = -\omega^2 F_s \{f(t)\} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$$

kita memperoleh

$$-\omega^2 F_s \{f(t)\} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} = a^2 F_s \{f(t)\}$$

atau

$$(a^2 + \omega^2) F_s \{f(t)\} = \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Sehingga

$$F_s \{f(t)\} = F_s \{e^{-at}\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

**Contoh 2.1.6.** Gunakan transformasi Fourier sinus untuk menyelesaikan persamaan diferensial berikut:

$$y''(t) - 9y(t) = 50e^{-2t},$$

$$y(0) = y_0.$$

**Solusi 2.1.6.** Karena kita tertarik pada daerah positif, kita dapat mengambil  $y(t)$  sebagai fungsi ganjil dan melakukan transformasi Fourier sinus. Jelas dari definisinya bahwa transformasi Fourier tersebut linier

$$F_s \{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_s \{f_1(t)\} + bF_s \{f_2(t)\}.$$

Dengan menggunakan sifat ini dan melakukan transformasi kedua ruas dari persamaan diferensial, kita mempunyai

$$F_s \{y''(t)\} - 9F_s \{y(t)\} = 50F_s \{e^{-2t}\}.$$

Karena

$$F_s \{y''(t)\} = -\omega^2 F_s \{y(t)\} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} y(0).$$

sehingga

$$-\omega^2 F_s \{y(t)\} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_0 - 9F_s \{y(t)\} = 50F_s \{e^{-2t}\},$$

setelah kita kumpulkan suku-sukunya

$$(\omega^2 + 9) F_s \{y(t)\} = -50 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + 4} + \omega \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_0.$$

Jadi

$$F_s \{y(t)\} = -50 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + 4} \frac{1}{(\omega^2 + 9)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_0 \frac{\omega}{(\omega^2 + 9)}.$$

Dengan pecahan parsial dari

$$\frac{1}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 9)} = \frac{1}{5} \frac{1}{\omega^2 + 4} - \frac{1}{5} \frac{1}{\omega^2 + 9}$$

kita mempunyai

$$\begin{aligned} F_s \{y(t)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} 10 \frac{\omega}{\omega^2 + 9} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} 10 \frac{\omega}{\omega^2 + 4} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} y_0 \frac{\omega}{(\omega^2 + 9)} \\ &= (10 + y_0) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + 9} - 10 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + 4} \\ &= (10 + y_0) F_s \{e^{-3t}\} - 10 F_s \{e^{-2t}\}. \end{aligned}$$

Dengan mengambil transformasi invers, kita memperoleh solusi

$$y(t) = (10 + y_0) e^{-3t} - 10 e^{-2t}.$$

## 2.2 Tabel Transformasi Fourier

Terdapat banyak tabel transformasi Fourier yang lengkap. Daftar ringkas dari transformasi Fourier cosinus dan sinus diberikan pada Tabel 2.1 dan Tabel 2.2 sedangkan tabel pendek dari transformasi Fourier yang akan kita jelaskan pada Subbab 2.3 diberikan pada Tabel 2.3.

## 2.3 Transformasi Fourier

Seperti yang sudah kita lihat, deret Fourier sebuah fungsi berulang pada interval  $2p$ , bisa juga dituliskan dalam bentuk kompleks

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{p} t}, \quad c_n = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i \frac{n\pi}{p} t} dt,$$

sehingga

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(t) e^{i \frac{n\pi}{p} t} dt \right] e^{i \frac{n\pi}{p} t}.$$

Mari kita definisikan lagi

$$\omega_n = \frac{n\pi}{p}$$

dan

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{p},$$

kemudian menuliskan persamaan sebagai

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-p}^p f(t) e^{i\omega_n t} dt \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \hat{f}_p(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tabel 2.1: Tabel Transformasi Fourier Cosinus

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\omega) \cos \omega t \, d\omega$	$\hat{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos \omega t \, dt$
$\begin{cases} 1 & \text{jika } 0 < t < a \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$
$t^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{\omega^a} \cos \frac{a\pi}{2}$
$e^{-at} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-at^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{t^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a\omega}$
$t^n e^{-at} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + \omega^2)^{n+1}} \operatorname{Re}(a + i\omega)^{n+1}$
$\begin{cases} \cos t & \text{jika } 0 < t < a \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[ \frac{\sin a(1 - \omega)}{1 - \omega} + \frac{\sin a(1 + \omega)}{1 + \omega} \right]$
$\cos at^2 \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{1}{2a}} \cos \left( \frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right)$
$\frac{\sin at}{t} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(a - \omega)$
Linieritas dari transformasi dan invers:	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \hat{f}_c(\omega) + \beta \hat{g}_c(\omega)$
Transformasi turunan:	
$f'(t)$	$\omega \hat{f}_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0)$
$f''(t)$	$-\omega^2 \hat{f}_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$
Teorema konvolusi:	
$\frac{1}{2} \int_0^\infty [f( t-x ) + f( t+x )] g(x) \, dx$	$\hat{f}_c(\omega) \hat{g}_s(\omega)$

Tabel 2.2: Tabel Transformasi Fourier Sinus

$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega$	$\hat{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt$
$\begin{cases} 1 & \text{jika } 0 < t < a \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos a\omega}{\omega}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{\omega}}$
$t^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{\omega^a} \sin \frac{\alpha\pi}{2}$
$e^{-t}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1 + \omega^2}$
$\frac{t}{t^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a\omega}$
$t^n e^{-at} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + \omega^2)^{n+1}} \operatorname{Im}(a + i\omega)^{n+1}$
$te^{-at^2} \quad (a > 0)$	$\frac{\omega}{(2a)^{3/2}} e^{-\omega^2/4a}$
$\begin{cases} \sin t & \text{jika } 0 < t < a \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left[ \frac{\sin a(1 - \omega)}{1 - \omega} - \frac{\sin a(1 + \omega)}{1 + \omega} \right]$
$\frac{\cos at}{t} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(\omega - a)$
Linieritas dari transformasi dan invers:	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \hat{f}_s(\omega) + \beta \hat{g}_s(\omega)$
Transformasi turunan:	
$f'(t)$	$-\omega \hat{f}_c(\omega)$
$f''(t)$	$-\omega^2 \hat{f}_s(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \omega f(0)$
Teorema konvolusi:	
$\frac{1}{2} \int_0^\infty [f( t-x ) - f( t+x )] g(x) \, dx$	$\hat{f}_c(\omega) \hat{g}_s(\omega)$



Tabel 2.3: Tabel Transformasi Fourier:  $u$  adalah Fungsi Tangga Heaviside

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \widehat{f}(\omega) d\omega$	$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$
$\frac{1}{t^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
$u(t)e^{-at}$	$\frac{1}{a + i\omega}$
$u(-t)e^{at}$	$\frac{1}{a - i\omega}$
$e^{-a t } \quad (a > 0)$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-t^2}$	$\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$
$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} e^{-t^2/(2a)^2} \quad (a > 0)$	$e^{-a^2\omega^2}$
$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$
$u(t+a) - u(t-a)$	$\frac{2 \sin \omega a}{\omega}$
$\delta(t-a)$	$e^{-i\omega a}$
$f(at+b) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a} e^{ib\omega/a} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Linieritas dari transformasi dan invers:	
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha \widehat{f}(\omega) + \beta \widehat{g}$
Transformasi turunan:	
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$
Transformasi integral:	
$f(t) = \int_{-\infty}^t g(x) dx$	$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega} \widehat{g}(\omega)$
Teorema Konvolusi:	
$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx$	$\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{2\pi} \widehat{f}(\omega) * \widehat{g}(\omega)$

dengan

$$\hat{f}_p(\omega) = \int_{-p}^p f(t) e^{i\omega_n t} dt.$$

Sekarang jika  $p \rightarrow \infty$ , maka  $\Delta\omega \rightarrow 0$  dan  $\omega_n$  menjadi variabel kontinu. Selanjutnya

$$\hat{f}(\omega) = \lim_{p \rightarrow \infty} \hat{f}_p(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.8)$$

dan jumlah tak hingga dari (2.7) menjadi sebuah integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.9)$$

yang dikenal sebagai integral Fourier.

Fungsi koefisien  $\hat{f}(\omega)$  dikenal sebagai transformasi Fourier dari  $f(t)$ . Proses mentransformasikan fungsi  $f(t)$  dari domain waktu menjadi fungsi yang sama  $\hat{f}(\omega)$  dalam domain frekuensi dinyatakan sebagai  $\mathcal{F}\{f(t)\}$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(\omega). \quad (2.10)$$

Proses untuk memperoleh kembali  $f(t)$  dari  $\hat{f}(\omega)$  dinamakan invers transformasi Fourier  $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t). \quad (2.11)$$

Kita telah menurunkan pasangan transformasi Fourier ini dengan argumen yang sama ketika kita memperkenalkan transformasi Fourier cosinus. Komentar yang ada di sana juga berlaku di sini. Rumus (2.10) dan (2.11) juga bisa didapatkan dengan (1)  $f(t)$  kontinu dan dapat diturunkan dan (2) terintegralkan mutlak, yakni  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  berhingga.

Faktor pengali di depan integral sebarang. Jika  $f(t)$  dari  $\hat{f}(\omega)$  didefinisikan sebagai

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \hat{f}(\omega),$$

maka  $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\}$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t),$$

dengan

$$\alpha\beta = \frac{1}{2\pi}.$$

Beberapa penulis memilih  $\alpha = \beta = \sqrt{1/2\pi}$  sehingga pasangan transformasi Fouriernya simetrik. Penulis lain memilih  $\alpha = 1/2\pi$ ,  $\beta = 1$ . Dalam (2.10) dan (2.11)  $\alpha$  dipilih 1 dan  $\beta = 1/2\pi$ .

Konvensi lain yang biasa digunakan dalam analisis spektrum adalah menggunakan frekuensi  $\nu$  dibandingkan frekuensi sudut  $\omega$  dalam mendefinisikan transformasi Fourier. Karena  $\omega = 2\pi\nu$ , (2.10) dapat dituliskan sebagai:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\pi\nu t} dt = \widehat{f}(\nu) \quad (2.12)$$

dan (2.11) menjadi

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\nu)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = f(t). \quad (2.13)$$

Perhatikan bahwa dalam pasangan persamaan ini, faktor  $2\pi$  sudah tidak ada lagi. Di samping itu, frekuensi adalah konsep yang terdefinisi dengan baik dan tak seorangpun mengukur frekuensi sudut. Terdapat alasan yang baik untuk menggunakan (2.12) dan (2.13) sebagai definisi transformasi Fourier. Tetapi untuk alasan sejarah, sebagian besar buku teknik dan fisika menggunakan  $\omega$ . Sehingga kita akan tetap menggunakan (2.10) dan (2.11) sebagai definisi transformasi Fourier.

Fungsi  $f(t)$  dalam transformasi Fourier ini bisa memiliki ataupun tidak paritas baik ganjil ataupun genap. Tetapi jika fungsinya adalah fungsi genap, maka akan dengan mudah dibuktikan bahwa transformasinya akan direduksi menjadi transformasi Fourier cosinus, sedangkan jika fungsi ganjil, maka akan direduksi menjadi transformasi Fourier sinus.

**Contoh 2.3.1.** Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

**Solusi 2.3.1.**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{\alpha+i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha+i\omega}. \end{aligned}$$

Hasil ini tentunya dapat dinyatakan dalam suku riil dan imajiner

$$\frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{1}{\alpha+i\omega} \frac{\alpha-i\omega}{\alpha-i\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2} - i \frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

**Contoh 2.3.2.** Carilah invers transformasi Fourier dari

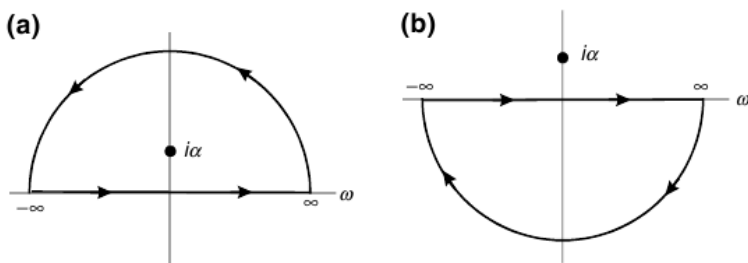
$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}.$$

(Soal ini dapat dilewati jika belum mempelajari integrasi kontur kompleks.)

**Solusi 2.3.2.**

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + i\omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - i\alpha} e^{i\omega t} d\omega.$$

Integral ini dapat dihitung dengan integral kontur. Untuk  $t > 0$ , konturnya dapat ditutup berlawanan arah dengan jarum jam pada separuh bidang bagian atas (u.h.p, *upper half plane*) seperti pada Gambar 2.1 (a)



Gambar 2.1: Kontur untuk invers transformasi Fourier. (a) kontur tertutup pada setengah bidang bagian atas. (b) Kontur tertutup pada setengah bidang bagian bawah.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega - i\alpha} e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{u.h.p}} \frac{1}{\omega - i\alpha} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \lim_{\omega \rightarrow i\alpha} e^{i\omega t} = e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

Dari sini untuk  $t > 0$ :

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\} = e^{-\alpha t}.$$

Untuk  $t < 0$ , kontur tertutup searah jarum jam dalam setengah bidang bagian bawah seperti pada Gambar 2.1 (b). Karena tidak terdapat titik singular pada setengah bidang bagian bawah (l.h.p, *lower half plane*)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - i\alpha} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{l.h.p}} \frac{1}{\omega - i\alpha} e^{i\omega t} d\omega = 0.$$

Untuk  $t < 0$ ,

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\} = 0$$

Dengan menggunakan fungsi tangga Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } t > 0, \\ 0 & \text{untuk } t < 0, \end{cases}$$

kita dapat mengkombinasikan hasil untuk  $t > 0$  dan untuk  $t < 0$  sebagai:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \widehat{f}(\omega) \right\} = u(t) e^{-\alpha t}.$$

Terlihat bahwa invers transformasi Fourier sama dengan  $f(t)$  pada contoh sebelumnya.

## 2.4 Transformasi Fourier dan Fungsi Delta

### 2.4.1 Ortogonalitas

Jika  $\widehat{f}(\omega)$  dari (2.8) kita masukkan kembali pada integral Fourier (2.9), representasi Fourier  $f(t)$  berbentuk

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right] e^{i\omega t} d\omega,$$

yang setelah menukar urutan integrasi diperoleh

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega \right] dt'.$$

Ingat kembali fungsi delta Dirac  $\delta(t-t')$  yang didefinisikan oleh hubungan

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \delta(t-t') dt'.$$

Dengan membandingkan dua buah persamaan terakhir,  $\delta(t-t')$  bisa dituliskan sebagai

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega. \quad (2.14)$$

Dengan perubahan variabel, kita memperoleh bentuk inversnya

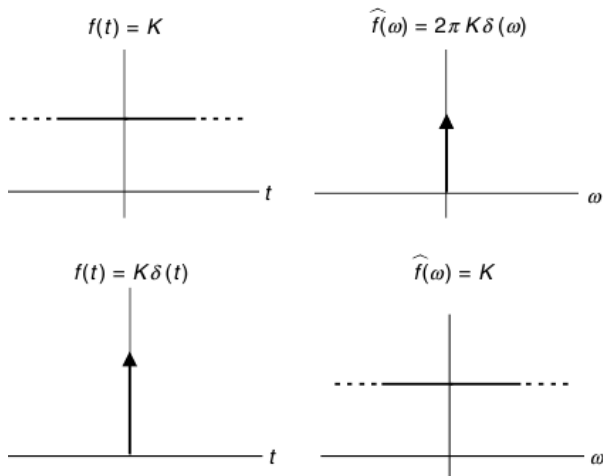
$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt.$$

Dua buah persamaan terakhir adalah kondisi ortogonalitas. Sebuah fungsi  $e^{i\omega t}$  ortogonal dengan semua fungsi dalam bentuk  $e^{-i\omega' t}$  ketika diintegrasikan untuk semua  $t$  sepanjang  $\omega' \neq \omega$ .

Karena  $\delta(x) = \delta(-x)$ , (2.14) bisa ditulis

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega.$$

Rumus ini sangat berguna dalam representasi fungsi delta. Penurunan pasangan transformasi lebih sederhana dengan penggunaan fungsi delta. Meskipun fungsi ini bukan fungsi matematik yang tepat, penggunaannya bisa dibenarkan oleh teori distribusi.



Gambar 2.2: Transformasi Fourier untuk fungsi konstan dan fungsi delta. Transformasi Fourier fungsi konstan adalah fungsi delta. Transformasi Fourier fungsi delta adalah fungsi konstan.

## 2.4.2 Transformasi Fourier Melibatkan Fungsi Delta

### Fungsi Delta Dirac

Perhatikan fungsi berikut

$$f(t) = K\delta(t),$$

dengan  $K$  merupakan sebuah konstanta. Transformasi Fourier  $f(t)$  dengan mudah diturunkan dengan menggunakan fungsi delta

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t) e^{-i\omega t} dt = Ke^0 = K.$$

Invers fungsinya diberikan oleh

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{i\omega t} dt = K\delta(t).$$

Dengan cara yang sama, transformasi Fourier sebuah fungsi konstan  $K$  adalah

$$\mathcal{F}\{K\} = 2\pi K\delta(\omega)$$

dan inversnya

$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi K\delta(\omega)\} = K.$$

Pasangan transformasi Fourier ini diilustrasikan pada Gambar 2.2.

### Fungsi Periodik

Untuk mengilustrasikan transformasi Fourier fungsi periodik, perhatikan fungsi berikut

$$f(t) = A \cos \omega_0 t.$$

Transformasi Fourier-nya diberikan oleh

$$\mathcal{F}\{A \cos \omega_0 t\} = \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt.$$

Karena

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}),$$

sehingga

$$\mathcal{F}\{A \cos \omega_0 t\} = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i(\omega - \omega_0)t} + e^{-i(\omega + \omega_0)t}] dt.$$

Dengan menggunakan (2.14) kita memiliki

$$\mathcal{F}\{A \cos \omega_0 t\} = \pi A \delta(\omega + \omega_0) + \pi A \delta(\omega - \omega_0). \quad (2.15)$$

Dengan cara yang sama

$$\mathcal{F}\{A \sin \omega_0 t\} = i\pi A \delta(\omega + \omega_0) - i\pi A \delta(\omega - \omega_0). \quad (2.16)$$

Perhatikan bahwa transformasi Fourier dari fungsi sinus adalah imajiner.

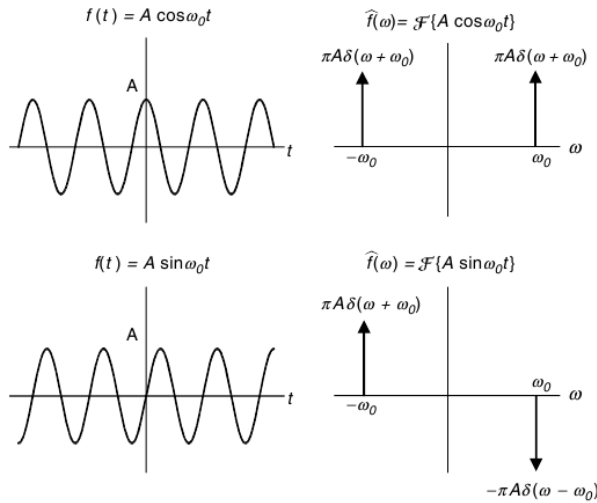
Pasangan transformasi Fourier-nya bisa dilihat pada Gambar 2.3, meninggalkan faktor  $i$  pada (2.16)

### 2.4.3 Pasangan Transformasi Fourier Tiga Dimensi

Sejauh ini kita telah menggunakan variabel  $t$  dan  $\omega$  untuk merepresentasikan waktu dan frekuensi sudut. Secara matematik, tentunya, akan tetap sama jika kita mengubah nama variabelnya. Dalam mendeskripsikan variasi ruang sebuah gelombang, biasanya kita menggunakan  $r$ ,  $x$   $y$  dan  $z$  untuk merepresentasikan jarak. Dalam fungsi waktu, periode  $T$  adalah interval waktu pada saat fungsi tersebut berulang. Dalam fungsi jarak, fungsi yang sama dikenal sebagai panjang gelombang  $\lambda$ , yaitu penambahan jarak ketika fungsi tersebut berulang. Sehingga jika  $t$  diganti  $r$ , maka frekuensi sudut  $\omega$  yang sama dengan  $2\pi/T$  haruslah diganti dengan kuantitas yang sama dengan  $2\pi/\lambda$  yang dikenal sebagai bilangan gelombang  $k$ .

Sehingga, dengan (2.14), kita mempunyai

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x-x')} dk_1, \\ \delta(y - y') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_2(y-y')} dk_2, \\ \delta(z - z') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_3(z-z')} dk_3. \end{aligned}$$



Gambar 2.3: transformasi Fourier untuk fungsi sinus dan cosinus.

Jadi dalam ruang tiga dimensi, fungsi delta diberikan oleh

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \delta(y - y') \delta(y - y') \delta(z - z') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1(x-x')} dk_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_2(y-y')} dk_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_3(z-z')} dk_3 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i[k_1(x-x') + k_2(y-y') + k_3(z-z')]} dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned}$$

Notasi yang biasa digunakan adalah dengan memperkenalkan sebuah vektor gelombang  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k} = k_1 \hat{\mathbf{i}} + k_2 \hat{\mathbf{j}} + k_3 \hat{\mathbf{k}}$$

dan juga

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x') \hat{\mathbf{i}} + (y - y') \hat{\mathbf{j}} + (z - z') \hat{\mathbf{k}}$$

fungsi delta tiga dimensi dapat dituliskan sebagai

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3 k.$$

Sekarang dengan menggunakan definisi fungsi delta

$$f(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r'.$$

kita mempunyai

$$f(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}') \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3 k d^3 r',$$



yang dapat dituliskan sebagai

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^3r' \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k.$$

Sehingga dalam tiga dimensi kita memiliki pasangan transformasi Fourier

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\}, \\ f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\mathbf{k})\}. \end{aligned}$$

Cara kita memisahkan faktor  $1/(2\pi)^3$  antara transformasi Fourier dengan inversnya adalah sebarang. Di sini kita memisahkan sama besar agar memiliki kesesuaian dengan kebanyakan buku mekanika kuantum.

Dalam mekanika kuantum, momentum  $\mathbf{p}$  diberikan oleh  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . Pasangan transformasi Fourier dalam suku  $\mathbf{r}$  dan  $\mathbf{p}$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3r, \\ f(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d^3p. \end{aligned}$$

Jika  $f(\mathbf{r})$  adalah fungsi gelombang Schrödinger, maka transformasi Fourier  $\hat{f}(\mathbf{p})$  adalah fungsi gelombang momentumnya. Dalam mendeskripsikan sebuah fungsi dinamik, fungsi gelombang ruang atau momentum bisa digunakan, bergantung mana yang lebih nyaman untuk permasalahan tertentu.

Jika dalam ruang tiga dimensi, fungsinya memiliki bentuk simetri bola, yakni  $f(\mathbf{r}) = f(r)$ , sehingga transformasi Fouriernya direduksi menjadi integral satu dimensi. Dalam kasus ini, misalkan bilangan gelombang  $\mathbf{k}$  sepanjang sumbu- $z$  dalam ruang koordinat, sehingga

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$$

dan

$$d^3r = r^2 \sin \theta d\theta dr d\varphi.$$

Transformasi Fourier dari  $f(r)$  menjadi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} f(r) \left[ \int_0^{\pi} e^{-ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta \right] r^2 dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} 2\pi \int_0^{\infty} f(r) \left[ \frac{1}{ikr} e^{-ikr \cos \theta} \right]_0^{\pi} r^2 dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} 2\pi \int_0^{\infty} f(r) \frac{2 \sin kr}{kr} r^2 dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^{\infty} f(r) r \sin kr dr. \end{aligned}$$

**Contoh 2.4.1.** Carilah transformasi Fourier dari

$$f(\mathbf{r}) = \frac{z^3}{\pi} e^{-2zr},$$

**Solusi 2.4.1.**

$$\mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\infty \frac{z^3}{\pi} e^{-2zr} r \sin kr \, dr.$$

Salah satu cara untuk menghitung integral ini adalah dengan mengingat kembali transformasi Laplace dari  $\sin kr$

$$\int_0^\infty e^{-sr} \sin kr \, dr = \frac{k}{s^2 + k^2},$$

turunkan terhadap  $s$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-sr} \sin kr \, dr &= \int_0^\infty (-r) e^{-sr} \sin kr \, dr, \\ \frac{d}{ds} \frac{k}{s^2 + k^2} &= \frac{-2sk}{(s^2 + k^2)^2}, \end{aligned}$$

maka

$$\int_0^\infty r e^{-sr} \sin kr \, dr = \frac{2sk}{(s^2 + k^2)^2}.$$

Dengan  $s = 2z$ , kita mempunyai

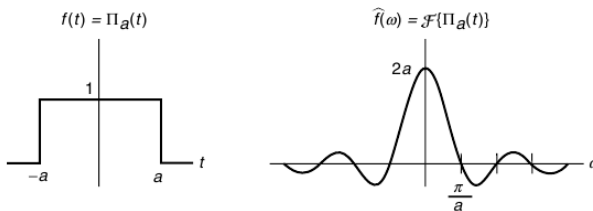
$$\int_0^\infty e^{-2zr} r \sin kr \, dr = \frac{4zk}{(4z^2 + k^2)^2}.$$

Sehingga

$$\mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \frac{z^3}{\pi} \frac{4zk}{(4z^2 + k^2)^2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{2z^2}{(4z^2 + k^2)^2}.$$

## 2.5 Beberapa Pasangan Transformasi Penting

Terdapat beberapa prototipe pasangan transformasi Fourier yang sebaiknya kita familiar dengannya. Bukan hanya karena seringnya muncul dalam teknik maupun fisika, tetapi juga karena transformasi fungsi lainnya juga berdasarkan fungsi-fungsi ini.



Gambar 2.4: Transformasi Fourier untuk fungsi persegi. Perhatikan bahwa  $\hat{f}(0) = 2a$ , dan nilai nol dari  $\hat{f}(\omega)$  adalah pada  $\omega = \pi/a, 2\pi/a, 3\pi/a, \dots$ .

### 2.5.1 Fungsi Pulsa Persegi

Fungsi persegi didefinisikan sebagai:

$$\Pi_a(t) = \begin{cases} 1 & -a \leq t \leq a, \\ 0 & \text{yang lain.} \end{cases}$$

Fungsi ini kadang juga disebut sebagai fungsi kotak atau fungsi atas topi. Fungsi ini dapat dinyatakan sebagai

$$\Pi(t) = u(t + a) - u(t - a)$$

dengan  $u(t)$  adalah fungsi tangga Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Transformasi Fourier fungsi ini diberikan oleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\Pi_a(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_a(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{-a}^a = \frac{e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}}{-i\omega} = \frac{2 \sin \omega a}{\omega} = \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

Dalam fungsi sinc, yang didefinisikan sebagai  $\text{sinc}(x) = \sin x/x$ , kita mempunyai

$$\mathcal{F}\{\Pi_a(t)\} = 2a \text{sinc}(a\omega).$$

Pasangan transformasi Fourier ini ditunjukkan pada Gambar 2.4.

### 2.5.2 Fungsi Gaussian

Fungsi Gaussian didefinisikan sebagai:

$$f(t) = e^{-\alpha t^2}.$$

Transformasi Fouriernya diberikan oleh

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha t^2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 - i\omega t} dt = \widehat{f}(\omega).$$

Dengan melengkapi kuadrat dari eksponensial

$$\alpha t^2 + i\omega t = \left(\sqrt{\alpha}t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha},$$

kita memiliki

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left[\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha}\right]\right\} dt \\ = \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\sqrt{\alpha}t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2\right\} dt. \end{aligned}$$

Misalkan

$$u = \sqrt{\alpha}t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}, \quad du = \sqrt{\alpha} dt$$

sehingga kita bisa menuliskan transformasi Fouriernya sebagai

$$\widehat{f}(\omega) = \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Karena

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

maka

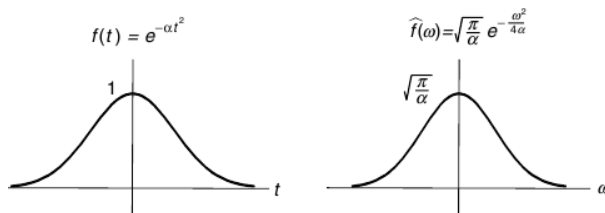
$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right).$$

Hal menarik yang perlu diperhatikan adalah  $\widehat{f}(\omega)$  juga merupakan fungsi Gaussian dengan puncak pada titik asal, dan secara monotonik menurun ketika  $k \rightarrow \pm\infty$ . Jika  $f(t)$  memiliki puncak yang tajam ( $\alpha$  besar) maka  $\widehat{f}(\omega)$  datar, begitu juga sebaliknya. Hal ini merupakan fitur yang umum dalam transformasi Fourier. Dalam mekanika kuantum, hal ini berkaitan dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg. Pasangan transformasi fungsi Gaussian ditunjukkan Gambar 2.5.

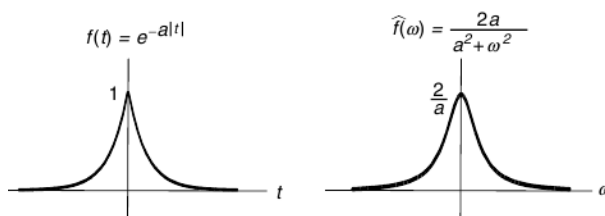
### 2.5.3 Fungsi Meluruh secara Eksponen

Transformasi Fourier sebuah fungsi yang meluruh secara eksponen

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$



Gambar 2.5: Transformasi Fourier sebuah fungsi Gaussian adalah fungsi Gaussian yang lain.



Gambar 2.6: Transformasi Fourier sebuah fungsi yang meluruh eksponen adalah sebuah profil Lorentz.

diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(a+i\omega)t}}{-(a+i\omega)} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} = \hat{f}(\omega).
 \end{aligned}$$

Fungsi ini memiliki bentuk seperti bel, memiliki penampakan yang sama dengan kurva Gaussian dan dikenal sebagai profil Lorentz. Pasangan transformasinya bisa dilihat pada Gambar 2.6.

## 2.6 Sifat-sifat Transformasi Fourier

### 2.6.1 Sifat Simetri

Sifat simetri transformasi Fourier sangatlah penting

$$\text{jika } \mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega), \text{ maka } \mathcal{F}\{\hat{f}(t)\} = 2\pi f(-\omega).$$

*Bukti.* Karena

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

dari definisi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Dengan menukar antara  $t$  dan  $\omega$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{i\omega t} dt.$$

Jelas bahwa

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Maka

$$\mathcal{F}\{\widehat{f}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{-i\omega t} dt = 2\pi f(-\omega).$$

Dengan mengguakan hubungan sederhana ini, kita bisa menghindari manipulasi matematik yang rumit.

---

**Contoh 2.6.1.** Carilah

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{a^2 + t^2}\right\}$$

dari

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

**Solusi 2.6.1.** Misalkan

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad \text{maka} \quad f(-\omega) = e^{-a|\omega|}$$

dan

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \widehat{f}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

Maka

$$\begin{aligned} \widehat{f}(t) &= \frac{2a}{a^2 + t^2}, \\ \mathcal{F}\{\widehat{f}(t)\} &= F\left\{\frac{2a}{a^2 + t^2}\right\} = \pi f(-\omega). \end{aligned}$$

Sehingga

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{a^2 + t^2}\right\} = \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}.$$

Hasil ini juga bisa didapatkan dengan integral kontur kompleks.

---

## 2.6.2 Linieritas, Pergeseran, Penskalaan

### Linieritas Transformasi dan Inversnya

Jika  $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$  dan  $\mathcal{F}\{g(t)\} = \hat{g}(\omega)$ , maka

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [af(t) + bg(t)]e^{-i\omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= a\mathcal{F}\{f(t)\} + b\mathcal{F}\{g(t)\} = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega).\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega)\} &= a\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} + b\mathcal{F}^{-1}\{\hat{g}(\omega)\} \\ &= af(t) + bg(t).\end{aligned}$$

Hubungan sederhana ini sangat penting karena merefleksikan kegunaan transformasi Fourier dalam analisis sistem linier.

### Pergeseran Waktu

Jika waktu digeser sebesar  $a$  dalam transformasi Fourier

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\omega t} dt,$$

dengan substitusi  $t-a = x$ ,  $dt = dx$ ,  $t = x+a$ , kita memiliki

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t-a)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega(x+a)} dx \\ &= e^{-i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega).\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa waktu tunda dalam transformasi Fourier hanya akan mengubah fase bukan besarnya (magnitudo). Sebagai contoh

$$\sin \omega_0 t = \cos \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \omega_0 \left( t - \frac{\pi}{2\omega_0} \right),$$

Sehingga jika  $f(t) = \cos \omega_0 t$ , maka  $\sin \omega_0 t = f(t-a)$  dengan  $a = \frac{\pi}{2\omega_0}$ . Kita memiliki

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{A \sin \omega_0 t\} &= e^{-i\omega \frac{\pi}{2\omega_0}} F\{A \cos \omega_0 t\} \\ &= e^{-i\omega \frac{\pi}{2\omega_0}} [A\pi\delta(\omega - \omega_0) + A\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} A\pi\delta(\omega - \omega_0) + e^{i\frac{\pi}{2}} A\pi\delta(\omega + \omega_0) \\ &= -iA\pi\delta(\omega - \omega_0) + iA\pi\delta(\omega + \omega_0),\end{aligned}$$

seperti pada (2.16)

### Pergeseran Frekuensi

Jika frekuensi dalam  $\widehat{f}(\omega)$  digeser sebesar  $a$ , inversnya dikalikan dengan faktor  $e^{iat}$ . Karena

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega - a)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega - a) e^{i\omega t} f(t) d\omega,$$

dengan mengganti  $\varpi = \omega - a$ , kita mempunyai

$$\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega - a)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\varpi) e^{i(\varpi+a)t} d\varpi = e^{iat} f(t)$$

atau

$$\widehat{f}(\omega - a) = F\{e^{iat} f(t)\}.$$

Untuk mengilustrasikan efek dari pergeseran frekuensi, marilah kita perhatikan kasus  $f(t)$  dikalikan dengan  $\cos \omega_0 t$ . Karena  $\cos \omega_0 t = (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})/2$ , maka

$$f(t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{i\omega_0 t} f(t) + \frac{1}{2} e^{-i\omega_0 t} f(t)$$

dan

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} &= \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f(t)\} + \frac{1}{2} \mathcal{F}\{e^{-i\omega_0 t} f(t)\} \\ &= \frac{1}{2} \widehat{f}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \widehat{f}(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

Proses ini dikenal sebagai modulasi. Dengan kata lain ketika  $f(t)$  dimodulasi oleh  $\cos \omega_0 t$ , frekuensinya akan bergeser ke atas dan ke bawah secara simetrik sebesar  $\omega_0$ .

### Penskalaan Waktu

Jika  $\mathcal{F}\{f(at)\} = \widehat{f}(\omega)$ , maka transformasi Fourier dari  $f(at)$  dapat ditentukan dengan mengganti  $t' = at$  dalam integral Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'/a} \frac{1}{a} dt' = \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

Pernyataan ini benar untuk  $a > 0$ . Tetapi untuk  $a$  negatif, maka  $t' = at = -|a|t$ . Sebagai sebuah konsekuensi, ketika variabel integrasi dirubah dari  $t$  menjadi  $t'$ , batas integral juga harus dirubah. Dalam artian

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(at)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'/a} \frac{1}{-|a|} dt' \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'/a} dt' = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$



Sehingga secara umum

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Hal ini berarti ketika skala waktu membesar, skala frekuensi bukan hanya berkontraksi mengecil, amplitudonya juga naik. Amplitudonya naik sedemikian rupa sehingga luas daerahnya tetap.

### Penskalaan Frekuensi

Hal ini hanyalah kebalikan dari penskalaan waktu. Jika  $\mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(\omega)\} = f(t)$ , maka

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(a\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(a\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega') e^{i\omega' t/a} \frac{1}{|a|} d\omega' = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right). \end{aligned}$$

Hal ini berarti ketika skala frekuensinya membesar, skala waktunya berkontraksi dan amplitudo fungsi waktu akan naik.

### 2.6.3 Transformasi Turunan

Jika transformasi turunan ke  $-n$  dari  $f^n(t)$  ada, maka  $f^n(t)$  haruslah terintegralkan sepanjang  $(-\infty, \infty)$ . Hal ini berarti  $f^n(t) \rightarrow 0$  ketika  $t \rightarrow \pm\infty$ . Dengan asumsi ini transformasi Fourier dari turunan  $f(t)$  dapat dinyatakan dalam suku transformasi  $f(t)$ . Hal ini tampak sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f'(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt \\ &= f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Suku terintegralkan sama dengan nol pada kedua batas. Maka

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \mathcal{F}\{f(t)\} = i\omega \widehat{f}(\omega).$$

Bisa diperoleh

$$\mathcal{F}\{f''(t)\} = i\omega \mathcal{F}\{f'(t)\} = (i\omega)^2 \mathcal{F}\{f(t)\} = (i\omega)^2 \widehat{f}(\omega).$$

Sehingga

$$\mathcal{F}\{f^n(t)\} = (i\omega)^n \mathcal{F}f(t) = (i\omega)^n \widehat{f}(\omega)$$

Maka turunan dalam domain waktu menjadi perkalian sederhana dalam domain frekuensi.

### 2.6.4 Transformasi Integral

Transformasi Fourier dari integral berikut

$$I(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

dapat dengan mudah diperoleh dengan menggunakan transformasi Fourier turunan. Karena

$$\frac{d}{dt}I(t) = f(t),$$

didapatkan

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{dI(t)}{dt}\right\} = i\omega\mathcal{F}\{I(t)\} = i\omega\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(x)dx\right\}.$$

Maka

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(x)dx\right\} = \frac{1}{i\omega}\mathcal{F}\{f(t)\}.$$

Sehingga integral dalam domain waktu menjadi pembagian dalam domain frekuensi.

### 2.6.5 Teorema Parseval

Teorema Parseval dalam deret Fourier juga berlaku untuk transformasi Fourier. Integral dari sebuah fungsi kuadrat dihubungkan dengan transformasi integral dari fungsi kuadrat dengan cara berikut

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Karena

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega,$$

kompleks konjugatnya

$$f^*(t) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \right]^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega)e^{-i\omega t} d\omega.$$

Maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \right] dt.$$

Dengan menukar integrasi  $\omega$  dan  $t$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^*(\omega)\hat{f}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Jika kita menuliskan dalam frekuensi  $\nu$ , bukan dalam frekuensi sudut  $\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ), teorema ini dapat dinyatakan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\nu)|^2 d\nu.$$

Dalam fisika, energi total yang berkaitan dengan sebuah bentuk gelombang  $f(t)$  (radiasi elektromagnetik, gelombang air, dll) sebanding dengan  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ . Dengan teorema Parseval, energi juga diberikan oleh  $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\nu)|^2 d\nu$ . Sehingga  $|\widehat{f}(\nu)|^2$  adalah energi tiap satuan interval frekuensi dan dikenal sebagai **rapat energi**. Untuk alasan ini, teorema Parseval juga dikenal sebagai teorema energi.

**Contoh 2.6.2.** Carilah nilai dari

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

dengan teorema Parseval dan transformasi Fourier dari

$$II_1(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1, \\ 0 & |t| > 1. \end{cases}$$

**Solusi 2.6.2.** Misalkan  $f(t) = II_1(t)$ , sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} = \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} II_1(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) = \frac{2 \sin \omega}{\omega} \end{aligned}$$

dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-1}^1 dt = 2.$$

Di sisi lain

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{2 \sin \omega}{\omega} \right|^2 d\omega = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega.$$

Dari teorema Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

kita mempunyai

$$2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega.$$

Dari sini

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega = \pi.$$

Karena  $\sin^2 \omega/\omega^2$  merupakan fungsi genap

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

## 2.7 Konvolusi

### 2.7.1 Operasi Matematik Konvolusi

Konvolusi merupakan konsep yang penting dan berguna. Konvolusi  $c(t)$  dari dua buah fungsi  $f(t)$  dan  $g(t)$  biasanya dituliskan sebagai  $f(t) * g(t)$  dan didefinisikan sebagai

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau = f(t) * g(t)$$

Operasi matematik konvolusi terdiri dari langkah sebagai berikut:

1. Lakukan pencerminan  $g(\tau)$  terhadap sumbu koordinat sehingga diperoleh  $g(-\tau)$ .
2. Geser  $g(-\tau)$  sebesar  $t$  sehingga diperoleh  $g(t-\tau)$ . Jika  $t$  positif, maka pergeseran ke arah kanan, dan jika negatif maka pergeseran ke arah kiri.
3. Kalikan fungsi tergeser  $g(t-\tau)$  dengan  $f(\tau)$ .
4. Luas di bawah hasil perkalian  $g(t-\tau)$  dengan  $f(\tau)$  adalah nilai konvolusi pada  $t$ .

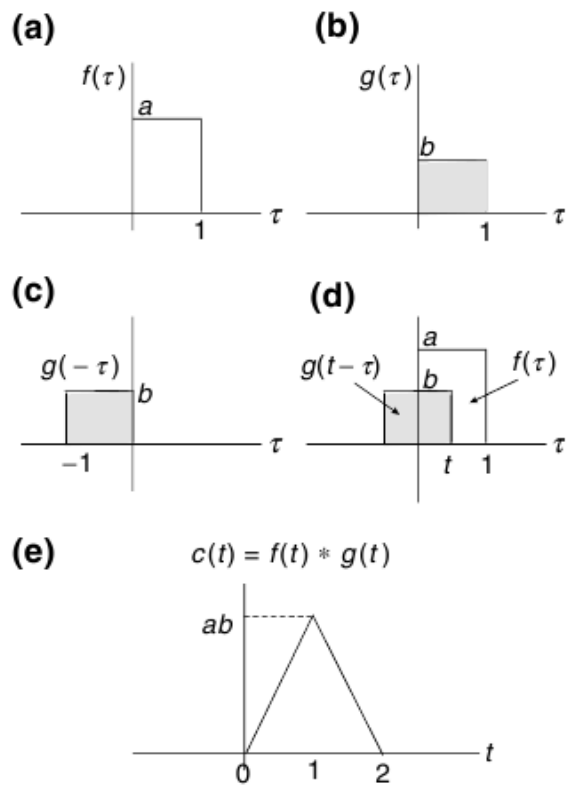
Marilah kita ilustrasikan dengan contoh sederhana pada Gambar 2.7. Misalkan  $f(\tau)$  diberikan pada **(a)** dan  $g(\tau)$  pada **(b)**. Citra pencerminan  $g(\tau)$  adalah  $g(-\tau)$  yang diberikan oleh **(c)**. Pada **(d)**,  $g(t-\tau)$  adalah  $g(-\tau)$  yang digeser sebesar  $t$ .

Jelas di sini bahwa jika  $t < 0$  maka tidak ada overlap antara  $f(\tau)$  dan  $g(t-\tau)$ . Hal ini berarti, untuk sebarang nilai  $\tau$ , baik  $f(\tau)$  maupun  $g(t-\tau)$ , atau keduanya nol. Karena  $f(\tau)g(t-\tau) = 0$  untuk  $t < 0$ , maka

$$c(t) = 0, \quad \text{jika } t < 0.$$

Antara  $t = 0$  dan  $t = 1$ , integral konvolusi sama dengan  $abt$

$$c(t) = abt, \quad 0 < t < 1.$$



Gambar 2.7: Konvolusi dari  $f(\tau)$  ditunjukkan pada (a) dan  $g(\tau)$  pada (b) dan diberikan pada (e).

Terdapat overlap penuh pada  $t = 1$ , sehingga

$$c(t) = ab \quad \text{pada } t = 1$$

Antara  $t = 1$  dan  $t = 2$ , overlapnya berkurang. Integral konvolusinya menjadi

$$c(t) = ab[1 - (t - 1)] = ab(2 - t), \quad \text{jika } 1 < t < 2.$$

Untuk  $t > 2$ , tidak terdapat overlap dan integral konvolusinya sama dengan nol. Sehingga konvolusi  $f(t)$  dan  $g(t)$  diberikan oleh segitiga pada (e).

## 2.7.2 Teorema Konvolusi

### Teorema Konvolusi Waktu

Teorema konvolusi waktu

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

dapat dibuktikan sebagai berikut.

Dari definisi

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right] e^{-i\omega t} dt.$$

Dengan menukar integrasi  $t$  dan  $\tau$

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt \right] d\tau.$$

Misalkan  $t - \tau = x$ ,  $t = x + \tau$ ,  $dt = dx$ , maka

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)e^{-i\omega t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega(x+\tau)} dx \\ &= e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega\tau}\hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}\hat{g}(\omega) = \hat{g}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \hat{g}(\omega)\hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

### Teorema Konvolusi Frekuensi

Teorema konvolusi frekuensi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)\} = 2\pi f(t)g(t).$$

Teorema ini pembuktiannya juga secara langsung. Dari definisi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\varpi) \hat{g}(\omega - \varpi) d\varpi \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\varpi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega - \varpi) e^{i\omega t} d\omega \right] d\varpi.\end{aligned}$$

Misalkan  $\omega - \varpi = \Omega$ ,  $\omega = \Omega + \varpi$ ,  $d\omega = d\Omega$ , maka

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\varpi) e^{i\varpi t} d\varpi \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \\ &= 2\pi f(t)g(t).\end{aligned}$$

Jelas bahwa teorema ini dapat dituliskan sebagai

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(\omega) * \hat{g}(\omega).$$

**Contoh 2.7.1.** (a). Gunakan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0), \\ \mathcal{F}\{I_a(t)\} &= \frac{2 \sin a\omega}{\omega},\end{aligned}$$

dan teorema konvolusi untuk mencari transformasi Fourier gelombang berikut

$$I_a(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t & |t| < a, \\ 0 & |t| > a, \end{cases}.$$

(b) Gunakan pengintegralan langsung untuk memverifikasi hasilnya.

**Solusi 2.7.1.** (a) Karena

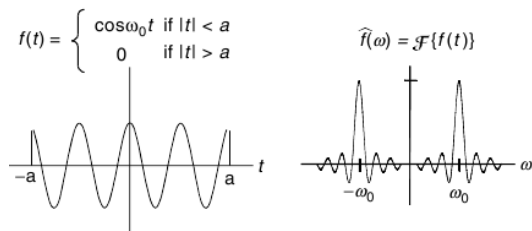
$$I_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a, \\ 0 & |t| > a, \end{cases}$$

sehingga kita bisa menuliskan  $f(t)$  sebagai

$$f(t) = \cos \omega_0 t \cdot I_a(t).$$

Menurut teorema konvolusi

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} * \mathcal{F}\{I_a(t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} [\pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - \omega_0)] * \frac{2 \sin a\omega}{\omega} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\omega' + \omega) + \delta(\omega' - \omega_0)] \frac{\sin a(\omega - \omega')}{(\omega - \omega')} d\omega' \\ &= \frac{\sin a(\omega + \omega_0)}{\omega + \omega_0} + \frac{\sin a(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0}.\end{aligned}$$



Gambar 2.8: Pasangan transformasi Fourier untuk gelombang cosinus berhingga.

(b) Dari definisi

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a \cos \omega_0 t e^{-i\omega t} dt.$$

Karena

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}),$$

sehingga

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a (e^{i(\omega_0 - \omega)t} + e^{-i(\omega_0 + \omega)t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{i(\omega_0 - \omega)} \Big|_{-a}^a - \frac{e^{i(\omega_0 + \omega)t}}{i(\omega_0 + \omega)} \Big|_{-a}^a \right] \\ &= \frac{\sin a(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin a(\omega + \omega_0)}{\omega + \omega_0}. \end{aligned}$$

Pasangan transformasi Fourier ini ditunjukkan pada Gambar 2.8.

**Contoh 2.7.2.** Carilah transformasi Fourier dari fungsi segitiga

$$f(t) = \begin{cases} t + 2a & -2a < t < 0, \\ -t + 2a & 0 < t < 2a, \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases}$$

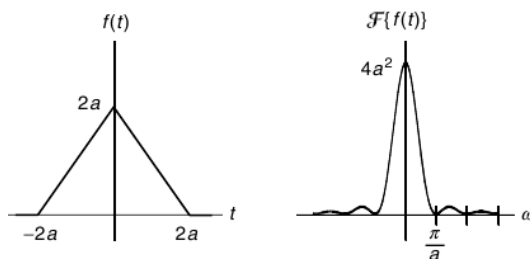
**Solusi 2.7.2.** Dengan mengikuti prosedur seperti pada Gambar 2.7, dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa fungsi segitiga merupakan konvolusi dari dua buah fungsi pulsa persegi identik

$$f(t) = \Pi_a(t) * \Pi_a(t).$$

Menurut teorema konvolusi waktu

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{\Pi_a(t) * \Pi_a(t)\} = \mathcal{F}\{\Pi_a(t)\}F\{\Pi_a(t)\}.$$





Gambar 2.9: Transformasi Fourier fungsi segitiga

Karena

$$\mathcal{F}\{\Pi_a(t)\} = \frac{2 \sin a\omega}{\omega},$$

maka

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{2 \sin a\omega}{\omega} \cdot \frac{2 \sin a\omega}{\omega} = \frac{4 \sin^2 a\omega}{\omega^2}.$$

Pasangan transformasi ditunjukkan pada Gambar 2.9.

Kita bisa memperoleh hasil yang sama dengan penghitungan langsung, tetapi akan jauh lebih rumit.

## 2.8 Transformasi Fourier dan Persamaan Diferensial

Sebuah sifat karakteristik dari transformasi Fourier adalah, sama seperti transformasi integral yang lain, yaitu dapat digunakan untuk mereduksi jumlah variabel bebas dalam persamaan diferensial sebanyak satu. Sebagai contoh, jika kita menggunakan transformasi pada persamaan diferensial biasa (yang hanya memiliki satu buah variabel bebas), maka kita memperoleh sebuah persamaan aljabar untuk fungsi yang ditransformasikan. Persamaan gelombang satu dimensi adalah persamaan diferensial parsial dengan dua buah variabel bebas. Persamaan ini dapat ditransformasikan menjadi persamaan diferensial biasa. Biasanya jauh lebih mudah menyelesaikan persamaan dalam bentuk yang telah ditransformasikan dibandingkan dengan menyelesaikannya secara langsung dalam bentuk asalnya, karena variabelnya sudah berkurang satu. Setelah bentuknya didapatkan, kita bisa memperoleh solusi dari persamaan asalnya dengan transformasi inversnya. Kita akan mengilustrasikan metode ini dalam dua contoh berikut.

**Contoh 2.8.1.** Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$y''(t) - a^2y(t) = f(t)$$

dengan  $a$  sebuah konstanta dan  $f(t)$  fungsi yang diberikan. Syarat yang harus dipenuhi adalah fungsi tersebut hilang ketika  $t \rightarrow \pm\infty$ . Hal ini menjamin transformasi Fouriernya ada.

**Solusi 2.8.1.** Lakukan transformasi Fourier pada persamaan dan misalkan

$$\widehat{y}(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}, \quad \widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}.$$

Karena

$$\mathcal{F}\{y''\} = (i\omega)^2 \mathcal{F}\{y(t)\} = -\omega^2 \widehat{y}(\omega),$$

persamaan diferensialnya menjadi

$$-(\omega^2 + a^2)\widehat{y}(\omega) = \widehat{f}(\omega).$$

Maka

$$\widehat{y}(\omega) = -\frac{1}{(\omega^2 + a^2)} \widehat{f}(\omega)$$

Ingat kembali

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{(\omega^2 + a^2)},$$

sehingga

$$-\frac{1}{(\omega^2 + a^2)} = \mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{1}{2a}e^{-a|t|}\right\}.$$

Dengan kata lain jika kita mendefinisikan

$$\widehat{g}(\omega) = -\frac{1}{(\omega^2 + a^2)}, \quad \text{maka} \quad g(t) = -\frac{1}{2a}e^{-a|t|}.$$

Menurut teorema konvolusi

$$\widehat{g}(\omega)\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{g(t) * f(t)\}.$$

Karena

$$\widehat{y}(\omega) = -\frac{1}{(\omega^2 + a^2)} \widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{g(t) * f(t)\},$$

kita memperoleh

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{y}(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{g(t) * f(t)\} = g(t) * f(t).$$

Sehingga

$$y(t) = -\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t-\tau|} f(\tau) d\tau,$$

yang merupakan solusi khusus dari persamaan. Dengan  $f(t)$  tertentu persamaan ini bisa dihitung.

**Contoh 2.8.2.** Gunakan transformasi Fourier untuk menyelesaikan persamaan gelombang klasik satu dimensi

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

dengan kondisi awal

$$y(x, 0) = f(x) \quad (2.18)$$

dengan  $v^2$  konstan.

**Solusi 2.8.2.** Marilah kita lakukan analisis Fourier  $y(x, t)$  terhadap  $x$ . Pertama nyatakan  $y(x, t)$  dalam integral Fourier

$$y(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(k, t) e^{ikx} dk, \quad (2.19)$$

sehingga transformasi Fouriernya

$$\hat{y}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (2.20)$$

Dari (2.18) dan (2.19) yaitu

$$y(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(k, 0) e^{ikx} dk = f(x). \quad (2.21)$$

Karena integral Fourier  $f(x)$  adalah

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk, \quad (2.22)$$

jelas

$$\hat{y}(k, 0) = \hat{f}(k). \quad (2.23)$$

Dengan melakukan transformasi Fourier persamaan asalnya

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} e^{-ikx} dx.$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{-ikx} dx.$$

Suku pertama hanyalah transformasi Fourier turunan kedua  $y(x, t)$  terhadap  $x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{-ikx} dx = (ik)^2 \hat{y}(k, t),$$

sehingga persamaannya menjadi

$$-k^2 \hat{y}(k, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{y}(k, t).$$

Jelas solusi umum persamaannya adalah

$$\hat{y}(k, t) = c_1(k)e^{ikvt} + c_2(k)e^{-ikvt},$$

dengan  $c_1(k)$  dan  $c_2(k)$  konstanta yang bergantung waktu. Pada  $t = 0$ , menurut (2.23)

$$\hat{y}(k, 0) = c_1(k) + c_2(k) = \hat{f}(k).$$

Persamaan ini dapat dipenuhi dengan bentuk simetrik dan anti simetrik

$$\begin{aligned} c_1(k) &= \frac{1}{2} [\hat{f}(k) + \hat{g}(k)], \\ c_2(k) &= \frac{1}{2} [\hat{f}(k) - \hat{g}(k)], \end{aligned}$$

dengan  $\hat{g}(k)$  fungsi yang belum didefinisikan. Sehingga

$$\hat{y}(k, t) = \frac{1}{2} \hat{f}(k)(e^{ikvt} + e^{-ikvt}) + \frac{1}{2} \hat{g}(k)(e^{ikvt} - e^{-ikvt}).$$

Substitusi pada (2.19), kita memiliki

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{f}(k) [e^{ik(x+vt)} + e^{ik(x-vt)}] dk \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \hat{g}(k) [e^{ik(x+vt)} - e^{ik(x-vt)}] dk. \end{aligned}$$

Dengan membandingkan integralnya

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ik(x+vt)} dk$$

dengan (2.22), kita melihat integralnya sama hanya argumen  $x$  diganti dengan  $x + vt$ . Sehingga

$$I_1 = f(x + vt)$$

Diperoleh:

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + vt) + f(x - vt)] + \frac{1}{2} [g(x + vt) - g(x - vt)],$$

dengan  $g(x)$  adalah invers transformasi Fourier dari  $\hat{g}(k)$ . Fungsi  $g(x)$  ditentukan oleh kondisi awal atau syarat batas tambahan.

## 2.9 Ketidakpastian Gelombang

Transformasi Fourier membuat kita bisa memecah gelombang yang rumit bahkan non periodik dan menjadikannya gelombang sederhana. Cara melakukannya adalah dengan mengasumsikan gelombangnya berupa fungsi periodik dengan periode tertentu yang berhingga. Karena tidak mungkin mengamati gelombang dalam waktu tak berhingga, kita harus melakukan analisis berdasarkan observasi pada waktu yang berhingga. Konsekuensinya, kita tidak bisa yakin 100% dengan karakteristik gelombang tersebut.

Sebagai contoh, sebuah fungsi konstan  $f(x)$  tidak memiliki osilasi, sehingga frekuensinya nol. Sehingga transformasi Fouriernya  $\hat{f}$  adalah sebuah fungsi delta pada  $\omega = 0$ , seperti terlihat pada Gambar 2.2. Tetapi hal ini hanya berlaku untuk sebuah fungsi yang konstan dari  $-\infty$  ke  $\infty$ . Tetapi tentu kita tidak yakin akan hal ini. Apa yang kita katakan adalah fungsi tersebut konstan pada selang waktu tertentu  $\Delta t$ . Hal ini direpresentasikan dengan pulsa persegi/kotak pada Gambar 2.4. Di luar selang waktu ini, kita tidak memiliki informasi, sehingga fungsinya kita berikan nilai nol. Transformasi Fourier fungsi ini adalah  $2 \sin a\omega/\omega$ . Seperti yang terlihat pada Gambar 2.4 terdapat penyebaran frekuensi di sekitar  $\omega = 0$ . Dengan kata lain terdapat ketidakpastian frekuensi gelombang. Kita dapat mengatakan ketidakpastian dengan mengukur lebar  $\Delta\omega$  dari puncak pusatnya. Dalam contoh ini  $\Delta t = 2a$ ,  $\Delta\omega = 2\pi/a$ . Menarik untuk memperhatikan bahwa  $\Delta t \Delta\omega = 4\pi$  yang merupakan sebuah konstanta. Karena sebuah konstanta, maka nilainya tidak bisa nol, tidak peduli seberapa besar atau kecilnya  $\Delta t$ . Sehingga akan selalu terdapat derajat ketidakpastian.

Menurut mekanika kuantum, foton atau elektron, dapat kita anggap sebagai gelombang. Sebagai gelombang, maka akan terdapat ketidakpastian yang berlaku untuk semua gelombang. Sehingga dalam dunia subatomik, fenomena hanya dapat dideskripsikan dengan presisi selang yang mengijinkan adanya ketidakpastian gelombang. Hal ini dikenal sebagai prinsip ketidakpastian yang pertama kali dikemukakan oleh Werner Heisenberg.

Dalam mekanika kuantum, jika  $f(t)$  fungsi gelombang ternormalisasi, yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1,$$

maka nilai ekspektasi  $\langle t^n \rangle$  yang didefinisikan sebagai

$$\langle t^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 t^n dt.$$

Ketidakpastian  $\Delta t$  diberikan oleh “akar rata-rata kuadrat” yaitu

$$\Delta t = \left\langle t^2 - \langle t \rangle^2 \right\rangle^{1/2}.$$

Jika  $\widehat{f}(\omega)$  adalah transformasi Fourier dari  $f(t)$ , maka menurut teorema Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi.$$

Sehingga nilai ekspektasi dari  $\langle \omega^n \rangle$  diberikan oleh

$$\langle \omega^n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 \omega^n d\omega.$$

Dengan cara yang sama ketidakpastian  $\Delta\omega$  adalah

$$\Delta\omega = \langle \omega^2 - \langle \omega \rangle^2 \rangle^{1/2}.$$

Jika  $f(t)$  diberikan oleh fungsi Gaussian ternormalisasi

$$f(t) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \exp(-at^2),$$

jelas bahwa  $\langle t \rangle = 0$ , karena integran dari  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 t dt$  adalah fungsi ganjil, dan  $\Delta t = \langle t^2 \rangle^{1/2}$ . Dengan definisi

$$\langle t^2 \rangle = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2at^2) t^2 dt.$$

Dengan mengintegrasikan parsial, kita bisa memperoleh

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2at^2) t^2 dt &= -\frac{1}{4a} t \exp(-2at^2) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{4a} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2at^2) dt \\ &= \frac{1}{4a} \left(\frac{1}{2a}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) = \frac{1}{4a} \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Maka

$$\Delta t = \langle t^2 \rangle^{1/2} = \left[ \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2a} \left(\frac{\pi}{2a}\right)^{1/2} \right]^{1/2} = \left(\frac{1}{4a}\right)^{1/2}.$$

Sekarang

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4a}\right).$$

Sehingga  $\langle \omega \rangle = 0$  dan

$$\begin{aligned} \langle \omega^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int |\widehat{f}(\omega)|^2 \omega^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2a}\right) \omega^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{a}\right) a(2a\pi)^{1/2} = a \end{aligned}$$

Maka

$$\Delta\omega = \langle \omega^2 \rangle^{1/2} = (a)^{1/2}$$

Kemudian kita mempunyai

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = \left( \frac{1}{4a} \right)^{1/2} (a)^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Seperti yang sudah kita diskusikan bahwa apabila variabel  $t$  (merepresentasikan waktu) kita ganti dengan variabel  $x$  (merepresentasikan jarak), frekuensi sudut  $\omega$  kita ganti dengan bilangan gelombang  $k$ . Hubungan ini bisa kita tuliskan sebagai

$$\Delta x \cdot \Delta k = \frac{1}{2}.$$

Dua buah hubungan fundamental dalam mekanika kuantum adalah

$$E = \hbar \omega \quad \text{dan} \quad p = \hbar k,$$

dengan  $E$  adalah energi,  $p$  momentum dan  $\hbar$  adalah konstanta Planck yaitu  $h/2\pi$ . Sehingga ketidakpastian energi adalah  $\Delta E = \hbar \Delta \omega$  dan ketidakpastian momentum  $\Delta p = \hbar \Delta k$ . Dengan gelombang Gaussian kita memiliki

$$\Delta t \cdot \Delta E = \frac{\hbar}{2} \quad \Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

Karena tidak ada bentuk fungsi gelombang yang dapat mereduksi ketidakpastian di bawah nilai ini, hubungan ini biasanya dituliskan sebagai

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

yang merupakan pernyataan formal dari prinsip ketidakpastian dalam mekanika kuantum.

## 2.10 Latihan

1. Gunakan sebuah fungsi ganjil untuk menunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \pi \omega}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}.$$

2. Gunakan sebuah fungsi genap untuk menunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} \, d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-t}.$$

3. Tunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t + \omega \sin \omega t}{1 + \omega^2} \, d\omega = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & t = 0, \\ \pi, e^{-t} & t > 0. \end{cases}$$

4. Tunjukkan bahwa

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi \omega \sin \omega t}{1 - \omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi \sin t}{2} & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}.$$

5. Carilah integral Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < a, \\ 0 & t > a. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega \cos \omega t}{\omega} d\omega.$$

6. Carilah integral Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < a, \\ 0 & t > a. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{a \sin a\omega}{\omega} + \frac{\cos a\omega - 1}{\omega^2} \right) \cos \omega t d\omega.$$

7. Carilah integral Fourier dari

$$f(t) = e^{-t} + e^{-2t}, \quad t > 0.$$

$$\text{Jawab: } f(t) = \frac{6}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 + \omega^2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} \cos \omega t d\omega.$$

8. Carilah integral Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t < a, \\ 0 & t > a. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \left( a^2 - \frac{2}{\omega^2} \right) \sin a\omega + \frac{2a}{\omega} \cos a\omega \right] \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega.$$

9. Carilah transformasi Fourier cosinus dan sinus dari

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1, \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } \hat{f}_s = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos \omega}{\omega}, \quad \hat{f}_c = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

10. Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 < t, \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } \frac{1}{(1 + i\omega)}.$$



11. Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & |t| < 1, \\ 0 & 1 < |t|. \end{cases}$$

Jawab:  $\left( \frac{2e^{i\omega}}{i\omega} + \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{\omega^2} \right)$ .

12. Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} e^t & |t| < 1, \\ 0 & 1 < |t|. \end{cases}$$

Jawab:  $\frac{e^{1-i\omega} - e^{-1+i\omega}}{1-i\omega}$ .

13. Tunjukkan bahwa jika  $f(t)$  fungsi genap, maka transformasi Fourier menjadi transformasi Fourier cosinus, jika  $f(t)$  fungsi ganjil, maka transformasi Fourier menjadi transformasi Fourier sinus.

Perhatikan bahwa konstanta pengali  $\alpha$  dan  $\beta$  bisa berbeda dengan apa yang sudah kita definisikan. Tetapi ingat sepanjang hasil kali  $\alpha \times \beta = 2/\pi$ , maka transformasinya ekuivalen.

14. Jika  $\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ , tunjukkan bahwa

$$\mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\} = \frac{d^n}{d\omega^n} \widehat{f}(\omega).$$

Petunjuk: Buktikan terlebih dahulu  $\frac{d\widehat{f}}{d\omega} = -i\mathcal{F}\{tf(t)\}$ .

15. Tunjukkan bahwa

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\} = -i \int_{-\infty}^{\omega} \widehat{f}(\omega') d\omega'.$$

16. (a) Carilah konstanta normalisasi  $A$  dari fungsi Gaussian  $\exp(-at^2)$  sehingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A \exp(-at^2)|^2 dt = 1.$$

(b) Carilah transformasi Fourier  $\widehat{f}(\omega)$  dari sebuah fungsi Gaussian dan buktikan teorema Parseval dengan integrasi eksplisit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi.$$

Jawab:  $A = (2a/\pi)^{1/4}$ .

17. Gunakan transformasi Fourier dari  $\exp(-|t|)$  dan teorema Parseval untuk menunjukkan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(1 + \omega^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

18. (a) Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |\frac{t}{2}| & -2 < t < 2, \\ 0 & \text{lainnya,} \end{cases}.$$

- (b) Gunakan hasil (a) dan teorema Parseval untuk menghitung integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^4 dt.$$

Jawab:  $I = 2\pi/3$ .

19. Fungsi  $f(r)$  memiliki transformasi Fourier

$$\widehat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2}.$$

Tentukan  $f(r)$ .

Jawab:  $f(r) = \frac{1}{4\pi r}$ .

20. Carilah transformasi Fourier dari

$$f(t) = te^{-4t^2}.$$

Jawab:  $\widehat{f}(\omega) = -i \frac{\sqrt{\pi}}{16} \omega e^{-\omega^2/16}$ .

21. Carilah invers transformasi Fourier dari

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-2|\omega|}.$$

Jawab:  $f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t^2 + 4}$ .

22. Hitunglah

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{\omega^2 + 4\omega + 13} \right\}.$$

Petunjuk:  $\omega^2 + 4\omega + 13 = (\omega + 2)^2 + 9$ .

Jawab:  $f(t) = \frac{1}{6} e^{-i2t} e^{-3|t|}$ .

## II

# Teori Sturm-Liouville dan Fungsi Khusus



# 3

## Fungsi Ortogonal dan Persamaan Sturm-Liouville

Dalam deret Fourier kita telah melihat bahwa sebuah fungsi bisa dinyatakan dalam deret sinus dan kosinus tak hingga. Ini dimungkinkan karena fungsi trigonometrik membentuk himpunan ortogonal lengkap.

Konsep fungsi ortogonal merupakan generalisasi yang alami dari konsep himpunan vektor ortogonal. Faktanya, sebuah fungsi bisa dianggap sebagai vektor tergeneralisasi dalam ruang vektor tak hingga dan vektor basisnya adalah sinus dan kosinus. Hal ini membuat kita bertanya dari mana basis tersebut berasal. Apakah terdapat basis yang lain? Dalam bab ini kita akan mempelajari basis-basis tersebut berasal dari fungsi eigen operator diferensial linier *self-adjoint* (Hermitian), sama seperti matriks Hermitian  $n \times n$  memberikan kita himpunan vektor eigen yang merupakan basis ortogonal untuk ruang berdimensi- $n$ .

Banyak persoalan fisis bisa dideskripsikan dengan persamaan diferensial yang bisa dinyatakan dalam bentuk yang dikenal sebagai persamaan Sturm-Liouville. Kita akan mempelajari dengan syarat batas tertentu dari solusi persamaan, operator Sturm-Liouville merupakan operator *self-adjoint*. Oleh karena itu banyak himpunan fungsi ortogonal bisa dibangkitkan oleh persamaan Sturm-Liouville. Jika kita melihat dengan teori Sturm-Liouville yang lebih luas, deret Fourier hanyalah kasus khusus.

Banyak persamaan Sturm-Liouville sangatlah penting dalam fisika matematik, yang memiliki nama tertentu. Solusi persamaan ini dikenal sebagai fungsi khusus. Dalam bab ini kita akan mempelajari asal dan sifat-sifat fungsi khusus yang biasanya dijumpai dalam fisika matematik. Pembahasan lebih rinci dari fungsi paling penting diberikan dalam bab berikutnya.

## 3.1 Fungsi sebagai Vektor dalam Ruang Vektor Dimensi Tak Hingga

### 3.1.1 Ruang Vektor

Ketika kita membangun sistem bilangan, pertama kita menemukan penjumlahan dan perkalian bilangan bulat positif memenuhi aturan tertentu berkaitan dengan urutan penghitungan bisa dilakukan. Kemudian kita menggunakan aturan ini untuk mendefinisikan kelas bilangan yang lebih luas.

Di sini kita akan melakukan hal yang sama dengan vektor. Berdasarkan pada vektor biasa tiga dimensi, kita mengabstraksikan aturan-aturan yang dipenuhi oleh vektor. Kemudian kita menggunakan aturan-aturan ini sebagai definisi ruang vektor. Objek sebarang yang memenuhi aturan ini dinamakan membentuk ruang vektor linier.

Sebagai sebuah konsekuensi dari definisi vektor biasa, kesemuanya memenuhi aturan sebagai berikut:

- Penjumlahan vektor bersifat komutatif dan asosiatif

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).\end{aligned}$$

- Perkalian dengan skalar bersifat distributif dan asosiatif:

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, \\ (\alpha + \beta)\mathbf{a} &= \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}, \\ \alpha(\beta\mathbf{a}) &= (\alpha\beta)\mathbf{a},\end{aligned}$$

dengan  $\alpha$  dan  $\beta$  skalar sebarang.

- Terdapat vektor null  $\mathbf{0}$  sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

- Semua vektor  $\mathbf{a}$  mempunyai vektor negatifnya  $-\mathbf{a}$  sedemikian rupa sehingga

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

- Perkalian dengan skalar satuan tidak mengubah vektor

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

- Perkalian dengan nol memberikan vektor null

$$0\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Sekarang marilah kita perhatikan semua fungsi yang berperilaku baik  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$ , ... terdefinisi pada selang  $a \leq x \leq b$ . Jelaslah, kesemuanya membentuk sebuah ruang vektor linier, karena bisa dibuktikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= g(x) + f(x), \\ [f(x) + g(x)] + h(x) &= f(x) + [g(x) + h(x)], \\ \alpha[f(x) + g(x)] &= \alpha f(x) + \alpha g(x), \\ (\alpha + \beta)f(x) &= \alpha f(x) + \beta f(x), \\ \alpha(\beta f(x)) &= (\alpha\beta)f(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) + 0 &= f(x). \\ f(x) + (-f(x)) &= 0. \\ 1 \times f(x) &= f(x). \\ 0 \times f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga sebuah kumpulan semua fungsi dari  $x$  yang terdefinisi dalam selang tertentu dari  $x$  merupakan sebuah ruang vektor.

**Dimensi Ruang Vektor**

Sebuah vektor tiga dimensi biasa  $\mathbf{v}$  dinyatakan dengan tiga buah komponennya  $(v_1, v_2, v_3)$ . Ini juga bisa dianggap sebagai sebuah fungsi dengan tiga buah nilai yang berbeda  $[v(1), v(2), v(3)]$ . Sebuah vektor berdimensi  $n$  didefinisikan dengan  $n$ -tuples  $[v(1), v(2), \dots, v(n)]$  seperti yang sudah kita lihat dalam teori matriks. Sekarang fungsi  $f(x)$  merupakan sebuah vektor, berapakah dimensinya?

Marilah kita bayangkan mengaproksimasi fungsi  $f(x)$  antara  $a \leq x \leq b$  dengan membaginya secara konstan. Bagi selang  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ) menjadi  $n$  bagian yang sama. Aproksimasi fungsi dengan deretan nilai  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ , dengan  $f_i$  adalah nilai  $f(x)$  pada titik ujung sebelah kiri dari subselang ke- $i$ , kecuali pada  $f_n$  yang nilainya  $f(b)$ . Sebagai contoh, jika kita mengaproksimasi  $f(x) = 1 + x$  dalam selang  $0 \leq x \leq 1$  dengan membagi selang menjadi dua bagian yang sama, maka  $f(x)$  diaproksimasi dengan  $[f(0), f(0.5), f(1)]$ , atau  $(1, 1.5, 2.0)$ . Jelaslah ini merupakan aproksimasi yang sangat buruk. Aproksimasi yang lebih baik adalah dengan membagi selang menjadi sepuluh bagian yang sama dan mengaproksimasi fungsi dengan 11 tuples bilangan  $(1, 1.1, 1.2, \dots, 2)$ . Karena fungsinya terdefinisi untuk semua nilai  $x$  yang mungkin antara 0 dan 1, yang terdiri dari nilai  $x$  yang tak hingga dari 0 ke 1, fungsinya dinyatakan dengan  $n$ - tuples bilangan dengan  $n \rightarrow \infty$ . Dengan pemahaman ini, kita mengatakan fungsi merupakan sebuah vektor dalam ruang vektor berdimensi tak hingga.

### 3.1.2 *Inner Product* dan Ortogonalitas

Sejauh ini kita belum menyebut perkalian titik vektor. Perkalian titik yang juga disebut sebagai *inner product* atau perkalian skalar. Biasanya kita menuliskan sebagai  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  atau sebagai  $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$  atau  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Sebuah ruang vektor tidak harus memiliki sebuah perkalian titik. Tetapi sebuah fungsi ruang tanpa sebuah perkalian titik yang didefinisikan merupakan sebuah ruang vektor yang sangat besar untuk digunakan dalam aplikasi fisika.

Jika kita memilih untuk memperkenalkan sebuah perkalian titik untuk fungsi ruang, bagaimana cara mendefinisikannya? Kita membuang sifat-sifat perkalian titik vektor yang kita kenal dengan aksioma dan mengharuskan ruang vektor sebarang memenuhi aksioma-aksioma ini.

Dari definisi perkalian titik vektor tiga dimensi  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{j=1}^3 u_j v_j,$$

bisa dengan mudah kita deduksi bahwa perkalian titik adalah

- komutatif

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

- dan linier

$$(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \beta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}).$$

Norm (atau panjang) vektor didefinisikan sebagai

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \left( \sum_{j=1}^3 u_j u_j \right)^{1/2}.$$

- jadi norm definit positif

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0, \quad \text{untuk } \mathbf{u} \neq 0.$$

Dalam ruang kompleks, komponen vektor bisa bernilai kompleks. Seperti yang sudah kita lihat dalam teori matriks, perkalian titik dalam ruang kompleks didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1^* v_1 + u_2^* v_2 + u_3^* v_3 = \sum_{j=1}^3 u_j^* v_j,$$

dengan  $u^*$  adalah konjugat kompleks dari  $u$ . Jadi dalam ruang kompleks,



- Aturan komutatif  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$  digantikan dengan

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^*. \tag{3.1}$$

Ini mengikuti fakta bahwa

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^3 u_j^* v_j = \sum_{j=1}^3 (u_j v_j^*)^* = \left( \sum_{j=1}^3 v_j^* u_j \right)^* = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^*.$$

Oleh karena itu jika  $\alpha$  bilangan kompleks maka

$$(\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \alpha^* (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}), \tag{3.2}$$

$$(\mathbf{u} \cdot \alpha \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}). \tag{3.3}$$

Sekarang jika kita menggunakan sifat-sifat ini sebagai aksioma untuk mendefinisikan perkalian titik yang lebih luas, maka kita bisa melihat untuk dua buah vektor berdimensi- $n$   $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  dalam ruang kompleks, rumus

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1^* w_1 + u_2^* w_2 + \dots + u_n^* v_n w_n = \sum_{j=1}^n u_j^* v_j w_j \tag{3.4}$$

juga merupakan perkalian titik yang terlegitimasi sepanjang  $w_j$  konstanta positif tetap untuk tiap  $j$ .

marilah kita gunakan ruang riil dua dimensi sebagai ilustrasi. Anggap  $\mathbf{u} = (1, 2)$  dan  $\mathbf{v} = (3, -4)$  dengan  $w_1 = 2$ ,  $w_2 = 3$ , maka

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(3)(2) + (2)(-4)(3) = -18,$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (3)(1)(2) + (-4)(2)(3) = -18,$$

sesuai dengan aksioma  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ .

Di sisi lain jika  $w_1 = 2$ ,  $w_2 = -3$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (1)(1)(2) + (2)(2)(-3) = -10,$$

melanggar aksioma  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$  untuk  $\mathbf{u} \neq 0$ .

Bisa diverifikasi bahwa dengan nilai positif riil  $w_j$ , (3.4) memenuhi semua aksioma perkalian titik.  $w_j$  dikenal sebagai “bobot” karena ini memberikan bobot yang lebih atau kurang pada komponen yang berbeda dari vektor. Jelaslah semua  $w_j$  bisa sama dengan satu. Dalam banyak kasus, inilah yang kita tinjau.

Untuk mendefinisikan perkalian titik dalam sebuah ruang fungsi dalam selang  $a \leq x \leq b$ , marilah kita bagi selang menjadi  $n - 1$  bagian yang sama dan bayangkan bahwa fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$  diaproksimasi secara konstan seperti sebelumnya:

$$f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

$$g(x) = (g_1, g_2, \dots, g_n).$$

Kita bisa mengadopsi perkalian titik sebagai

$$\langle f|g \rangle = \sum_{j=1}^n f_j^* g_j \Delta x_j$$

dengan  $\Delta x_j$  merupakan lebar sub selang. Dengan menganggap  $\Delta x_j$  sebagai bobot, definisi ini sesuai dengan (3.4). Jika kita memilih  $n \rightarrow \infty$ , jumlah ini menjadi sebuah integral

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x) dx.$$

Bobot juga bisa berupa  $w(x) dx$ , sepanjang  $w(x)$  berupa fungsi riil positif. Dalam kasus tersebut, perkalian titik didefinisikan sebagai

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)w(x) dx.$$

Ini adalah definisi umum perkalian titik sebuah fungsi ruang vektor berdimensi tak hingga. Bisa dengan mudah dibuktikan bahwa definisi ini memenuhi semua aksioma perkalian titik. Seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya, dalam berbagai persoalan fungsi bobot  $w(x)$  sama dengan satu untuk semua  $x$ . Kita juga menekankan di sini pendekatan heuristik bukanlah penurunan maupun pembuktian, ini hanya memberikan motivasi untuk definisi.

Dua buah fungsi dikatakan ortogonal dalam selang  $a$  dan  $b$  jika

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)w(x) dx = 0.$$

Norm sebuah fungsi didefinisikan sebagai

$$\|f\| = \langle f|f \rangle^{1/2} = \left[ \int_a^b f^*(x)f(x)w(x) dx \right]^{1/2} = \left[ \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right]^{1/2}.$$

Fungsinya dikatakan ternormalisasi jika

$$\|f\| = 1.$$

Sebuah ruang vektor berdimensi tak hingga dari fungsi, dengan perkalian titik yang terdefinisi disebut ruang Hilbert. Dalam mekanika kuantum, semua fungsi gelombang yang terlegitimasi berada dalam ruang Hilbert.

### 3.1.3 Fungsi Ortogonal

#### Himpunan Ortonormal

Kumpulan fungsi  $\{\psi_n(x)\}$  dengan  $n = 1, 2, \dots$  dikenal sebagai himpunan ortonormal jika  $\langle \psi_n|\psi_m \rangle = 0$  jika  $n \neq m$ .

Bagi tiap fungsi dengan norm-nya

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\|\psi_n\|} \psi_n(x),$$

kita mempunyai sebuah himpunan ortonormal  $\{\phi_n(x)\}$  yang memenuhi hubungan

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}.$$

Perlu diperhatikan bahwa fungsi dalam himpunan dan perkalian titiknya terdefinisi pada selang  $x$  yang sama.

Sebagai contoh, dengan sebuah fungsi bobot  $w(x) = 1$ , himpunan fungsi  $\{\sin \frac{n\pi x}{L}\}$  dengan  $(n = 1, 2, \dots)$  ortogonal dalam selang  $0 \leq x \leq L$  karena

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{L}{2}, & n = m \end{cases}.$$

Lebih dari itu  $\{\phi_n(x)\}$  dengan

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

merupakan himpunan ortonormal dalam selang  $(0, L)$ .

### Ortogonalisasi Gram-Schmidt

Dari himpunan fungsi  $\{u_n(x)\}$  yang bebas linier (tetapi tidak ortogonal), himpunan ortonormal  $\{\phi_n(x)\}$  terhadap interval sebarang dan terhadap fungsi bobot sebarang bisa dibentuk dengan metode ortogonalisasi Gram-Schmidt. Prosedurnya mirip dengan apa yang sudah kita gunakan dalam konstruksi himpunan vektor eigen ortogonal matriks Hermitian.

Dari himpunan yang bebas linier  $\{u_n(x)\}$ , himpunan ortogonal  $\{\psi_n(x)\}$  bisa dibangun. Kita mulai dengan  $n = 0$ . Misalkan

$$\psi_0(x) = u_0(x)$$

dan normalisasikan kemudian hasilnya kita nyatakan sebagai  $\phi_0$

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\left[ \int |\psi_0(x)|^2 w(x) dx \right]^{1/2}} \psi_0(x).$$

Jelaslah,

$$\int |\psi_0(x)|^2 w(x) dx = \frac{1}{\left[ \int |\psi_0(x)|^2 w(x) dx \right]} \int |\psi_0(x)|^2 w(x) dx = 1.$$

Untuk  $n = 1$ , misalkan

$$\psi_1(x) = u_1(x) + \alpha_{10}\psi_0(x)$$

kita mensyaratkan  $\phi_1(x)$  ortogonal terhadap  $\phi_0(x)$ ,

$$\int \phi_0^*(x)\psi_1(x)w(x) dx = \int \phi_0^*(x)u_1(x)w(x) dx + a_{10} \int |\phi_0(x)|^2 w(x) dx = 0.$$

Karena  $\phi_0$  ternormalisasi, kita mempunyai

$$a_{10} = - \int \phi_0^*(x)u_1(x)w(x) dx.$$

Dengan  $a_{10}$  dipilih sedemikian rupa,  $\psi_1(x)$  merupakan fungsi yang diketahui, yang bisa dinormalisasi. Misalkan

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\left[\int |\psi_1(x)|^2 w(x) dx\right]^{1/2}} \psi_1(x).$$

Untuk  $n = 2$ , misalkan

$$\psi_2(x) = u_2(x) + a_{21}\phi_1(x) + a_{20}\phi_0(x).$$

Syarat agar  $\psi_2(x)$  ortogonal terhadap  $\psi_1(x)$  dan  $\psi_0(x)$  adalah

$$a_{21} = - \int \phi_1^*(x)u_2(x)w(x) dx,$$

$$a_{20} = - \int \phi_0^*(x)u_2(x)w(x) dx.$$

Jadi  $\psi_2(x)$  diketahui. Jelaslah proses ini bisa dilanjutkan. Kita mengambil  $\psi_i$  sebagai fungsi ke- $i$  dari  $\{\psi_n(x)\}$  dan memilihnya sama dengan  $u_i$  ditambah dengan kombinasi linier yang baru saja ditentukan  $\psi_j, j = 0, 1, \dots, i - 1$  dan belum diketahui. Syarat bahwa  $\psi_i$  ortogonal terhadap  $\phi_j$  yang sebelumnya memberikan batasan cukup untuk menentukan koefisien yang belum diketahui. Kemudian  $\psi_i$  yang sudah ditentukan semuanya bisa dinormalisasikan menjadi satu dan langkah bisa diulangi untuk  $\psi_{i+1}$ . Dalam perkalian titik, prosedurnya bisa dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= u_0 & \phi_0 &= \psi_0 \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle^{-1/2}, \\ \psi_1 &= u_1 - \phi_0 \langle \phi_0 | u_1 \rangle & \phi_1 &= \psi_1 \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle^{-1/2}, \\ \psi_2 &= u_2 - \phi_1 \langle \phi_1 | u_2 \rangle - \phi_0 \langle \phi_0 | u_2 \rangle & \phi_2 &= \psi_2 \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle^{-1/2}, \\ & \vdots & & \\ \psi_i &= u_i - \phi_{i-1} \langle \phi_{i-1} | u_i \rangle - \dots & \phi_i &= \psi_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle^{-1/2}. \end{aligned}$$

Jelaslah  $\{\psi_n\}$  merupakan himpunan ortogonal dan  $\{\phi_n\}$  merupakan himpunan ortonormal.

**Contoh 3.1.1. Polinomial Legendre** Bentuklah sebuah himpunan ortonormal dari fungsi bebas linier  $u_n(x) = x^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  dalam selang  $-1 \leq x \leq 1$  dengan fungsi bobot  $w(x) = 1$ .

**Solusi 3.1.1.** Menurut proses Gram-Schmidt, fungsi tak ternormalisasi pertama dari himpunan ortogonal  $\{\psi_n\}$  adalah  $u_0$

$$\psi_0 = u_0 = 1.$$

Fungsi ternormalisasi pertama dari himpunan ortonormal  $\{\phi_n\}$  adalah

$$\phi_0 = \psi_0 \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle^{-1/2} = \psi_0 \left[ \int_{-1}^1 dx \right]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Fungsi berikutnya dalam himpunan ortogonal adalah

$$\psi_1 = u_1 - \phi_0 \langle \phi_0 | u_1 \rangle.$$

Karena

$$\langle \phi_0 | u_1 \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} x dx = 0,$$

jadi

$$\psi_1 = x$$

dan

$$\phi_1 = \psi_1 \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle^{-1/2} = x \left[ \int_{-1}^1 x^2 dx \right]^{-1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} x.$$

Lanjutkan prosesnya

$$\psi_2 = u_2 - \phi_1 \langle \phi_1 | u_2 \rangle - \phi_0 \langle \phi_0 | u_2 \rangle.$$

Karena

$$\langle \phi_1 | u_2 \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} x^3 dx = 0, \quad \langle \phi_0 | u_2 \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

jadi

$$\psi_2 = x^2 - 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{3} = x^2 - \frac{1}{3}$$

dan

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \psi_2 \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle^{-1/2} = \left( x^2 - \frac{1}{3} \right) \left[ \int_{-1}^1 \left( x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dx \right]^{-1/2} \\ &= \left( x^2 - \frac{1}{3} \right) \sqrt{\frac{45}{8}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \left( \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Fungsi berikutnya yang ternormalisasi adalah

$$\phi_3 = \sqrt{\frac{7}{2}} \left( \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right).$$

Kita bisa membuktikan bahwa

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$$

dengan  $P_n(x)$  adalah polinomial berorde  $n$  dan

$$P_n(1) = 1,$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}.$$

Polinomial ini dikenal sebagai polinomial Legendre. Polinomial ini paling berguna dan sering dijumpai dalam fungsi khusus pada fisika matematik. Untungnya, seperti yang akan kita lihat, terdapat banyak metode yang lebih mudah untuk menurunkannya.

Dalam contoh ini, kita telah menggunakan prosedur Gram-Schmidt untuk menata ulang himpunan fungsi bebas linier  $\{x^n\}$  ke dalam sebuah himpunan ortonormal untuk selang yang diberikan  $-1 \leq x \leq 1$  dan fungsi bobot yang diberikan  $w(x) = 1$ . Dengan menggunakan pilihan selang dan fungsi bobot yang lain, kita akan memperoleh himpunan polinomial ortogonal yang lain. Sebagai contoh, dengan himpunan fungsi yang sama  $\{x^n\}$  dan fungsi bobot yang sama  $w(x) = 1$ , jika selang kita pilih  $[0, 1]$  bukan  $[-1, 1]$ , proses Gram-Schmidt akan membawa kita kepada polinomial ortogonal lain yang dikenal sebagai polinomial Legendre tergeser  $\{P_n^s(x)\}$ . Dengan  $P_n^s(x)$  ternormalisasi sedemikian rupa sehingga  $P_n^s(x) = 1$ ,

$$P_n^s(x) = P_n \left( 2 \left( x - \frac{1}{2} \right) \right).$$

Beberapa polinomial Legendre tergeser pertama adalah sebagai berikut

$$P_0^s(x) = 1, \quad P_1^s(x) = 2x - 1, \quad P_2^s(x) = 6x^2 - 6x + 1.$$

Sebagai contoh lain, dengan fungsi bobot yang dipilih sebagai  $w(x) = e^{-x}$  dalam selang  $0 \leq x < \infty$ , himpunan ortonormal yang dibangun dari  $\{x^n\}$  dikenal sebagai polinomial Laguerre  $\{L_n(x)\}$ . Tiga buah polinomial Laguerre yang pertama adalah

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(2 - 4x + x^2).$$

Bisa dengan mudah dibuktikan bahwa

$$\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)e^{-x} dx = \delta_{nm}.$$

Kadang polinomial Laguerre didefinisikan dengan normalisasi

$$\int_0^{\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x} dx = \delta_{nm}(n!)^2.$$

Dalam kasus ini, tiga buah polinomial Laguerre yang pertama

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 2 - 4x + x^2.$$

Jelaslah himpunan ortogonal tak hingga sebuah fungsi bisa diperoleh dari  $\{x^n\}$  dengan proses Gram-Schmidt. Dengan fungsi bobot yang diberikan dan selang tertentu, proses Gram-Schmidt unik sampai konstanta pengali, positif atau negatif. Proses ini sulit. Untungnya, hampir semua polinomial ortogonal yang ditinjau yang dibentuk dengan metode ini merupakan solusi persamaan diferensial tertentu. Jadi semuanya bisa dibahas dalam perspektif persamaan diferensial.

## 3.2 Deret Fourier Umum

Dengan analogi ruang vektor dimensi berhingga, kita bisa memperhatikan himpunan fungsi ortonormal  $\{\phi_n(x)\}$  dengan  $(n = 0, 1, 2, \dots)$  pada selang  $a \leq x \leq b$  sebagai vektor basis dalam ruang vektor berdimensi tak hingga dari fungsi, yaitu

$$\langle \phi_m | \phi_n \rangle = \int_a^b \phi_m^*(x)\phi_n(x)w(x) dx = \delta_{nm}.$$

Jika bagian sebarang dari fungsi kontinu berhingga  $f(x)$  dalam selang yang sama bisa dinyatakan sebagai penjumlahan linier fungsi tersebut

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x) \quad (3.5)$$

maka  $\{\phi_n(x)\}$  dikatakan lengkap. Jika persamaan ini valid, dengan mengambil perkalian titik dengan  $\phi_m(x)$ , kita mempunyai

$$\langle \phi_m | f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \langle \phi_m | \phi_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m.$$

Koefisien  $c_n$

$$c_n = \langle \phi_n | f \rangle = \int_a^b \phi_n^*(x)f(x)w(x) dx \quad (3.6)$$

disebut sebagai koefisien Fourier dan deret (3.5) dengan koefisien ini

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_n | f \rangle \phi_n(x)$$

disebut sebagai deret Fourier umum. Jelaslah jika sebuah himpunan basis berbeda  $\{\phi_n\}$  dipilih, maka fungsi bisa dinyatakan dalam basis baru dengan himpunan koefisien yang berbeda.

Sifat alami representasi  $f(x)$  dengan deret Fourier umum adalah representasi deret konvergen pada nilai rata-rata. Marilah kita gunakan fungsi riil sebagai ilustrasi. Pilih  $M$  dalam selang  $a \leq x \leq b$  sebagai titik yang sama pada  $x_1 = a$ ,  $x_2 = a + \Delta x$ ,  $x_3 = a + 2\Delta x, \dots$  dengan  $\Delta x = (b - a)/(M - 1)$ . Kemudian aproksimasi fungsi pada salah satu titik  $M$  ini dengan deret berhingga

$$f(x_i) = \sum_{n=0}^N A_n \phi_n(x_i).$$

Agar aproksimasinya sebaik mungkin, kita harus meminimalkan kesalahan rata-rata kuadrat. Ini berarti kita harus menurunkan kesalahan rata-rata kuadrat  $D$

$$D = \sum_{i=1}^M \left[ f(x_i) - \sum_{n=0}^N A_n \phi_n(x_i) \right]^2 w(x_i) \Delta x$$

terhadap tiap koefisien  $A_n$  dan menjadikannya nol. Misalkan  $A_k$  merupakan salah satu  $A_n$ . Turunan terhadap  $A_k$

$$\frac{\partial D}{\partial A_k} = 0$$

memberikan

$$\sum_{i=1}^M 2 \left[ f(x_i) - \sum_{n=0}^N A_n \phi_n(x_i) \right] [-\phi_k(x_i)] w(x_i) \Delta x = 0$$

atau

$$\sum_{i=1}^M \phi_k(x_i) f(x_i) w(x_i) \Delta x - \sum_{n=0}^N A_n \sum_{i=1}^M \phi_k(x_i) \phi_n(x_i) w(x_i) \Delta x = 0.$$

Sekarang jika kita mengambil limit ketika  $M \rightarrow \infty$  dan  $\Delta x \rightarrow 0$ , kita melihat ini mendekati limit

$$\int_a^b \phi_k(x) f(x) w(x) dx - \sum_{n=0}^N A_n \int_a^b \phi_k(x) \phi_n(x) w(x) dx = 0.$$

Dengan fungsi riil, syarat ortogonalitasnya adalah

$$\int_a^b \phi_k(x) \phi_n(x) w(x) dx = \delta_{nk}.$$

Oleh karena itu

$$A_k = \int_a^b \phi_k(x) f(x) w(x) dx.$$

yang tepat sama dengan koefisien Fourier. dalam aproksimasi ini, kesalahan rata-rata kuadrat diminimalkan. Untuk deret Fourier umum, dengan  $\{\phi_n\}$  merupakan himpunan lengkap dan  $N \rightarrow \infty$ , integral kesalahan kuadrat menuju nol.



Salah satu hal penting adalah himpunan basis haruslah lengkap. Himpunan  $\{\phi_n\}$  lengkap dalam ruang fungsi jika terdapat fungsi tak nol yang ortogonal terhadap tiap fungsi  $\phi_n$ . Sebagai contoh  $\{\frac{1}{n} \sin nx\}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) merupakan himpunan ortonormal dalam selang  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Tetapi ini tidak lengkap karena fungsi genap sebarang dalam selang tersebut ortogonal terhadap sebarang  $\phi_n$  dalam himpunan tersebut.

Tidak selalu mudah menggunakan definisi untuk menguji jika sebuah himpunan merupakan himpunan lengkap. Untungnya, himpunan lengkap fungsi ortogonal dibuktikan oleh fungsi eigen operator diferensial yang dikenal sebagai operator Hermitian (*self-adjoint*).

### 3.3 Operator Hermitian

#### 3.3.1 Operator Adjoint dan *Self-Adjoint*(Hermitian)

Jika fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$  dalam ruang vektor dari fungsi, memenuhi syarat batas tertentu, adjoint operator diferensial linier  $L$ , dinotasikan dengan  $L^+$ , dinyatakan dengan hubungan

$$\langle Lf|g \rangle = \langle f|L^+g \rangle.$$

Sebagai contoh, dalam ruang vektor berdimensi tak hingga yang mengandung semua fungsi yang terintegralkan kuadrat (*square-integrable*) dengan perkalian titik yang didefinisikan sebagai

$$\langle f|f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx < \infty,$$

semua fungsi harus memenuhi syarat batas

$$f(x) \rightarrow 0, \quad \text{ketika } x \rightarrow \pm\infty.$$

Jika operator diferensial  $L$  dalam ruang ini, dengan  $w(x) = 1$ , adalah  $d/dx$ ; ( $L = d/dx$ ), maka perkalian titik  $\langle Lf|g \rangle$  diberikan oleh

$$\langle Lf|g \rangle = \left\langle \frac{d}{dx} f | g \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{dx} f \right)^* g dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} f^* g dx.$$

Dengan menggunakan integral parsial

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} f^* g dx = f^*(x)g(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f^* \frac{d}{dx} g dx = \left\langle f \left| -\frac{d}{dx} g \right. \right\rangle = \langle f|L^+g \rangle$$

karena suku yang terintegralkan sama dengan nol karena syarat batas  $f(\pm\infty) \rightarrow 0$ . Maka, adjoint dari operator  $L = d/dx$  dalam ruang ini adalah  $L^+ = -d/dx$ .

**Contoh 3.3.1.** Dalam ruang fungsi yang *square-integrable*  $f(x)$  pada selang  $-\infty < x < \infty$ , carilah adjoint dari operator (a)  $L = d^2/dx^2$  dan (b)  $L = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ .

**Solusi 3.3.1.** (a)  $L = \frac{d^2}{dx^2}$

$$\langle Lf|g \rangle = \left\langle \frac{d^2}{dx^2} f \left| -\frac{d}{dx} g \right. \right\rangle = \left\langle f \left| \frac{d^2}{dx^2} g \right. \right\rangle = \langle f|L^+g \rangle.$$

Oleh karena itu adjoint dari  $d^2/dx^2$  adalah  $L^+ = d^2/dx^2$ .

$$(b) L = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$$

$$\langle Lf|g \rangle = \left\langle \frac{1}{i} \frac{d}{dx} f \left| g \right. \right\rangle = \frac{1}{-i} \left\langle f \left| -\frac{d}{dx} g \right. \right\rangle = \left\langle f \left| \frac{1}{i} \frac{d}{dx} g \right. \right\rangle,$$

kita menggunakan (3.2) dan (3.3). Jadi adjoint dari  $L = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  adalah  $L^+ = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ .

Sebuah operator dikatakan *self-adjoint* (atau Hermitian) jika  $L^+ = L$ . Jadi dalam contoh di atas, operator  $\frac{d^2}{dx^2}$  dan  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  hermitian, tetapi  $d/dx$  tidak Hermitian karena  $L^+ = -d/dx$  tidak sama dengan  $L = d/dx$ .

Dalam contoh ini, fungsi bobot  $w(x)$  diambil satu. Secara umum,  $w(x)$  bisa berupa fungsi riil dan positif sebarang. Jika  $x$  ditentukan pada selang  $a \leq x \leq b$ , rumus umum perkalian titik berbentuk

$$\begin{aligned} \langle Lf|g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (Lf(x))^* g(x) w(x) dx, \\ \langle f|Lg \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) Lg(x) w(x) dx. \end{aligned}$$

Karena  $w(x)$  riil dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Lf(x))^* g(x) w(x) dx = \left( \int_{-\infty}^{\infty} g^* Lf(x) w(x) dx \right)^*$$

sebuah operator  $L$  yang *self-adjoint* bisa juga dinyatakan sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) Lg(x) w(x) dx = \left( \int_{-\infty}^{\infty} g^* Lf(x) w(x) dx \right)^*.$$

Secara simbolik, ini mengikuti fakta bahwa  $\langle Lf|g \rangle = \langle f|Lg \rangle$  dan  $\langle Lf|g \rangle = \langle g|Lf \rangle^*$ , jadi

$$\langle f|Lg \rangle = \langle g|Lf \rangle^*. \quad (3.7)$$

Dalam sebuah ruang berdimensi berhingga, nilai eigen sebuah matriks Hermitian riil dan vektor eigennya membentuk basis ortogonal. Dalam ruang berdimensi tak

hingga, operator diferensial Hermitian mempunyai tugas yang sama seperti matriks Hermitian dalam ruang berdimensi berhingga. Bersesuaian dengan persoalan nilai eigen matriks, kita mempunyai persoalan nilai eigen operator diferensial.

$$L\phi(x) = \lambda\phi(x)$$

dengan  $\lambda$  sebuah konstanta. Untuk pemilihan  $\lambda$  tertentu, sebuah fungsi yang memenuhi persamaan dan syarat batas tertentu disebut sebagai fungsi eigen bersesuaian dengan  $\lambda$ . Konstanta  $\lambda$  disebut sebagai nilai eigen. Tidak terdapat jaminan fungsi eigen  $\phi(x)$  ada untuk sebarang pemilihan parameter  $\lambda$ . Syarat adanya fungsi eigen membatasi nilai  $\lambda$  yang bisa diterima menjadi sebuah himpunan diskrit. Kita akan melihat dalam Subbab 3.3.2 bahwa nilai eigen operator Hermitian riil dan fungsi eigennya membentuk himpunan basis ortogonal yang lengkap.

Lebih dari itu, elemen  $a_{ij}$  sebuah matriks Hermitian dikarakterisasi oleh hubungan

$$a_{ij} = a_{ji}^*. \quad (3.8)$$

Analog dengan hal ini, kita biasanya mendefinisikan “elemen matriks”  $L_{ij}$  sebuah operator Hermitian

$$L_{ij} = \langle \phi_i | L \phi_j \rangle.$$

Dengan (3.7)

$$\langle \phi_i | L \phi_j \rangle = \langle \phi_j | L \phi_i \rangle^*.$$

Jadi

$$L_{ij} = L_{ji}^*. \quad (3.9)$$

Kemiripan antara (3.8) dan (3.9) jelas terlihat.

Dalam mekanika kuantum, nilai harap (ekspektasi) sebuah observabel (kuantitas fisis yang bisa diamati), seperti energi dan momentum, merupakan nilai rata-rata pengukuran berulang kali kuantitas tersebut. Hasil pengukuran jelaslah bilangan riil. Lebih dari itu, observabel dinyatakan dengan operator  $O$  dan nilai ekspektasi diberikan oleh  $\langle \Psi | O \Psi \rangle$  dengan  $\Psi$  merupakan fungsi gelombang yang mendeskripsikan keadaan sistem. Jadi  $\langle \Psi | O \Psi \rangle$  haruslah riil, yaitu

$$\langle \Psi | O \Psi \rangle^* = \langle \Psi | O \Psi \rangle.$$

Karena

$$\langle \Psi | O \Psi \rangle^* = \langle O \Psi | \Psi \rangle$$

diperoleh

$$\langle O \psi | \psi \rangle = \langle \psi | O \psi \rangle$$

jadi operator sebarang yang merepresentasikan sebuah observabel haruslah Hermitian.

### 3.3.2 Sifat-sifat Operator Hermitian

#### Nilai Eigen Operator Hermitian Riil

Misalkan  $\lambda$  adalah nilai eigen operator dan  $\phi$  merupakan fungsi eigennya

$$L\phi = \lambda\phi.$$

Jadi

$$\langle L\phi|\phi \rangle = \langle \lambda\phi|\phi \rangle = \lambda^* \langle \phi|\phi \rangle.$$

Karena  $L$  Hermitian, maka

$$\langle L\phi|\phi \rangle = \langle \phi|L\phi \rangle = \langle \phi|\lambda\phi \rangle = \lambda \langle \phi|\phi \rangle.$$

Jadi

$$\lambda^* \langle \phi|\phi \rangle = \lambda \langle \phi|\phi \rangle.$$

Oleh karena itu

$$\lambda^* = \lambda$$

nilai eigen operator Hermitian haruslah riil.

Perhatikan bahwa operator Hermitian bisa imajiner. Meskipun jika operatornya riil, fungsi eigen bisa kompleks. Tetapi dalam semua kasus, nilai eigen haruslah riil.

Karena nilai eigennya riil, fungsi eigen operator Hermitian riil selalu bisa dibuat riil dengan mengambil kombinasi linier yang sesuai. Karena dengan definisi

$$L\phi_i = \lambda_i\phi_i$$

kompleks konjugatnya diberikan oleh

$$L\phi_i^* = \lambda_i^*\phi_i^* = \lambda_i\phi_i^*$$

di sini kita menggunakan hubungan  $\lambda^* = \lambda$ . Jadi baik  $\phi_i^*$  dan  $\phi_i$  merupakan fungsi eigen untuk nilai eigen yang sama. Karena sifat linieritas  $L$ , semua kombinasi linier dari  $\phi_i$  dan  $\phi_i^*$  juga merupakan sebuah fungsi eigen. Sekarang baik  $\phi_i + \phi_i^*$  dan  $i(\phi_i - \phi_i^*)$  riil, jadi kita bisa mengambilnya sebagai fungsi eigen untuk nilai eigen  $\lambda_i$ . Jadi untuk operator riil, kita bisa mengasumsikan baik nilai eigen maupun fungsi eigen keduanya riil.

#### Fungsi Eigen Operator Hermitian Ortogonal

Misalkan  $\phi_i$  dan  $\phi_j$  merupakan fungsi eigen untuk nilai eigen yang berbeda  $\lambda_i$  dan  $\lambda_j$

$$L\phi_i = \lambda_i\phi_i,$$

$$L\phi_j = \lambda_j\phi_j.$$

Diperoleh

$$\langle L\phi_i|\phi_j\rangle = \langle \lambda_i\phi_i|\phi_j\rangle = \lambda_i^* \langle \phi_i|\phi_j\rangle = \lambda_i \langle \phi_i|\phi_j\rangle$$

persamaan terakhir berasal dari fakta bahwa nilai eigennya riil. Karena  $L$  Hermitian

$$\langle L\phi_i|\phi_j\rangle = \langle \phi_i|L\phi_j\rangle = \langle \phi_i|\lambda_j\phi_j\rangle = \lambda_j \langle \phi_i|\phi_j\rangle.$$

Jadi

$$\lambda_i \langle \phi_i|\phi_j\rangle = \lambda_j \langle \phi_i|\phi_j\rangle$$

$$(\lambda_i - \lambda_j) \langle \phi_i|\phi_j\rangle = 0$$

Karena  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , kita harus mempunyai

$$\langle \phi_i|\phi_j\rangle = 0.$$

Oleh karena itu  $\phi_i$  dan  $\phi_j$  ortogonal.

### Degenerasi

Jika  $n$  buah fungsi eigen bebas linier bersesuaian dengan nilai eigen yang sama, nilai eigen dikatakan berdegenerasi  $n$ - buah. Jika ini adalah kasus yang kita tinjau, kita tidak bisa menggunakan argumen di atas untuk membuktikan fungsi eigennya ortogonal dan mungkin saja tidak. Tetapi, jika tidak ortogonal, kita bisa menggunakan proses Gram-Schmidt untuk membentuk  $n$  fungsi ortogonal dari  $n$  fungsi eigen bebas linier. Fungsi yang baru dibentuk akan memenuhi persamaan yang sama dan saling ortogonal dan juga ortogonal terhadap fungsi eigen lain yang dimiliki nilai eigen yang berbeda.

### Fungsi Eigen Operator Hermitian Membentuk Himpunan Lengkap

Ingat bahwa matriks Hermitian selalu bisa didiagonalkan. Vektor eigen matriks terdiagonalkan berupa vektor kolom dengan hanya satu nilai tak nol. Sebagai contoh

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Semua vektor dalam dua dimensi bisa dinyatakan dengan dua buah vektor eigen ini

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kita katakan bahwa dua buah vektor eigen membentuk sebuah basis ortogonal lengkap. Jelaslah, vektor eigen matriks Hermitian  $n \times n$  akan membentuk basis ortogonal lengkap untuk ruang berdimensi  $n$ .

Kita akan berharap dalam ruang vektor berdimensi tak hingga dari fungsi, fungsi eigen operator Hermitian akan membentuk sebuah himpunan basis ortogonal lengkap. Pembuktian hal ini bisa dibaca pada “Methods of Mathematical Physics” Bab.6, oleh Courant and Hilbert, Interscience Publishers (1953), dictak ulang oleh Wiley (1989)

Jadi, dalam selang operator linier  $L$  Hermitian, semua bagian fungsi kontinu  $f(x)$  bisa dinyatakan dalam deret Fourier umum dari fungsi eigen  $L$ , yaitu, jika himpunan fungsi eigen  $\{\phi_n\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) ternormalisasi, maka

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f | \phi_n \rangle \phi_n$$

dengan  $L\phi_n = \lambda_n\phi_n$ .

Kita tekankan di sini bahwa dalam ruang ketika  $L$  Hermitian, fungsi dalam ruang ini harus memenuhi syarat batas tertentu. Syarat batas ini yang menentukan fungsi eigen. Marilah kita ilustrasikan dalam contoh berikut.

**Contoh 3.3.2.** (a) Misalkan fungsi bobot sama dengan satu  $w(x) = 1$ , carilah syarat batas yang harus dipenuhi oleh operator diferensial  $L = d^2/dx^2$  agar Hermitian dalam selang  $a \leq x \leq b$ . (b) Tunjukkan bahwa jika solusi  $Ly = \lambda y$  dalam selang  $0 \leq x \leq 2\pi$  memenuhi syarat batas  $y(0) = y(2\pi)$ ,  $y'(0) = y'(2\pi)$  (dengan  $y'$  berarti turunan  $y$  terhadap  $x$ ), maka operator  $L$  dalam selang ini Hermitian. (c) Carilah himpunan lengkap fungsi eigen dari  $L$ .

**Solusi 3.3.2.** (a) Misalkan  $y_i(x)$  dan  $y_j(x)$  merupakan dua buah fungsi dalam ruang ini. Integrasikan perkalian titik  $\langle y_i | Ly_j \rangle$  secara parsial memberikan

$$\langle y_i | Ly_j \rangle = \int_a^b y_i^* \frac{d^2 y_j}{dx^2} dx = \left[ y_i^* \frac{dy_j}{dx} \right]_a^b - \int_a^b \frac{dy_i^*}{dx} \frac{dy_j}{dx} dx.$$

Integrasikan parsial suku kedua pada ruas kanan memberikan

$$\int_a^b \frac{dy_i^*}{dx} \frac{dy_j}{dx} dx = \left[ \frac{dy_i^*}{dx} y_j \right]_a^b - \int_a^b \frac{d^2 y_i^*}{dx^2} y_j dx.$$

Jadi

$$\langle y_i | Ly_j \rangle = \left[ y_i^* \frac{dy_j}{dx} \right]_a^b - \left[ \frac{dy_i^*}{dx} y_j \right]_a^b + \langle Ly_i | y_j \rangle.$$

Oleh karena itu  $L$  Hermitian yang memberikan

$$\left[ y_i^* \frac{dy_j}{dx} \right]_a^b - \left[ \frac{dy_i^*}{dx} y_j \right]_a^b = 0.$$

(b) Karena syarat batas  $y(0) = y(2\pi)$ ,  $y'(0) = y'(2\pi)$

$$\begin{aligned} \left[ y_i^* \frac{dy_j}{dx} \right]_0^{2\pi} &= y_i^*(2\pi)y_j'(2\pi) - y_i^*(0)y_j'(0) = 0, \\ \left[ \frac{dy_i^*}{dx} y_j \right]_0^{2\pi} &= y_i^{*'}(2\pi)y_j(2\pi) - y_i^{*'}(0)y_j(0) = 0. \end{aligned}$$

Jadi  $L$  Hermitian dalam selang ini karena

$$\langle y_i | Ly_j \rangle = \left[ y_i^* \frac{dy_j}{dx} \right]_a^b - \left[ \frac{dy_i^*}{dx} y_j \right]_a^b + \langle Ly_i | y_j \rangle = \langle y_i | L^+ y_j \rangle.$$

(c) Untuk mencari fungsi eigen dari  $L$ , kita harus menyelesaikan persamaan diferensial

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \lambda y(x),$$

dengan syarat batas

$$y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi).$$

Solusi persamaan diferensialnya adalah

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda x} + B \sin \sqrt{\lambda x}$$

dengan  $A$  dan  $B$  dua buah konstanta sebarang. Jadi

$$y'(x) = -\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda x} + \sqrt{\lambda} B \cos \sqrt{\lambda x}$$

dan

$$\begin{aligned} y(0) &= A, & y(2\pi) &= A \cos \sqrt{\lambda 2\pi} + B \sin \sqrt{\lambda 2\pi}, \\ y'(0) &= \sqrt{\lambda} B, & y'(2\pi) &= -\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda 2\pi} + \sqrt{\lambda} B \cos \sqrt{\lambda 2\pi}. \end{aligned}$$

Karena syarat batas  $y(0) = y(2\pi)$ ,  $y'(0) = y'(2\pi)$

$$\begin{aligned} A &= A \cos \sqrt{\lambda 2\pi} + B \sin \sqrt{\lambda 2\pi}, \\ \sqrt{\lambda} B &= -\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda 2\pi} + \sqrt{\lambda} B \cos \sqrt{\lambda 2\pi} \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} A(1 - \cos \sqrt{\lambda 2\pi}) - B \sin \sqrt{\lambda 2\pi} &= 0, \\ A \sin \sqrt{\lambda 2\pi} + B(1 - \cos \sqrt{\lambda 2\pi}) &= 0. \end{aligned}$$

$A$  dan  $B$  solusinya akan tidak trivial jika

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos \sqrt{\lambda 2\pi} & \sin \sqrt{\lambda 2\pi} \\ \sin \sqrt{\lambda 2\pi} & 1 - \cos \sqrt{\lambda 2\pi} \end{vmatrix} = 0.$$

Diperoleh

$$1 - 2 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi + \cos^2 \sqrt{\lambda} 2\pi + \sin^2 \sqrt{\lambda} 2\pi = 0$$

atau

$$2 - 2 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi = 0.$$

Jadi

$$\cos \sqrt{\lambda} 2\pi = 1$$

dan

$$\sqrt{\lambda} = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Jadi untuk tiap bilangan bulat  $n$ , solusinya adalah

$$y_n(x) = A_n \cos nx + B_n \sin nx.$$

Dengan kata lain, untuk syarat batas periodik ini, fungsi eigen operator Hermitian  $L = d^2/dx^2$  adalah  $\cos nx$  dan  $\sin nx$ . Ini berarti bahwa kumpulan  $\{\cos nx, \sin nx\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) merupakan himpunan basis lengkap untuk ruang ini. Jadi semua bagian fungsi periodik dengan periode  $2\pi$  bisa diekspansikan dalam fungsi eigen ini. Ekspresi ini tidak lain hanyalah deret Fourier biasa.

Pembahasan sistematik hubungan antara syarat batas dan fungsi eigen persamaan diferensial orde dua diberikan oleh teori Sturm-Liouville.

### 3.4 Teori Sturm-Liouville

Dalam contoh terakhir, kita telah melihat fungsi eigen operator diferensial  $L = d^2/dx^2$  dengan beberapa syarat batas membentuk himpunan basis ortogonal lengkap. Persoalan yang lebih umum operator diferensial orde dua adalah persoalan Sturm-Liouville.

#### 3.4.1 Persamaan Sturm-Liouville

Persamaan diferensial linier orde dua

$$A(x) \frac{d^2}{dx^2} y + B(x) \frac{d}{dx} y + C(x) y + \lambda D(x) y = 0, \quad (3.10)$$

dengan  $\lambda$  merupakan parameter yang harus ditentukan dengan syarat batas, bisa dimasukkan dalam bentuk

$$\frac{d^2}{dx^2} y + b(x) \frac{d}{dx} y + c(x) y + \lambda d(x) y = 0, \quad (3.11)$$



dengan membagi tiap suku dengan  $A(x)$ , yang berarti  $A(x) \neq 0$ . Marilah kita definisikan faktor integrasi

$$p(x) = e^{\int^x b(x')dx'}.$$

kalikan (3.11) dengan  $p(x)$ , kita mempunyai

$$p(x) \frac{d^2}{dx^2} y + p(x)b(x) \frac{d}{dx} y + p(x)c(x)y + \lambda p(x)d(x)y = 0. \quad (3.12)$$

Karena

$$\frac{dp(x)}{dx} = \frac{d}{dx} e^{\int^x b(x')dx'} = e^{\int^x b(x')dx'} \frac{d}{dx} \int^x b(x')dx = p(x)b(x),$$

jadi

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} y \right] = p(x) \frac{d^2}{dx^2} y + \frac{dp(x)}{dx} \frac{d}{dx} y = p(x) \frac{d^2}{dx^2} y + p(x)b(x) \frac{d}{dx} y.$$

Maka (3.12) bisa dituliskan sebagai

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} y \right] + q(x)y + \lambda w(x)y = 0, \quad (3.13)$$

dengan  $q(x) = p(x)c(x)$  dan  $w(x) = p(x)d(x)$ . Karena faktor  $p(x)$  tidak bernilai nol, solusi (3.10)–(3.13) identik, jadi persamaannya setara.

Dengan syarat umum yaitu  $p, q, w$  riil dan kontinu, dan baik  $p(x)$  maupun  $w(x)$  positif pada selang tertentu, persamaan dalam bentuk (3.13) dikenal sebagai persamaan Sturm-Liouville, yang ditemukan oleh matematikawan Perancis Sturm (1803–1855) dan Liouville (1809–1882), yang pertama kali membangun teori mendalam dari persamaan ini.

Persamaan ini bisa dinyatakan dalam bentuk persoalan nilai eigen

$$Ly = \lambda y$$

dengan mendefinisikan operator Sturm-Liouville

$$L = -\frac{1}{w(x)} \left[ \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right]. \quad (3.14)$$

Teori Sturm-Liouville sangat penting dalam teknik dan fisika, karena dengan syarat batas yang bervariasi, operator linier yang bisa dituliskan dalam bentuk ini Hermitian. Oleh karena itu fungsi eigen persamaan Sturm-Liouville membentuk himpunan basis ortogonal lengkap untuk ruang fungsi dengan fungsi bobot  $w(x)$ . Himpunan fungsi cosinus dan sinus deret Fourier hanyalah sebuah contoh di dalam teori Sturm-Liouville yang lebih luas.

Kita perhatikan bahwa terdapat banyak definisi operator Sturm-Liouville, beberapa penulis menggunakan

$$L = \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q(x)$$

dan menuliskan persamaan nilai eigen sebagai

$$Ly = -\lambda wy.$$

Sepanjang konsisten, perbedaannya hanyalah masalah konvensi. Kita akan menggunakan (3.14) sebagai operator Sturm-Liouville.

### 3.4.2 Syarat Batas Persoalan Sturm-Liouville

#### Operator Sturm-Liouville sebagai Operator Hermitian

Misalkan  $L$  merupakan operator Sturm-Liouville dalam (3.14), dan  $f(x)$  dan  $g(x)$  merupakan dua buah fungsi yang mempunyai turunan kedua yang kontinu dalam selang  $a \leq x \leq b$ , maka

$$\langle Lf|g \rangle = \int_a^b \left\{ -\frac{1}{w} \left[ \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) + q \right] f \right\}^* g w dx.$$

Karena  $p, q, w$  riil, integralnya bisa dituliskan sebagai

$$\langle Lf|g \rangle = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} f^* \right) g dx - \int_a^b q f^* g dx.$$

Dengan integral parsial

$$\int_a^b \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} f^* \right) g dx = p \frac{d}{dx} f^* g \Big|_a^b - \int_a^b p \frac{d}{dx} f^* \frac{d}{dx} g dx,$$

dan

$$\int_a^b p \frac{d}{dx} f^* \frac{d}{dx} g dx = \int_a^b \frac{d}{dx} f^* p \frac{d}{dx} g dx = f^* \frac{d}{dx} p g \Big|_a^b - \int_a^b f^* \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} g \right) dx.$$

Diperoleh

$$\langle Lf|g \rangle = -p \frac{d}{dx} f^* g \Big|_a^b + f^* p \frac{d}{dx} g \Big|_a^b - \int_a^b f^* \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} g \right) dx - \int_a^b q f^* g dx,$$

atau

$$\begin{aligned} \langle Lf|g \rangle &= \left[ p \left( f^* \frac{d}{dx} g - \frac{d}{dx} f^* g \right) \right]_a^b + \int_a^b f^* \left\{ -\frac{1}{w} \left[ \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) \right] g \right\} w dx \\ &= \left[ p \left( f^* \frac{d}{dx} g - \frac{d}{dx} f^* g \right) \right]_a^b \langle f|Lg \rangle. \end{aligned}$$

Jelaslah bahwa jika

$$\left[ p \left( f * \frac{dg}{dx} - \frac{df^*}{dx} g \right) \right]_a^b = 0, \quad (3.15)$$

maka

$$\langle Lf | g \rangle = \langle f | Lg \rangle.$$

Dengan kata lain, jika ruang fungsi mengandung fungsi yang memenuhi (3.15), maka operator Sturm-Liouville  $L$  Hermitian dalam ruang tersebut.

### Persamaan Sturm-Liouville

Kadang kita menyebut persamaan Sturm-Liouville dan syarat batas sebagai persoalan Sturm-Liouville. Karena operatornya Hermitian, fungsi eigen persoalan Sturm-Liouville saling ortogonal dengan fungsi bobot  $w(x)$  dan kesemuanya lengkap. Oleh karena itu semuanya bisa digunakan sebagai basis deret Fourier umum, yang juga dikenal sebagai ekspansi fungsi eigen.

Jika dua buah solusi sebarang  $y_n(x)$  dan  $y_m(x)$  persamaan diferensial orde dua linier

$$[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) + \lambda wy(x) = 0, \quad a \leq x \leq b$$

memenuhi syarat batas (3.15), maka persamaannya bersama dengan syarat batasnya dinamakan persoalan Sturm-Liouville. Karena operatornya riil, fungsi eigennya juga bisa diambil riil. Oleh karena itu syarat batas (3.15) bisa dituliskan sebagai

$$p(b) \begin{vmatrix} y_n(b) & y'_n(b) \\ y_m(b) & y'_m(b) \end{vmatrix} - p(a) \begin{vmatrix} y_n(a) & y'_n(a) \\ y_m(a) & y'_m(a) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.16)$$

Bergantung pada bagaimana syarat batas yang ditemui, persoalan Sturm-Liouville dibagi menjadi subgrup berikut.

#### 3.4.3 Persoalan Sturm-Liouville Reguler

Dalam kasus ini,  $p(a) \neq 0$  and  $p(b) \neq 0$ . Persoalan Sturm-Liouville terdiri dari persamaan

$$Ly(x) = \lambda y(x)$$

dengan  $L$  diberikan oleh (3.14) dengan syarat batas

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0, \end{aligned}$$

dengan konstanta  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  tidak bisa bernilai nol secara bersamaan begitu juga dengan  $\beta_1$  dan  $\beta_2$ .

Marilah kita buktikan bahwa syarat batas ini memenuhi (3.16). Jika  $y_n(x)$  dan  $y_m(x)$  merupakan dua buah solusi yang berbeda, keduanya harus memenuhi syarat batas. Syarat batas pertama meminta

$$\begin{aligned}\alpha_1 y_n(a) + \alpha_2 y_n'(a) &= 0, \\ \alpha_1 y_n(b) + \alpha_2 y_n'(b) &= 0.\end{aligned}$$

Ini merupakan sistem dari dua buah persamaan simultan dalam  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$ . Karena  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  keduanya tidak bisa bernilai nol, determinan koefisiennya haruslah sama dengan nol

$$\begin{vmatrix} y_n(a) & y_n'(a) \\ y_m(a) & y_m'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Syarat batas yang kedua meminta

$$\begin{vmatrix} y_n(b) & y_n'(b) \\ y_m(b) & y_m'(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Jelaslah

$$p(b) \begin{vmatrix} y_n(b) & y_n'(b) \\ y_m(b) & y_m'(b) \end{vmatrix} - p(a) \begin{vmatrix} y_n(a) & y_n'(a) \\ y_m(a) & y_m'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Jadi syarat batas (3.16) terpenuhi.

**Contoh 3.4.1.** (a) Buktikan bahwa untuk  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}y'' + \lambda y &= 0, \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 0,\end{aligned}$$

merupakan persoalan Sturm-Liouville reguler.

(b) Carilah nilai eigen dan fungsi eigen persoalan tersebut.

**Solusi 3.4.1.** (a) Dengan  $p(x) = 1, q(x) = 0, w(x) = 1$ , persamaan Sturm-Liouville

$$(py')' + qy + \lambda wy = 0$$

menjadi

$$y'' + \lambda y = 0.$$

Lebih dari itu, dengan  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ , syarat batas

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

menjadi

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Jadi persamaan yang diberikan dan syarat batas merupakan persoalan Sturm-Liouville reguler.

(b) Untuk mencari nilai eigen marilah kita perhatikan kemungkinan dari  $\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$ ,  $\lambda > 0$ . Jika  $\lambda = 0$ , solusi persamaannya diberikan oleh

$$y(x) = c_1 x + c_2.$$

Dengan menerapkan syarat batas, kita mempunyai

$$y(0) = c_2 = 0, \quad y(1) = c_1 + c_2 = 0,$$

jadi  $c_1 = 0$  dan  $c_2 = 0$ . Ini merupakan solusi trivial. Oleh karena itu  $\lambda = 0$  bukan merupakan nilai eigen.

Jika  $\lambda < 0$ , misalkan  $\lambda = \mu^2$  dengan  $\mu$  riil, solusi persamaannya adalah

$$y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}.$$

Syarat  $y(0) = 0$  membuat  $c_2 = c_1$ . Syarat  $y(1) = 0$  meminta

$$y(1) = c_1 (e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0.$$

Karena  $\mu \neq 0$ , jadi  $c_1 = 0$ . Ini juga memberikan solusi trivial.

Satu-satunya kemungkinan adalah dengan  $\lambda > 0$  misalkan  $\lambda = \mu^2$  dengan  $\mu$  riil, solusi persamaannya adalah

$$y(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x.$$

Dengan menerapkan syarat batas  $y(0) = 0$  memberikan

$$y(0) = c_1 = 0.$$

Sehingga kita hanya memiliki

$$y(x) = c_2 \sin \mu x.$$

Syarat  $y(1) = 0$  meminta

$$c_2 \sin \mu = 0.$$

Agar solusinya tidak trivial, kita harus mempunyai

$$\sin \mu = 0.$$

Ini akan muncul jika  $\mu$  merupakan perkalian bulat dari  $\pi$ ,

$$\mu = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

Jadi nilai eigennya adalah

$$\lambda_n = \mu^2 = (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

dan fungsi eigennya

$$y_n(x) = \sin n\pi x.$$

Jelaslah kita bisa menyelesaikan persoalan ini tanpa mengetahui bahwa ini merupakan persoalan Sturm-Liouville. Keuntungan mengetahui  $\sin n\pi x$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) sebagai fungsi eigen persoalan Sturm-Liouville adalah kita bisa cepat mengetahui kesemuanya saling ortogonal. Lebih dari itu, semuanya membentuk himpunan lengkap dalam selang  $0 \leq x \leq 1$ .

**Contoh 3.4.2.** (a) Nyatakan persoalan berikut dalam bentuk Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + \lambda y &= 0 \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ y(0) &= 0, \quad y(\pi) = 0. \end{aligned}$$

(b) Carilah nilai eigen dan fungsi eigennya.

(c) Carilah ekspansi fungsi eigen dari fungsi  $f(x)$  yang diberikan dalam selang  $0 \leq x \leq \pi$ .

**Solusi 3.4.2.** (a) Pertama marilah kita mencari faktor integrasi  $p$ ,

$$p(x) = e^{\int^x (-2)dx'} = e^{-2x}.$$

Kalikan persamaan diferensial dengan  $p(x)$ , kita mempunyai

$$e^{-2x} y'' - 2e^{-2x} y' + \lambda e^{-2x} y = 0$$

yang bisa dituliskan sebagai

$$(e^{-2x} y')' + \lambda e^{-2x} y = 0.$$

Ini adalah persamaan Sturm-Liouville dengan  $p(x) = e^{-2x}$ ,  $q(x) = 0$ , dan  $w(x) = e^{-2x}$ .

(b) Karena persamaan diferensial asalnya berupa sebuah persamaan dengan koefisien konstan, kita mencari solusi dalam bentuk  $y(x) = e^{mx}$ . Dengan solusi uji ini, persamaannya menjadi

$$(m^2 - 2m + \lambda)e^{mx} = 0.$$

Akar persamaan karakteristiknya  $m^2 - 2m + \lambda = 0$  adalah

$$m = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda}$$

oleh karena itu

$$y(x) = e^x \left( c_1 e^{\sqrt{1-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{1-\lambda}x} \right)$$

untuk  $\lambda \neq 1$ .

Untuk  $\lambda = 1$ , persamaan karakteristik memiliki akar ganda pada  $m = 1$ , dan solusinya menjadi

$$y_2(x) = c_3 + c_4 x.$$

Syarat batas  $y_2(0) = 0$  dan  $y_2(\pi) = 0$  meminta  $c_3 = c_4 = 0$ . Jadi tidak terdapat solusi tidak trivial dalam kasus ini, maka  $\lambda = 1$  bukan merupakan nilai eigen.

Untuk  $\lambda \neq 1$ , syarat batas  $y(0) = 0$  meminta

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0.$$

Oleh karena itu solusinya menjadi

$$y(x) = c_1 e^x \left( e^{\sqrt{1-\lambda}x} - e^{-\sqrt{1-\lambda}x} \right).$$

Jika  $\lambda < 1$ , syarat batas lainnya  $y(\pi) = 0$  meminta

$$y(\pi) = c_1 e^\pi \left( e^{\sqrt{1-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{1-\lambda}\pi} \right) = 0.$$

Ini hanya mungkin untuk solusi trivial  $c_1 = 0$ . Sehingga tidak ada nilai eigen kurang dari satu.

Untuk  $\lambda > 1$ , solusinya bisa dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^x \left( e^{\sqrt{1-\lambda}x} - e^{-\sqrt{1-\lambda}x} \right) \\ &= 2ic_1 e^x \sin \sqrt{\lambda - 1}x. \end{aligned}$$

Syarat batas  $y(\pi) = 0$  terpenuhi jika

$$\sin \sqrt{\lambda - 1}\pi = 0.$$

Ini terjadi ketika

$$\sqrt{\lambda - 1} = n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Oleh karena itu nilai eigennya adalah

$$\lambda_n = n^2 + 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

dan fungsi eigen berasosiasi dengan tiap nilai eigen  $\lambda_n$  adalah

$$\phi_n(x) = e^x \sin nx.$$

Konstanta sebarang bisa dikalikan dengan  $\phi_n(x)$  untuk memperoleh solusi untuk persoalan dengan  $\lambda = \lambda_n$ .

(c) Untuk fungsi  $f(x)$  yang diberikan dalam selang  $0 \leq x \leq \pi$ , ekspansi fungsi eigen adalah

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi(x).$$

Karena  $\{\phi_n\} (n = 1, 2, \dots)$  merupakan himpunan fungsi eigen persoalan Sturm-Liouville, ini merupakan himpunan ortogonal terhadap fungsi bobot  $w(x) = e^{2x}$ ,

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \int_0^{\pi} (e^x \sin nx) (e^x \sin mx) e^{-2x} dx = 0, \quad \text{untuk } n \neq m.$$

Untuk  $n = m$

$$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \int_0^{\pi} (e^x \sin nx) (e^x \sin nx) e^{-2x} dx = \int_0^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{\pi}{2}.$$

Oleh karena itu

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \frac{\pi}{2} \delta_{nm}.$$

Dengan mengambil perkalian titik kedua ruas ekspansi fungsi eigen dengan  $\phi_m$ , kita mempunyai

$$\langle f | \phi_m \rangle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle \phi_n | \phi_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\pi}{2} \delta_{nm} = \frac{\pi}{2} c_m.$$

Oleh karena itu

$$c_n = \frac{2}{\pi} \langle f | \pi_n \rangle$$

dengan

$$\langle f | \pi_n \rangle = \int_0^{\pi} f(x) e^x \sin nx e^{-2x} dx = \int_{\pi}^0 f(x) e^{-x} \sin nx dx.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \langle f | \phi_n \rangle \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} f(x) e^{-x} \sin nx dx \right) e^x \sin nx. \end{aligned}$$



**Contoh 3.4.3.** (a) Carilah nilai eigen dan fungsi eigen persoalan Sturm-Liouville berikut:

$$y'' + \lambda y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0.$$

(b) Buktikan bahwa fungsi eigennya ortogonal dengan integrasi eksplisit

$$\int_0^1 y_n(x)y_m(x) dx = 0, \quad n \neq m.$$

(c) Carilah himpunan ortonormal fungsi eigennya.

**Solusi 3.4.3.** (a) Bisa dengan mudah dibuktikan untuk  $\lambda < 0$ , tidak terdapat solusi yang memenuhi persamaan dan juga syarat batas. Untuk  $\lambda = 0$ , ini merupakan sebuah nilai eigen dengan fungsi eigen  $y_0(x) = x$ , karena memenuhi persamaan dan juga syarat batasnya

$$\frac{d}{dx^2} = 0, \quad y_0(0) = 0, \quad y_0(1) - y_0'(1) = 1 - 1 = 0.$$

Sebagian besar nilai eigen berasal dari cabang dengan  $\lambda = \alpha^2 > 0$ . Dalam kasus tersebut, solusi dari

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + \alpha^2 y(x) = 0$$

diberikan oleh

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x.$$

Syarat batas  $y(0) = A = 0$  memberikan

$$y(x) = B \sin \alpha x.$$

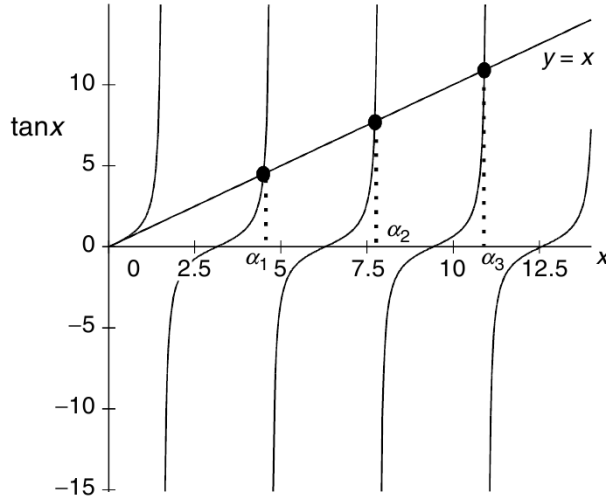
Syarat batas lain  $y(1)y'(1) = 0$  meminta

$$\sin \alpha - \alpha \cos \alpha = 0. \tag{3.17}$$

Oleh karena itu harus merupakan akar positif dari

$$\tan \alpha = \alpha.$$

Akar ini diberikan label sebagai  $\alpha_n$  dalam Gambar 3.1. Akar dari persamaan  $\tan x = \mu x$  biasanya diperlukan dalam banyak aplikasi, dan bisa dilihat dalam Tabel 4.19 dan 4.20 dari “Handbook of Mathematical Functions” oleh M. Abramowitz dan I.A. Stegun, Dover Publications, 1970. Sebagai contoh untuk persoalan kita  $\mu = 1$ ,  $\alpha_1 = 4.49341$ ,  $\alpha_2 = 7.72525$ ,  $\alpha_3 = 10.90412$ ,  $\alpha_4 = 14.06619 \dots$  Jadi nilai eigen persoalan



Gambar 3.1: Akar dari  $\tan x = x$ ,  $\alpha_n$  adalah akar ke- $n$ .  $\alpha_1 = 4.49341$ ,  $\alpha_2 = 7.72525$ ,  $\alpha_3 = 10.90412$  seperti yang ada pada Tabel 4.19 dari “Handbook of Mathematical Functions” oleh M. Abramowitz dan I.A. Stegun, Dover Publications, 1970.

Sturm-Liouville ini adalah  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_n = \alpha^2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), fungsi eigen bersesuaiannya adalah

$$y_0(x) = x, \quad y_n(x) = \sin \alpha_n x \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(b) Menurut teori Sturm-Liouville, fungsi eigen ini saling ortogonal. Marilah kita buktikan secara eksplisit. Pertama

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin \alpha_n x \, dx &= \left[ -\frac{x}{\alpha_n} \cos \alpha_n x + \frac{1}{\alpha_n^2} \sin \alpha_n x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\alpha_n^2} [-\alpha_n \cos \alpha_n + \sin \alpha_n] = 0, \end{aligned}$$

karena  $\alpha_n$  memenuhi (3.17). Selanjutnya

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin \alpha_n \sin \alpha_m x \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(\alpha_n - \alpha_m)x - \cos(\alpha_n + \alpha_m)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\alpha_n - \alpha_m)}{\alpha_n - \alpha_m} - \frac{\sin(\alpha_n + \alpha_m)}{\alpha_n + \alpha_m} \right]. \end{aligned}$$

Sekarang

$$\begin{aligned} \alpha_n - \alpha_m &= \tan \alpha_n - \tan \alpha_m = \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n} - \frac{\sin \alpha_m}{\cos \alpha_m} \\ &= \frac{\sin \alpha_n \cos \alpha_m - \cos \alpha_n \sin \alpha_m}{\cos \alpha_n \cos \alpha_m} = \frac{\sin(\alpha_n - \alpha_m)}{\cos \alpha_n \cos \alpha_m}, \end{aligned}$$

maka

$$\frac{\sin(\alpha_n - \alpha_m)}{\alpha_n - \alpha_m} = \cos \alpha_n \cos \alpha_m.$$

Dengan cara yang sama

$$\frac{\sin(\alpha_n + \alpha_m)}{\alpha_n + \alpha_m} = \cos \alpha_n \cos \alpha_m.$$

Diperoleh

$$\int_0^1 \sin \alpha_n x \sin \alpha_m x \, dx = \frac{1}{2} [\cos \alpha_n \cos \alpha_m - \cos \alpha_n \cos \alpha_m] = 0.$$

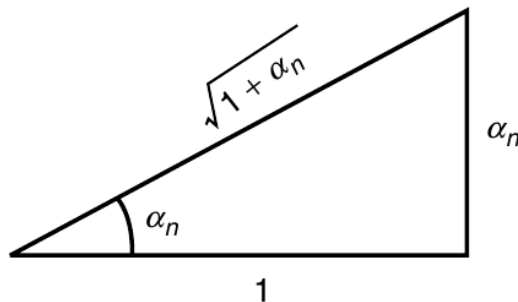
(c) Untuk mencari konstanta normalisasi  $\beta_n^2 = \int_1^0 y_n^2(x) dx$  :

$$\beta_0^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} \beta_0^2 &= \int_0^1 \sin^2 \alpha_n x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \cos 2\alpha_n x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2\alpha_n x}{2\alpha_n} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\alpha_n}{4\alpha_n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sin \alpha_n \cos \alpha_n}{2\alpha_n}. \end{aligned}$$

Karena  $\tan \alpha_n = \alpha_n$ , dari diagram berikut kita melihat bahwa

$$\sin \alpha_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{1 + \alpha_n^2}}, \quad \cos \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_n^2}}.$$



Jadi

$$\beta_n^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\alpha_n} \frac{\alpha_n}{\sqrt{1 + \alpha_n^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_n^2}} \right) = \frac{\alpha_n^2}{2(1 + \alpha_n^2)}.$$

Oleh karena itu, himpunan ortonormal fungsi eigen sebagai berikut:

$$\left\{ \sqrt{3x}, \frac{\sqrt{2(1 + \alpha_n^2)}}{\alpha_n} \sin \alpha_n x \right\} (n = 1, 2, 3, \dots).$$

### 3.4.4 Persoalan Sturm-Liouville Periodik

Pada selang  $a \leq x \leq b$ , jika  $p(a) = p(b)$ , maka syarat batas periodik

$$y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b)$$

juga memenuhi syarat (3.16). Ini mudah untuk dibuktikan. Misalkan  $y_n(x)$  dan  $y_m(x)$  adalah dua buah fungsi yang memenuhi syarat batas ini, yaitu

$$\begin{aligned} y_n(a) &= y_n(b), & y'_n(a) &= y'_n(b), \\ y_m(a) &= y_m(b), & y'_m(a) &= y'_m(b). \end{aligned}$$

Jelaslah

$$p(b) \begin{vmatrix} y_n(b) & y'_n(b) \\ y_m(b) & y'_m(b) \end{vmatrix} - p(a) \begin{vmatrix} y_n(a) & y'_n(a) \\ y_m(a) & y'_m(a) \end{vmatrix} = 0,$$

karena dua buah suku sama.

Oleh karena itu persamaan Sturm-Liouville ditambah dengan syarat batas periodik ini juga merupakan persoalan Sturm-Liouville. Perhatikan perbedaan antara persoalan Sturm-Liouville reguler dengan periodik adalah syarat batas dalam persoalan Sturm-Liouville terpisah, dengan satu syarat pada  $x = a$  dan satu lagi pada  $x = b$ , sedangkan syarat batas persoalan Sturm-Liouville periodik menghubungkan nilai pada  $x = a$  dengan  $x = b$ . Sebagai tambahan, dalam persoalan Sturm-Liouville periodik,  $p(a)$  harus sama dengan  $p(b)$ .

Sebagai contoh

$$y'' + \lambda y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

merupakan persamaan Sturm-Liouville dengan  $p = 1$ ,  $q = 1$  dan  $w = 1$ . Karena  $p(a) = p(b) = 1$ , syarat batas periodik akan membuat ini menjadi persoalan Sturm-Liouville. Seperti yang sudah kita lihat, jika  $y(0) = y(2\pi)$ ,  $y'(0) = y'(2\pi)$ , fungsi eigennya adalah  $\{\cos nx, \sin nx\}$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), yang merupakan basis deret Fourier biasa untuk sebarang fungsi berperiode  $2\pi$ .

Perhatikan bahwa, dalam selang  $0 \leq x \leq 2\pi$ , sebarang bagian fungsi kontinu  $f(x)$ , tidak harus periodik, bisa diekspansikan dalam deret Fourier cosinus dan sinus. Tetapi, di luar selang, karena fungsi trigonometrik bersifat periodik,  $f(x)$  juga akan periodik dengan periode  $2\pi$ . Jika periodenya tidak  $2\pi$ , kita bisa mengganti skala dalam deret Fourier, atau mengubah syarat batas persoalan Sturm-Liouville. Hasil yang diperoleh akan sama.

### 3.4.5 Persoalan Sturm-Liouville Singular

Dalam kasus ini,  $p(x)$  (dan mungkin juga  $w(x)$ ) hilang pada satu atau kedua titik ujung. Kita mengatakannya singular, karena persamaan Sturm-Liouville

$$(py')' + qy + \lambda wy = 0$$

bisa dituliskan sebagai

$$py'' + p'y' + qy + \lambda wy = 0,$$

atau

$$y'' + \frac{1}{p}p'y' + \frac{1}{p}qy + \lambda \frac{1}{p}wy = 0.$$

Jika  $p(a) = 0$ , maka jelaslah pada  $x = a$ , persamaan ini singular.

Jika  $p(a)$  dan  $p(b)$  keduanya nol,  $p(a) = p(b) = 0$ , syarat batas (3.16) secara otomatis terpenuhi. Ini menyarankan bahwa tidak terdapat batasan untuk nilai eigen  $\lambda$ . Tetapi, untuk  $\lambda$  sebarang, solusi persamaannya mungkin tidak memiliki arti. Syarat bahwa solusi dan turunannya harus berhingga meskipun pada titik singular biasanya membatasi nilai  $\lambda$  yang bisa diterima menjadi sebuah himpunan diskrit. Dengan kata lain, syarat batas dalam kasus ini digantikan dengan syarat bahwa  $y(x)$  harus berhingga pada  $x = a$  dan  $x = b$ .

Jika  $p(a) = 0$  dan  $p(b) \neq 0$ , maka syarat batas (3.16) menjadi

$$\begin{vmatrix} y_n(b) & y'_n(b) \\ y_m(b) & y'_m(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Syarat ini terpenuhi jika semua solusinya memenuhi syarat batas

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

dengan konstanta  $\beta_1$  dan  $\beta_2$  keduanya tidak nol. Sebagai tambahan, solusinya harus berhingga pada  $x = a$ .

Dengan cara serupa jika  $p(a) \neq 0$  dan  $p(b) = 0$ , maka  $y(x)$  harus berhingga pada  $x = b$ , dan

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,$$

dengan konstanta  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  keduanya tidak nol.

Banyak persamaan diferensial yang penting dan memiliki nama merupakan persoalan Sturm-Liouville singular. Berikut ini adalah beberapa contohnya.

### Persamaan Legendre

Persamaan diferensial Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

merupakan salah satu persamaan yang paling penting dalam fisika matematik. Solusi rinci persamaan ini akan kita pelajari dalam Bab 4 setelah ini. Di sini kita hanya akan memperhatikan bahwa ini merupakan persoalan Sturm-Liouville singular karena persamaannya bisa dituliskan sebagai

$$[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0,$$

yang merupakan persamaan Sturm-Liouville dengan  $p(x) = 1 - x^2$ ,  $q = 0$ ,  $w = 1$ . Karena  $p(x)$  hilang pada kedua ujung,  $p(1) = p(-1) = 0$ , ini merupakan persoalan Sturm-Liouville singular. Seperti yang akan kita lihat dalam Bab 4 setelah ini, agar solusinya terikat pada  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $\lambda$  harus memiliki satu nilai berikut

$$\lambda_n = n(n + 1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Berkaitan dengan tiap  $\lambda_n$ , fungsi eigen adalah fungsi Legendre  $P_n(x)$ , yang merupakan polinomial dengan orde  $n$ . Kita telah bertemu dengan fungsi ini ketika kita membentuk sebuah himpunan ortogonal dari  $\{x^n\}$  pada selang  $-1 \leq x \leq 1$  dengan fungsi bobot satuan. Sifat-sifat fungsi ini akan dipelajari dalam Bab 4. Karena  $P_n(x)$  merupakan fungsi eigen persoalan Sturm-Liouville, semuanya saling ortogonal dalam selang  $-1 \leq x \leq 1$  dengan fungsi bobot  $w(x) = 1$ . Lebih dari itu, himpunan  $\{P_n(x)\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) lengkap. Oleh karena itu, sebarang bagian fungsi  $f(x)$  yang kontinu pada selang  $-1 \leq x \leq 1$  bisa dinyatakan sebagai

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

dengan

$$c_n = \frac{\langle f | P_n \rangle}{\langle P_n | P_n \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx}{\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx}.$$

Deret ini dikenal sebagai deret Fourier-Legendre, yang sangat penting dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan simetri bola, yang akan kita lihat belakangan.

### Persamaan Bessel

Persoalannya terdiri dari persamaan

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - \nu^2 y + \lambda^2 x^2 y(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.18)$$

dan syarat batas

$$y(L) = 0.$$

Ini merupakan persoalan Sturm-Liouville singular. Di dalam persamaan  $\nu^2$  merupakan konstanta yang diberikan dan  $\lambda^2$  merupakan parameter yang bisa dipilih untuk memenuhi syarat batas. Untuk mengubah persamaan ini ke dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville, pertama marilah kita bagi persamaan dengan  $x^2$

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) - \frac{1}{x^2}\nu^2y + \lambda^2y(x) = 0 \quad (3.19)$$

dan kemudian mencari faktor integrasi

$$p(x) = e^{\int x^{-\frac{1}{x}} dx} = e^{\ln x} = x.$$

Kalikan (3.19) dengan faktor integrasi ini, kita mempunyai

$$xy''(x) + y'(x) - \frac{1}{x}\nu^2y(x) + \lambda^2xy(x) = 0, \quad (3.20)$$

yang bisa dituliskan sebagai

$$[xy']' - \frac{1}{x}\nu^2y + \lambda^2xy = 0.$$

Ini adalah persamaan Sturm-Liouville dengan  $p(x) = x$ ,  $q(x) = -\nu^2/x$ ,  $w(x) = x$ . Jelaslah, (3.20) bisa diperoleh secara langsung dari (3.18) dengan membagi (3.18) dengan  $x$ . Tetapi pendekatan tiap langkah akan memudahkan kita untuk menangani persamaan yang lebih rumit, yang akan segera kita lihat.

Karena  $p(0) = 0$ , terdapat titik singular pada  $x = 0$ . Jadi kita hanya memerlukan syarat batas  $y(L) = 0$  pada  $x = L$  untuk membuatnya sebagai persoalan Sturm-Liouville.

Pers. (3.18) berhubungan dekat dengan persamaan Bessel yang terkenal. Untuk melihat hubungan ini, marilah kita ganti variabel,  $t = \lambda x$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \lambda \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \lambda \frac{d}{dt} \left( \lambda \frac{dy}{dt} \right) = \lambda^2 \frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dx} &= \frac{t}{\lambda} \frac{dy}{dt} = t \frac{dy}{dt}, \\ x^2 \frac{d^2y}{dx^2} &= \left( \frac{t}{\lambda} \right)^2 \lambda^2 \frac{d^2y}{dt^2} = t^2 \frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned}$$

Jadi (3.18) bisa dituliskan sebagai

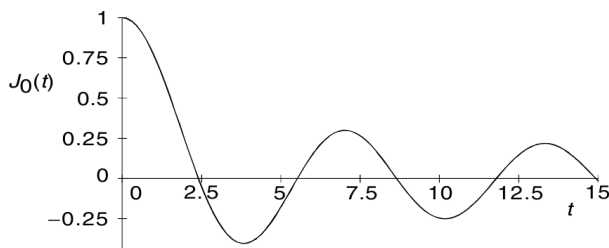
$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} - \nu^2y + t^2y = 0.$$

Ini adalah persamaan Bessel yang sangat penting dalam matematika murni maupun sains terapan. Informasi mengenai persamaan ini diketahui dengan baik. Kita akan membicarakan sifat-sifatnya dalam Bab 4.

Terdapat dua buah solusi bebas linier dari persamaan ini. satunya dikenal sebagai fungsi Bessel  $J_\nu(t)$  dan satunya lagi dikenal sebagai fungsi Neumann  $N_\nu(t)$ . Fungsi Bessel berhingga di setiap titik, tetapi fungsi Neumann menuju tak hingga ketika  $t \rightarrow 0$ .

Karena  $t = \lambda x$ , solusi  $y(x)$  dari (3.18) haruslah

$$y(x) = AJ_\nu(\lambda x) + BN_\nu(\lambda x)$$



Gambar 3.2: Fungsi Bessel orde nol  $J_0(t)$ .

Karena solusinya harus berhingga pada  $x = 0$ , oleh karena itu konstanta  $B$  haruslah nol. Sekarang nilai  $J_\nu(t)$  bisa dihitung, seperti yang akan kita lihat dalam Bab 4. Sebagai sebuah contoh, kita lihat dalam Gambar 3.2 fungsi Bessel orde nol  $J_0(t)$  sebagai fungsi  $t$ . Perhatikan bahwa, pada nilai  $t$  tertentu, nilainya nol. Nilai ini dikenal sebagai nilai nol fungsi Bessel, nilai ini ditabulasikan untuk beberapa nilai  $\nu$ . Sebagai contoh, nilai nol pertama  $J_0(t)$  muncul ketika  $t = 2.405$ , yang kedua pada  $t = 5.520, \dots$ . Nilai ini dituliskan sebagai  $z_{01} = 2.405$ ,  $z_{02} = 5.520, \dots$

Syarat batas  $y(L) = 0$  meminta

$$J_\nu(\lambda L) = 0.$$

Ini berarti  $\lambda$  hanya bisa memiliki nilai diskrit sedemikian rupa sehingga

$$\lambda_1 L = z_{\nu 1}, \quad \lambda_2 L = z_{\nu 2}, \quad \lambda_3 L = z_{\nu 3}, \dots$$

Yaitu,

$$\lambda_n = \frac{z_{\nu n}}{L}.$$

Sehingga fungsi eigen persoalan Sturm-Liouville adalah

$$y_n(x) = J_\nu(\lambda_n x).$$



Sekarang  $J_\nu(\lambda_n x)$  dan  $J_\nu(\lambda_m x)$  merupakan dua buah fungsi eigen yang berbeda beresesuaian dengan dua buah nilai eigen berbeda  $\lambda_n$  dan  $\lambda_m$ . Fungsi eigennya saling tegak lurus dengan fungsi bobot  $w(x) = x$ . Kemudian  $\{J_\nu(\lambda_n x)\}$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) merupakan himpunan lengkap dalam selang  $0 \leq x \leq L$ . Oleh karena itu sebarang bagian dari fungsi kontinu  $f(x)$  dalam selang ini bisa diekspansikan dalam suku fungsi eigen ini

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_\nu(\lambda_n x),$$

dengan

$$c_n = \frac{\langle f(x) | J_\nu(\lambda_n x) \rangle}{\langle J_\nu(\lambda_n x) | J_\nu(\lambda_n x) \rangle} = \frac{\int_0^L f(x) J_\nu(\lambda_n x) x dx}{\int_0^L [J_\nu(\lambda_n x)]^2 dx}.$$

Ekspansi ini dikenal sebagai deret Fourier-Bessel. Ini diperlukan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan simetri silinder.

**Contoh 3.4.4. Persamaan Hermite.** Buktikan persamaan diferensial berikut

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

merupakan persoalan Sturm-Liouville. Jika  $H_n(x)$  dan  $H_m(x)$  merupakan kedua buah solusinya buktikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{untuk } n \neq m.$$

**Solusi 3.4.4.** Untuk membentuknya dalam persamaan Sturm-Liouville, marilah kita hitung faktor integrasi

$$p(x) = e^{-\int^x 2x' dx'} = e^{-x^2}.$$

Kalikan persamaan dengan faktor integrasi ini, kita memperoleh

$$e^{-x^2} y'' - 2xe^{-x^2} y' + 2\alpha e^{-x^2} y = 0.$$

Karena

$$\left[ e^{-x^2} y' \right]' = e^{-x^2} y'' - 2xe^{-x^2} y',$$

persamaannya bisa dituliskan sebagai

$$\left[ e^{-x^2} y' \right]' + 2\alpha e^{-x^2} y = 0.$$

Ini berbentuk persamaan Sturm-Liouville dengan  $p(x) = e^{-x^2}$ ,  $q = 0$ ,  $w(x) = e^{-x^2}$ . Karena  $p(-\infty) = p(\infty) = 0$ , ini adalah persoalan Sturm-Liouville singular. Oleh karena itu, jika  $H_n(x)$  dan  $H_m(x)$  merupakan dua buah solusi persoalan ini, maka keduanya harus saling ortogonal dengan fungsi bobot  $e^{-x^2}$  yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{untuk } n \neq m.$$

**Contoh 3.4.5. Persamaan Laguerre.** Buktikan persamaan diferensial berikut

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \quad 0 < x < \infty$$

membentuk persoalan Sturm-Liouville singular. Jika  $L_n(x)$  dan  $L_m(x)$  dua solusi dari persoalan ini, buktikan bahwa

$$\int_0^{\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x} dx = 0 \quad \text{untuk } n \neq m.$$

**Solusi 3.4.5.** Untuk membuatnya dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville, marilah pertama kita bagi persamaannya dengan  $x$

$$y'' + \frac{1-x}{x}y' + n\frac{1}{x}y = 0$$

kemudian menghitung faktor integrasi

$$p(x) = e^{\int^x \frac{1-x'}{x'} dx'} = e^{\ln x-x} = xe^{-x}.$$

Kalikan persamaan terakhir dengan faktor integrasi, kita mempunyai

$$xe^{-x}y'' + (1-x)e^{-x}y' + ne^{-x}y = 0.$$

Karena

$$[xe^{-x}y']' = xe^{-x}y'' + (1-x)e^{-x}y'$$

persamaannya bisa dituliskan sebagai

$$[xe^{-x}y']' + ne^{-x}y = 0.$$

Ini berbentuk persamaan Sturm-Liouville dengan  $p(x) = xe^{-x}$ ,  $q = 0$ ,  $w(x) = e^{-x}$ . Karena  $p(0) = p(\infty) = 0$ , ini adalah persoalan Sturm-Liouville singular. Oleh karena itu, jika  $L_n(x)$  dan  $L_m(x)$  merupakan dua buah solusi persoalan ini, maka keduanya harus saling ortogonal dengan fungsi bobot  $e^{-x}$  yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x} dx = 0 \quad \text{untuk } n \neq m.$$

**Contoh 3.4.6. Persamaan Chebyshev.** Buktikan persamaan diferensial berikut

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad -1 < x < 1$$

membentuk persoalan Sturm-Liouville singular. Jika  $T_n(x)$  dan  $T_m(x)$  dua solusi dari persoalan ini, buktikan bahwa

$$\int_0^{\infty} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \text{untuk } n \neq m.$$

**Solusi 3.4.6.** Untuk membuatnya dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville, marilah pertama kita bagi persamaannya dengan  $(1 - x^2)$

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}y' + n^2 \frac{1}{1-x^2}y = 0$$

kemudian hitung faktor integrasi

$$p(x) = e^{-\int^x \frac{x'}{1-x'^2} dx'}$$

Untuk menghitung integralnya, misalkan  $u = 1 - x^2$ ,  $du = -2x dx$ , jadi

$$\int^x \frac{x'}{1-x'^2} dx' = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln u = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2).$$

Maka,

$$p(x) = e^{-\int^x \frac{x'}{1-x'^2} dx'} = e^{1/2 \ln(1-x^2)} = \left[ e^{\ln(1-x^2)} \right]^{1/2} = (1-x^2)^{1/2}.$$

Kalikan persamaan terakhir dengan faktor integrasi, kita mempunyai

$$(1-x^2)^{1/2}y'' - (1-x^2)^{-1/2}xy' + n^2(1-x^2)^{-1/2}y = 0$$

Karena

$$\left[ (1-x^2)^{1/2}y' \right]' = (1-x^2)^{1/2}y'' - (1-x^2)^{-1/2}xy'$$

persamaannya bisa dituliskan sebagai

$$\left[ (1-x^2)^{1/2}y' \right]' + n^2(1-x^2)^{-1/2}y = 0.$$

Ini berbentuk persamaan Sturm-Liouville dengan  $p(x) = (1-x^2)^{1/2}$ ,  $q = 0$ ,  $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ . Karena  $p(-1) = p(1) = 0$ , ini adalah persoalan Sturm-Liouville singular. Oleh karena itu, jika  $T_n(x)$  dan  $T_m(x)$  merupakan dua buah solusi persoalan ini, maka keduanya harus saling ortogonal dengan fungsi bobot  $(1-x^2)^{-1/2}$  yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_n(x)T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \text{untuk } n \neq m.$$

## 3.5 Fungsi Green

### 3.5.1 Fungsi Green dan Persamaan Diferensial Tak Homogen

Sejauh ini kita telah membuktikan bahwa jika solusi persamaan Sturm-Liouville memenuhi syarat batas tertentu, solusinya menjadi sebuah himpunan fungsi eigen ortogonal  $y_n(x)$ , dengan nilai eigen  $\lambda_n$ .

Sekarang anggap bahwa kita ingin menyelesaikan persamaan diferensial tak homogen berikut dalam selang  $a \leq x \leq b$

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} y \right] + q(x)y + kw(x)y = f(x), \quad (3.21)$$

dengan  $f(x)$  adalah fungsi yang diberikan. Syarat batas yang dipenuhi oleh solusi  $y(x)$  sama dengan yang dipenuhi fungsi eigen  $y_n(x)$  dari persoalan Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} y_n \right] + q(x)y_n + \lambda_n w(x)y_n = 0.$$

Perhatikan bahwa  $k \neq \lambda_n$ . Bahkan  $k$  bisa bernilai nol.

Akan lebih nyaman jika kita menghitung dengan fungsi eigen ternormalisasi. Jika  $y_n(x)$  belum ternormalisasi, kita bisa mendefinisikan

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\langle y_n | y_n \rangle^{1/2}} y_n(x),$$

maka

$$\langle \phi_m | \phi_n \rangle = \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) w(x) dx = \delta_{nm}.$$

Karena  $\{\phi_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) merupakan himpunan ortonormal lengkap, solusi  $y(x)$  dari (3.21) bisa diekspansikan dalam suku  $\phi_n$

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

Masukkan dalam (3.21), kita mempunyai

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left\{ \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right\} \phi_n(x) + kw(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = f(x).$$

Karena

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right\} \phi_n(x) = -\lambda_n w(x) \phi_n(x),$$

jadi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-\lambda_n + k) w(x) \phi_n(x) = f(x).$$

Kalikan kedua ruas dengan  $\phi_m(x)$  dan integralkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-\lambda_n + k) \int_a^b w(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \int_a^b f(x) \phi_m(x) dx.$$

Karena syarat ortogonalitas, kita mempunyai

$$c_m (-\lambda_m + k) = \int_a^b f(x) \phi_m(x) dx,$$

atau

$$c_n = \frac{1}{k - \lambda_n} \int_a^b f(x) \phi_n(x) dx.$$

Maka solusi  $y(x)$  adalah

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k - \lambda_n} \int_a^b f(x') \phi_n(x') dx' \right] \phi_n(x).$$

Karena  $f(x)$  adalah fungsi yang diberikan, kita menganggap deret ini bisa dihitung. Tetapi, kita ingin mempunyai bentuk yang berbeda, dan memperkenalkan sebuah fungsi yang secara konsep penting, yang disebut fungsi Green. Dengan asumsi penjumlahan dan integrasi bisa dipertukarkan, kita bisa menuliskan rumus terakhir sebagai:

$$y(x) = \int_a^b f(x') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x') \phi_n(x)}{k - \lambda_n} dx'.$$

Sekarang jika kita mendefinisikan fungsi Green sebagai:

$$G(x', x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x') \phi_n(x)}{k - \lambda_n}, \quad (3.22)$$

maka solusi  $y(x)$  bisa dituliskan sebagai

$$y(x) = \int_a^b f(x') G(x', x) dx'.$$

### 3.5.2 Fungsi Green dan Fungsi Delta

Untuk mengapresiasi arti dari fungsi Green, pertama kita akan membuktikan bahwa  $G(x', x)$  adalah solusi (3.21) kecuali  $f(x)$  digantikan dengan fungsi delta  $\delta(x' - x)$ . Yaitu, kita akan membuktikan bahwa

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} G(x', x) \right] + q(x) G(x', x) + kw(x) G(x', x) = \delta(x' - x), \quad (3.23)$$

dengan fungsi delta  $\delta(x' - x)$  diberikan oleh hubungan

$$F(x) = \int_a^b F(x') \delta(x' - x) dx', \quad a < x < b.$$

Dengan  $G(x, x')$  diberikan oleh (3.22)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} G(x', x) \right] + q(x) G(x', x) + kw(x) G(x', x) \\ &= \left\{ \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x') \phi_n(x)}{k - \lambda_n} + kw(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x') \phi_n(x)}{k - \lambda_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\lambda_n w(x) \phi_n(x') \phi_n(x)}{k - \lambda_n} + kw(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x') \phi_n(x)}{k - \lambda_n} = w(x) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x') \phi_n(x) \end{aligned}$$

yang bisa dibuktikan sebagai ekspansi fungsi eigen dari fungsi delta. Misalkan

$$\delta(x' - x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

Perkalian titik kedua ruas dengan salah satu fungsi eigen adalah

$$a_n = \langle \delta(x' - x) \phi_n(x) \rangle.$$

Jadi

$$\begin{aligned} \delta(x' - x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \delta(x' - x) | \phi_n(x) \rangle \phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_a^b \delta(x' - x) \phi_n(x) w(x) dx \right] \phi_n(x) = w(x') \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x') \phi_n(x) \end{aligned}$$

Selanjutnya, karena  $\delta(x' - x)$  bernilai tak nol hanya pada  $x = x'$

$$\delta(x' - x) = \delta(x - x') = w(x) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \phi_n(x'). \quad (3.24)$$

Pers. (3.23) terbukti.

Sekarang fungsi Green bisa diinterpretasikan sebagai berikut. Persamaan diferensial linier, seperti (3.21), bisa digunakan untuk mendeskripsikan sistem fisis linier. Fungsi  $f(x)$  dalam ruas kanan persamaan merepresentasikan “gaya,” atau fungsi gaya yang dikerjakan pada sistem. Dengan kata lain,  $f(x)$  merupakan input pada sistem. Solusi dari persamaan,  $y(x)$ , merepresentasikan respon dari sistem.

Fungsi Green  $G(x', x)$  mendeskripsikan respon sistem fisis terhadap sebuah fungsi delta satuan, yang merepresentasikan impuls sumber titik pada  $x$  yang besarnya satu.

Kita bisa membuat model sebarang input  $f(x)$  sebagai penjumlahan beberapa input titik. Ini dinyatakan sebagai

$$f(x) = \int f(x') \delta(x' - x) dx'.$$

Nilai dari  $f(x')$  sederhananya adalah besarnya fungsi delta pada  $x$ . Karena  $G(x', x)$  merupakan respon dari fungsi delta satuan, jika besar fungsi delta adalah  $f(x')$  kali lebih besar, respon juga akan lebih besar sebesar itu. Yaitu, respon akan  $f(x')G(x', x)$ . Karena sistemnya linier, kita bisa mencari respon sistem pada input  $f(x)$  dengan menambahkan respon pada titik-titik input. Yaitu

$$y(x) = \int f(x') G(x', x) dx'.$$

**Contoh 3.5.1.** (a) Tentukan ekspansi fungsi eigen dari fungsi Green  $G(x', x)$  untuk

$$y'' + y = x,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

(b) Carilah solusi  $y(x)$  dari persamaan diferensial tak homogen melalui

$$y(x) = \int_0^1 x' G(x', x) dx'.$$

**Solusi 3.5.1.** (a) Untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak homogen, marilah kita lihat persoalan nilai eigen yang sesuai

$$y'' + y + \lambda y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

yang merupakan persoalan Sturm-Liouville, dengan  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 1$ ,  $w(x) = 1$ . Solusi persamaan

$$y'' = -(1 + \lambda)y$$

adalah

$$y(x) = A \cos \sqrt{1 + \lambda}x + B \sin \sqrt{1 + \lambda}x.$$

Syarat batas  $y(0) = 0$  meminta

$$y(0) = A = 0,$$

jadi

$$y(1) = B \sin \sqrt{1 + \lambda}.$$

Jadi syarat batas yang lain  $y(1) = 0$  membuat

$$\sqrt{1 + \lambda} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Maka nilai eigennya

$$\lambda_n = n^2\pi^2 - 1,$$

dan fungsi eigennya adalah

$$y_n(x) = \sin n\pi x.$$

Oleh karena itu fungsi eigen yang bersesuaian adalah

$$\phi_n(x) = \frac{\sin n\pi x}{\left[\int_0^1 \sin n\pi x dx\right]^{1/2}} = \sqrt{2} \sin n\pi x.$$

Oleh karena itu fungsi Greenya bisa dituliskan

$$G(x', x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x')\phi_n(x)}{0 - \lambda_n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x') \sin(n\pi x)}{1 - n^2\pi^2}.$$

(b) Solusi  $y(x)$  diberikan oleh

$$y(x) = \int_0^1 x' G(x', x) dx' = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{1 - n^2\pi^2} \int_0^1 x' \sin n\pi x' dx'.$$

Karena

$$\begin{aligned} \int_0^1 x' \sin n\pi x' dx' &= \left[ x' \left( -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x' \right) \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x' dx' \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \end{aligned}$$

solusinya bisa dinyatakan sebagai

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n\pi x}{n(1 - n^2\pi^2)}.$$

Dalam contoh ini, dengan ekspansi fungsi eigen dari fungsi Green, kita telah menemukan solusi persoalan yang dinyatakan dalam deret Fourier dari fungsi sinus. Untuk menunjukkan fungsi Green merupakan respon sistem terhadap fungsi delta satuan, kita bisa menyelesaikan persoalan yang sama dengan fungsi Green yang diperoleh langsung dari persamaan

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x', x) + G(x', x) = \delta(x' - x). \quad (3.25)$$

Kita akan mengerjakannya dalam contoh berikut.

**Contoh 3.5.2.** (a) Selesaikan soal pada contoh sebelumnya dengan fungsi Green yang diperoleh dari kenyataan bahwa ini merupakan respon sistem terhadap fungsi delta satuan. (b) Selesaikan persamaan diferensial tak homogen dari contoh sebelumnya, dengan fungsi Green yang diperoleh pada (a).

**Solusi 3.5.2.** (a) Karena fungsi Green merupakan respon sebuah sistem terhadap sebuah fungsi delta, kita meminta fungsi ini kontinu dan berhingga pada selang yang ditinjau. Untuk  $x \neq x'$ , fungsi Green memenuhi persamaan

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x', x) + G(x', x) = 0.$$

Solusi persamaan ini diberikan oleh

$$G(x', x) = A(x') \cos x + B(x') \sin x.$$



Sepanjang  $x$  yang ditinjau,  $A(x')$  dan  $B(x')$  merupakan dua buah konstanta sebarang. Tetapi tidak ada alasan bahwa konstanta ini sama untuk  $x < x'$  seperti  $x > x'$ , kenyataannya memang berbeda. Marilah kita tuliskan  $G(x', x)$  sebagai

$$G(x', x) = \begin{cases} a \cos x + b \sin x, & x < x', \\ c \cos x + d \sin x, & x > x'. \end{cases}$$

Karena fungsi Green harus memenuhi syarat batas yang sama seperti persamaan diferensial asalnya. Pada  $x = 0$ ,  $G(x', 0) = 0$ . Karena  $x = 0$  jelaslah lebih kecil dari  $x'$ , maka kita meminta

$$G(x', 0) = a \cos 0 + b \sin 0 = a = 0.$$

Selanjutnya, karena pada  $x = 1$ ,  $G(x', 1) = 0$ , kita mempunyai

$$G(x', 1) = c \cos 1 + d \sin 1 = 0.$$

Diperoleh

$$d = -c \frac{\cos 1}{\sin 1}.$$

Jadi untuk  $x > x'$

$$\begin{aligned} G(x', x) &= c \cos x - c \frac{\cos 1}{\sin 1} \sin x = c \frac{1}{\sin 1} (\sin 1 \cos x - \cos 1 \sin x) \\ &= c \frac{1}{\sin 1} \sin(1 - x). \end{aligned}$$

Dengan menerapkan syarat batas, kita mempunyai dua buah konstanta untuk ditentukan

$$G(x', x) = \begin{cases} b \sin x, & x < x', \\ c \frac{1}{\sin 1} \sin(1 - x), & x > x'. \end{cases}$$

Untuk menentukan  $b$  dan  $c$ , kita menggunakan syarat bahwa  $G(x', x)$  harus kontinu pada  $x = x'$ , jadi

$$b \sin x' = c \frac{1}{\sin 1} \sin(1 - x').$$

Sehingga

$$G(x', x) = \begin{cases} G^-(x', x) = b \sin x, & x < x', \\ G^+(x', x) = c \frac{b}{\sin x'} \sin(1 - x') \sin(1 - x), & x > x'. \end{cases}$$

Selanjutnya kita integralkan kedua ruas (3.25) terhadap sebuah selang kecil  $x'$

$$\int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} \frac{d^2}{dx^2} G(x', x) dx + \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} G(x', x) dx = \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} \delta(x' - x) dx.$$

Integral pada ruas kanan sama dengan 1, dengan definisi fungsi delta. Ketika  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} G(x', x) dx = 0.$$

Integral ini sama dengan  $2\epsilon$  kali nilai rata-rata  $G(x', x)$  dibagi  $2\epsilon$  pada  $x = x'$ . Karena  $G(x', x)$  berhingga, integral ini sama dengan nol ketika  $\epsilon$  mendekati nol. Sekarang

$$\int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} \frac{d^2}{dx^2} G(x', x) dx = \frac{dG(x', x)}{dx} \Big|_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon}.$$

Ketika  $\epsilon \rightarrow 0$ , diperoleh

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{x'-\epsilon}^{x'+\epsilon} \frac{d^2}{dx^2} G(x', x) dx = \frac{dG^+(x', x)}{dx} \Big|_{x=x'} - \frac{dG^-(x', x)}{dx} \Big|_{x=x'}.$$

Maka

$$-b \frac{\sin x'}{\sin(1-x')} \cos(1-x') - b \cos x' = 1,$$

atau

$$-b \frac{\sin x'}{\sin(1-x')} [\sin(1-x') \cos x' + \cos(1-x') \sin x'] = 1.$$

Karena

$$[\sin(1-x') \cos x' + \cos(1-x') \sin x'] = \sin(1-x' + x') = \sin 1,$$

jadi

$$b = -\frac{\sin(1-x')}{\sin 1}.$$

Maka fungsi Greennya diberikan oleh

$$G(x', x) = \begin{cases} -\frac{\sin(1-x')}{\sin 1} \sin x, & x < x', \\ -\frac{\sin(1-x')}{\sin 1} \sin(1-x), & x > x'. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^1 x' G(x', x) dx' \\ &= -\int_0^x x' \frac{\sin x'}{\sin 1} \sin(1-x) dx' - \int_x^1 x' \frac{\sin(1-x')}{\sin 1} \sin x dx' \\ &= -\frac{\sin(1-x)}{\sin 1} \int_0^x x' \sin x' dx' - \frac{\sin x}{\sin 1} \int_x^1 x' \sin(1-x') dx'. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} \int_0^x x' \sin x' dx' &= [-x' \cos x' + \sin x']_0^x = -x \cos x + \sin x, \\ \int_x^1 x' \sin(1-x') dx' &= [x' \cos(1-x') + \sin(1-x')]_x^1 = 1 - x \cos(1-x) - \sin(1-x), \end{aligned}$$

jadi

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{\sin 1} [-x \sin(1-x) \cos x + \sin x - x \sin x \cos(1-x)] \\ &= -\frac{1}{\sin 1} [-x \sin(1-x+x) + \sin x] = x - \frac{1}{\sin 1} \sin x. \end{aligned}$$

Untuk melihat hasil ini sama dengan solusi yang diperoleh pada contoh sebelumnya, kita bisa mengekspansikan dalam deret Fourier sinus dalam selang  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{\sin 1} \sin x &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x \\ a_n &= 2 \int_0^1 \left( x - \frac{1}{\sin 1} \sin x \right) \sin n\pi x \, dx. \end{aligned}$$

Bisa dengan mudah dibuktikan bahwa

$$\int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi},$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin x \sin n\pi x \, dx &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n\pi - 1} \sin(n\pi - 1) - \frac{1}{n\pi + 1} \sin(n\pi + 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi - 1} \sin 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi + 1} \sin 1 \right] = \frac{(-1)^{n+1} n\pi}{n^2 \pi^2} \sin 1. \end{aligned}$$

Maka

$$a_n = 2 \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{(-1)^{n+1} n\pi}{n^2 \pi^2} \right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi(1 - n^2 \pi^2)},$$

dan

$$x - \frac{1}{\sin 1} \sin x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(1 - n^2 \pi^2)} \sin n\pi x,$$

yang identik dengan hasil sebelumnya.

Soal ini bisa dengan mudah diselesaikan dengan “metode biasa.” Jelaslah  $x$  merupakan solusi khusus, dan fungsi komplementernya adalah  $y_c = A \cos x + B \sin x$ . Dengan memasukkan syarat batas  $y(0) = 0$  dan  $y(1) = 1$  pada solusi

$$y(x) = y_p + y_c = x + A \cos x + B \sin x,$$

kita memperoleh

$$y(x) = x \frac{1}{\sin 1} \sin x.$$

Kita menggunakan persoalan ini untuk mengilustrasikan bagaimana fungsi Green bekerja. Untuk persoalan sederhana seperti ini, fungsi Green tidak menawarkan keuntungan, tetapi ide dari fungsi Green sangatlah berguna ketika menemui syarat batas dan juga aproksimasi dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Kita akan melihat aspek fungsi Green ini dalam bab belakangan.

### 3.6 Latihan

1. (a) Gunakan enam buah rumus eksplisit polinomial Legendre yang pertama

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

untuk membuktikan

$$P_n(1) = 1,$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

terpenuhi oleh  $P_n(x)$ , paling tidak untuk  $n = 0$  sampai  $n = 5$ .

- (b) Buktikan bahwa jika  $y_n = P_n(x)$  untuk  $n = 0, 1, 2, \dots, 5$ , maka

$$(1 - x^2)y_n'' - 2xy_n' + n(n+1)y_n = 0.$$

2. Nyatakan fungsi berikut

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

dalam polinomial Legendre untuk selang  $-1 \leq x \leq 1$ . Carilah secara eksplisit empat buah suku pertamanya.

Jawab:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^1 x P_n(x) dx,$

$$f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) - \frac{3}{32}P_4(x) + \dots$$

### 3. Polinomial Laguerre.

- (a) Gunakan prosedur Gram-Schmidt untuk memperoleh tiga buah polinomial  $L_n$  pertama dari himpunan  $\{x^n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) yang saling ortogonal pada selang  $0 \leq x < \infty$  dengan fungsi bobot  $e^{-x}$ . Gunakan konvensi sehingga  $L_n(0) = 1$ .

- (b) Buktikan, dengan integrasi langsung, bahwa

$$\int_0^{\infty} L_m(x)L_n(x)e^{-x} dx = \delta_{nm}.$$

- (c) Buktikan bahwa jika  $y_n = L_n(x)$ , maka  $y_n$  memenuhi persamaan diferensial Laguerre

$$xy_n'' + (1-x)y_n' + ny_n = 0.$$

(Anda mungkin memerlukan integral  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ .)

Jawab:  $L_0(x) = 1$ ,  $L_1(x) = 1 - x$ ,  $L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2$ .

#### 4. Polinomial Hermite.

- (a) Gunakan prosedur Gram-Schmidt untuk memperoleh tiga buah polinomial  $H_n$  pertama dari himpunan  $\{x^n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) yang saling ortogonal pada selang  $-\infty < x < \infty$  dengan fungsi bobot  $e^{-x^2}$ . Carilah konstanta pengali dengan syarat

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2} dx = \delta_{nm}n!2^n\sqrt{\pi}.$$

- (b) Buktikan bahwa jika  $y_n = H_n(x)$ , maka  $y_n$  memenuhi persamaan diferensial Hermite

$$y_n'' + -2xy_n' + 2ny_n = 0.$$

(Anda mungkin memerlukan integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .)

Jawab:  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$ ,  $H_2(x) = 4x^2 - 2$ .

#### 5. Persamaan Laguerre Terasosiasi.

- (a) Nyatakan persamaan diferensial Laguerre terasosiasi

$$xy''(x) + (k + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0$$

dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville.

- (b) Buktikan dalam selang  $0 \leq x < \infty$ , ini adalah persoalan Sturm-Liouville singular.  
 (c) Cari syarat ortogonalitas dari fungsi eigennya.

Jawab: (a)  $[x^{k+1}e^{-x}y'(x)]' + nx^k e^{-x}y(x) = 0$ .

- (c)  $\int_0^{\infty} x^k e^{-x} y_n(x) y_m(x) dx = 0$ ,  $n \neq m$ .

#### 6. Polinomial Laguerre Terasosiasi.

- (a) Gunakan prosedur Gram-Schmidt untuk memperoleh tiga buah polinomial  $L_n^1(x)$  pertama dari himpunan  $\{x^n\}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) yang saling ortogonal pada selang  $0 \leq x < \infty$  dengan fungsi bobot  $xe^{-x}$ . Carilah konstanta pengali dengan syarat

$$\int_0^{\infty} L_n^1(x)L_m^1(x)xe^{-x} dx = \delta_{nm}.$$

- (b) Buktikan bahwa jika  $y_n = L_n^1(x)$ , maka  $y_n$  memenuhi persamaan Laguerre terasosiasi dengan  $k = 1$

$$xy_n'' + (k + 1 + x)y_n' + ny_n = 0.$$

Jawab:  $L_0^1(x) = 1$ ,  $L_1^1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-2)$ ,  $L_2^1(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - 6x + 6)$ .

### 7. Polinomial Chebyshev.

(a) Buktikan persamaan Chebyshev

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1$$

bisa dinyatakan sebagai

$$\frac{d^2}{d\theta} \Theta(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0, \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

dengan mengganti variabel  $x = \cos \theta$ ,  $(\Theta(\theta) = y(x(\theta)) = y(\cos \theta))$ .

(b) Buktikan dalam  $\theta$   $dy/dx$  bisa dinyatakan sebagai

$$\frac{dy}{dx} = \left[ A\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\theta - B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\theta \right] \frac{1}{\sin \theta}.$$

Petunjuk:  $\Theta(\theta) = A \cos \sqrt{\lambda}\theta + B \sin \sqrt{\lambda}\theta$ ;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\Theta}{dx} = \frac{d\Theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dx}; \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta}.$$

(c) Buktikan syarat agar  $y$  dan  $dy/dx$  berhingga adalah

$$B = 0, \quad \lambda = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$$

Oleh karena itu nilai eigen dan fungsi eigennya adalah

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = \cos n\theta.$$

(d) Fungsi eigen dari persamaan Chebyshev dikenal sebagai polinomial Chebyshev, biasanya diberikan label  $T_n(x)$ . Carilah  $T_n(x)$  dengan syarat  $T_n(1) = 1$  untuk  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ .

Petunjuk:  $T_n(x) = y_n(x) = \Theta_n(\theta) = \cos n\theta$ ;  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ ,  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ ,  $\cos 4\theta = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos 2\theta + 1$ .

(e) Buktikan untuk bilangan bulat sebarang  $n$  dan  $m$

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \end{cases}$$

Jawab: (d)  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = x$ ,  $T_2 = 2x^2 - 1$ ,  $T_3 = 4x^3 - 3x$ ,  $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ .

8. **Persamaan hipergeometrik** Nyatakan persamaan hipergeometrik

$$(x - x^2)y'' + [c - (1 + a + b)x]y' - aby = 0$$

dalam bentuk Sturm-Liouville. Agar menjadi persoalan Sturm-Liouville singular dalam selang  $0 \leq x \leq 1$ , syarat apa yang harus dipenuhi oleh  $a$ ,  $b$  dan  $c$ , jika fungsi bobotnya memenuhi syarat  $w(0) = 0$  dan  $w(1) = 0$ ?

Petunjuk: Gunakan pecahan parsial  $\frac{c - (1 + a + b)x}{x(1 - x)}$  untuk menghitung

$$\exp \int^x \frac{c - (1 + a + b)x}{x(1 - x)} dx.$$

Jawab:  $[x^c(1 - x)^{1+a+b-c}y']' - abx^{c-1}(1 - x)^{a+b-c}y = 0$ ,  $c > 1, a + b > c$ .

9. Buktikan jika  $L$  operator linier dan

$$\langle h|Lh \rangle = \langle Lh|h \rangle$$

untuk semua fungsi  $h$  dalam ruang fungsi kompleks, maka

$$\langle f|Lg \rangle = \langle Lf|g \rangle$$

untuk semua  $f$  dan  $g$ .

Petunjuk: Pertama misalkan  $h = f + g$  dan kemudian misalkan  $h = f + ig$ .

10. Perhatikan himpunan fungsi  $f(x)$  terdefinisi pada selang  $-\infty < x < \infty$ , yang nilainya nol paling tidak secepat  $x^{-1}$ , ketika  $x \rightarrow \pm\infty$ . Untuk fungsi bobot satu-an, tentukan apakah operator linier berikut hermitian atau tidak ketika bekerja pada  $\{f(x)\}$ .

$$(a) \frac{d}{dx} + x, \quad (b) \frac{d^2}{dx^2}, \quad (c) -i \frac{d}{dx} + x^2, \quad (d) ix \frac{d}{dx}.$$

Jawab: (a) tidak, (b) ya, (c) ya, (d) tidak.

11. (a) Nyatakan solusi berhingga persamaan diferensial tak homogen berikut

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + ky = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

dalam polinomial Legendre dengan bantuan fungsi Green.

- (b) Jika  $k = 14$  dan  $f(x) = 5x^3$ , carilah solusi eksplisitnya.

$$\text{Jawab: } G(x', x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1 P_n(x') P_n(x)}{2k - \lambda_n}.$$

$$(a) y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad a_n = \frac{2n + 1}{2} \frac{1}{k - n(n + 1)} \int_{-1}^1 f(x') P_n(x') dx'.$$

$$(b) y(x) = (10x^3 - 5x)/4.$$

12. Tentukan nilai eigen dan fungsi eigen persoalan berikut ini

- (a)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ .  
 (b)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y'(\pi) = 0$ .  
 (c)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) = y(2\pi)$ ,  $y'(0) = y'(2\pi)$ .

Jawab:

- (a)  $\lambda_n = [(2n+1)\pi/2]^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $y_n(x) = \sin \frac{\pi}{2}(2n+1)x$ .  
 (b)  $\lambda_n = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $y_n(x) = \cos nx$ .  
 (c)  $\lambda_n = n^2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $y_n(x) = \cos nx$ ,  $\sin x$ .

13. (a) Buktikan persamaan diferensial berikut dengan syarat batasnya merupakan persoalan Sturm-Liouville. Berapakah fungsi bobotnya?

$$y'' - 2y' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

(b) Tentukan nilai eigen dan fungsi eigennya untuk persoalan tersebut. Tentukan juga konstanta pengali dengan syarat

$$\int_0^1 y_n(x)y_m(x)w(x) dx = \frac{1}{2}\delta_{nm}.$$

Jawab: (a)  $[e^{-2x}y']' + \lambda e^{-2x}y = 0$ ,  $w(x) = e^{-2x}$ .

(b)  $\lambda_n = n^2\pi^2 + 1$ ,  $y_n(x) = e^x \sin n\pi x$ .

14. (a) Buktikan bahwa jika  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  merupakan akar positif dari

$$\tan \alpha = \frac{h}{\alpha},$$

maka  $\lambda_n = \alpha^2$  dan  $y_n(x) = \cos \alpha_n x$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  merupakan nilai eigen dan fungsi eigen persoalan Sturm-Liouville berikut:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) + hy(1) = 0.$$

(b) Buktikan bahwa

$$\int_0^1 \cos \alpha_n x \cos \alpha_m x dx = \beta_n^2 \delta_{nm}$$

$$\beta^2 = \frac{\alpha_n^2 + h^2 + h}{2(\alpha_n^2 + h^2)}.$$

$$\text{Petunjuk: } \beta^2 = \frac{1}{2} + \frac{2 \sin 2\alpha_n}{4\alpha_n}, \quad \sin 2\alpha_n \cos \alpha_n = \frac{2\alpha_n h}{\alpha_n^2 + h^2}.$$



15. Carilah ekspansi fungsi eigen untuk solusi dengan syarat batas  $y(0) = y(\pi) = 0$  dari persamaan diferensial tak homogen:

$$y'' + ky = f(x)$$

dengan  $k$  sebuah konstanta dan

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Jawab:  $y(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=\text{ganjil}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2(k-n^2)} \sin nx.$

16. (a) Carilah fungsi eigen ternormalisasi  $y_n(x)$  dari operator Hermitian  $d^2/dx^2$  yang memenuhi syarat batas  $y_n(0) = y_n(\pi) = 0$ . Bentuklah fungsi Green dari operator ini  $G(x', x)$ .

- (b) Buktikan fungsi Green yang diperoleh dari

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x', x) = \delta(x' - x)$$

adalah

$$G(x', x) = \begin{cases} \frac{x(x' - \pi)}{\pi}, & 0 \leq x \leq x', \\ \frac{x'(x - \pi)}{\pi}, & x' \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- (c) Dengan mengekspansikan fungsi yang diberikan pada (b) dalam fungsi eigen  $y_n(x)$ , buktikan bahwa ini sama dengan fungsi yang diturunkan pada (a).

Jawab: (a)  $y_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin nx, n = 1, 2, \dots$

$$G(x', x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx' \sin nx.$$



## 4

# Fungsi Bessel dan Polinomial Legendre

Kita telah belajar beberapa persamaan diferensial. Persamaan-persamaan tersebut sangatlah penting di dalam sains maupun teknik karena banyak penggunaannya. Dalam Bab 6, kita akan mempelajari berbagai permasalahan fisika yang muncul dari persamaan diferensial tersebut. Sayangnya persamaan-persamaan tersebut banyak yang tidak bisa diselesaikan dengan fungsi-fungsi dasar yang selama ini kita kenal. Untuk menyelesaikannya, kita harus menggunakan metode deret pangkat. Fungsi yang dinyatakan dengan metode deret ini dinamakan sebagai fungsi khusus.

Kita mengetahui secara rinci tentang fungsi khusus ini. Penghitungan fungsi-fungsi ini dapat ditemukan dalam berbagai buku dan juga program komputer. Kita akan memberikan beberapa diantaranya pada akhir bab.

Agar kita bisa bekerja dengan fungsi-fungsi ini dan memiliki rasa pemahaman ketika hasil dinyatakan dengan suku-suku fungsi khusus, kita harus mengetahuinya bukan hanya sekedar definisi saja, tetapi juga beberapa propertinya (sifat-sifatnya). Pembiasaan kita dengan fungsi khusus sangat kita perlukan untuk bekerja dengan permasalahan fisika matematik.

Dalam bab ini, pertama kita akan memperkenalkan solusi deret pangkat persamaan diferensial orde kedua, yang dikenal sebagai metode Frobenius. Selanjutnya kita akan menggunakan metode ini untuk mencari solusi deret dari persamaan Bessel dan Legendre.

Tanpa keraguan, fungsi yang paling sering muncul dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde dua adalah fungsi trigonometrik, hiperbolik, Bessel dan Legendre. Karena pembaca sudah familiar dengan fungsi trigonometrik dan hiperbolik, kita tidak akan membahasnya. Pembahasan dalam bab ini difokuskan pada karakteristik dan sifat-sifat dari persamaan Bessel dan Legendre.

## 4.1 Metode Frobenius

### 4.1.1 Solusi Deret Pangkat Persamaan Diferensial

Sebuah persamaan diferensial linier orde dua dalam bentuk

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad (4.1)$$

dapat diselesaikan dengan menyatakan  $y(x)$  dalam deret pangkat

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (4.2)$$

jika  $p(x)$  dan  $q(x)$  analitik pada  $x = 0$ .

Metode ini memiliki ide yang sederhana. Jika  $p(x)$  dan  $q(x)$  analitik pada  $x = 0$ , maka dua fungsi tersebut dapat dinyatakan dalam deret Taylor yaitu:

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots, \\ q(x) &= q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Di sekitar titik  $x = 0$ , persamaan diferensial menjadi:

$$y'' + p_0y' + q_0y = 0.$$

Persamaan ini merupakan persamaan diferensial dengan koefisien konstan. Solusinya dapat berupa fungsi eksponensial maupun pangkat dari  $x$  dikalikan dengan sebuah fungsi eksponen. Kedua fungsi ini dapat dinyatakan dalam deret di sekitar titik  $x = 0$ . Sehingga secara alami, kita bisa menggunakan (4.2) sebagai solusi uji. Setelah kita menggantikan (4.2) pada (4.1), kita menentukan  $a_n$  sehingga persamaan diferensial (4.1) terpenuhi secara identik. Jika solusi deret berikut koefisien yang ditentukan konvergen, maka kita sudah mendapatkan solusi. Kita bisa melihat contoh berikut untuk melihat bagaimana prosedur bekerja.

**Contoh 4.1.1** Selesaikan persamaan diferensial

$$y'' + y = 0,$$

dengan mengekspansikan  $y(x)$  dalam deret pangkat!

**Solusi 4.1.1.** Dengan

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}, \end{aligned}$$

sehingga persamaan diferensialnya dapat dituliskan sebagai:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Dua suku pertama pada penjumlahan pertama, untuk  $n = 0$  dan  $n = 1$ , yaitu  $[a_0 0(-1)x^{-2} + a_1 1(0)x^{-1}]$  nilainya nol, sehingga penjumlahan dimulai dari  $n = 2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \quad (4.3)$$

Untuk menyatukan suku, kita tuliskan indeks untuk suku pertama sebagai

$$n = k + 2,$$

sehingga penjumlahannya dapat ditulis sebagai

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k.$$

Sekarang  $k$  adalah indeks yang berjalan, kita tidak perlu merisaukan nama dari indeks, dan dapat diganti sesuai kebutuhan. Apabila kita gunakan lagi  $n$ , maka

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n.$$

Pers. (4.3) dapat dituliskan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n] x^n = 0.$$

Agar nilai deret ini adalah nol untuk semua  $n$ , maka koefisien  $x^n$  haruslah bernilai nol yaitu

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n = 0,$$

atau

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Hubungan ini dikenal sebagai hubungan rekursi yang menghubungkan semua koefisien

genap dengan  $a_0$  dan koefisien ganjil dengan  $a_1$ . Untuk

$$\begin{aligned} n = 0, \quad a_2 &= -\frac{1}{2 \cdot 1} a_0, \\ n = 2, \quad a_4 &= -\frac{1}{4 \cdot 3} a_2 = -\frac{1}{4 \cdot 3} \left( -\frac{1}{2 \cdot 1} a_0 \right) = \frac{1}{4!} a_0, \\ n = 4, \quad a_6 &= -\frac{1}{6!} a_0, \\ &\text{dst...} \\ n = 1, \quad a_3 &= -\frac{1}{3 \cdot 2} a_1, \\ n = 3, \quad a_5 &= -\frac{1}{5 \cdot 4} a_3 = -\frac{1}{5 \cdot 4} \left( -\frac{1}{3 \cdot 2} a_1 \right) = \frac{1}{5!} a_1, \\ n = 5, \quad a_7 &= -\frac{1}{7!} a_1, \\ &\text{dst...} \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 \left( 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots \right) \\ &\quad + a_1 \left( x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \right), \end{aligned}$$

yang tidak lain merupakan deret tak hingga (uraian Taylor) untuk fungsi cosinus dan sinus, sehingga

$$y(x) = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

### 4.1.2 Klasifikasi Titik Singular

Pertanyaan yang muncul sekarang, jika  $p(x)$  dan  $q(x)$  bukanlah fungsi analitik pada  $x = 0$ , apakah kita masih dapat menggunakan metode deret pangkat? Dengan kata lain, jika  $x = 0$  adalah titik singular untuk  $p(x)$  dan/atau  $q(x)$  apakah terdapat metode umum untuk menyelesaikan persamaan? Untuk menjawab pertanyaan tersebut, kita perlu membedakan dua buah jenis titik singular.

**Definisi** Anggap  $x_0$  adalah titik singular dari  $p(x)$  dan/atau  $q(x)$ . Kita menyebutnya titik singular biasa dari persamaan diferensial (4.1) jika  $(x - x_0)p(x)$  dan  $(x - x_0)^2 q(x)$  analitik pada  $x_0$ . Dan kita menyebutnya titik singular tak biasa (ireguler) dari persamaan jika bukan merupakan titik singular biasa.

Dengan definisi ini,  $x = 0$  adalah titik singular biasa dari persamaan

$$y'' + \frac{f(x)}{x}y' + \frac{g(x)}{x^2}y = 0,$$

jika  $f(x)$  dan  $g(x)$  analitik pada  $x = 0$ . Ketika kita mengatakan fungsi tersebut analitik, maka kita bisa mengekspansikan dalam deret Taylor yaitu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n,$$

termasuk kasus bahwa  $f(x)$  dan  $g(x)$  adalah polinomial dengan orde berhingga. Sebagai contoh, persamaan

$$xy'' + 2y' + xy = 0,$$

memiliki sebuah titik singular biasa pada  $x = 0$ , karena jika dituliskan dalam bentuk

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{x^2}{x^2}y = 0,$$

kita melihat bahwa 2 dan  $x^2$  sama-sama analitik pada  $x = 0$ .

Jika singularitasnya hanyalah titik singular biasa, kita dapat menggunakan deret Frobenius untuk menyelesaikan persamaan. Untungnya, hampir semua titik singular yang ditemui dalam fisika matematik adalah titik singular biasa.

Agar pembahasan kita lebih nyaman, kita mengasumsikan bahwa titik singular biasa  $x_0$  pada 0. Jika nilainya tidak nol, yang perlu kita lakukan adalah mengubah variabel  $\xi = x - x_0$ , dan menyelesaikan persamaan tersebut dalam variabel  $\xi$ . Kemudian kita mengembalikannya dalam  $x$ , yang berarti persamaan tersebut diekspansikan dalam  $(x - x_0)$ .

### 4.1.3 Metode Frobenius

Sebuah persamaan diferensial dengan titik singular biasa  $x = 0$  berbentuk

$$y'' + \frac{f(x)}{x}y' + \frac{g(x)}{x^2}y = 0$$

dapat diselesaikan dengan menyatakan  $y(x)$  sebagai deret berikut

$$y(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{4.4}$$

jika  $f(x)$  dan  $g(x)$  analitik pada  $x = 0$ .

Ide dari metode ini juga sederhana. Jika  $f(x)$  dan  $g(x)$  analitik pada  $x = 0$ , maka kita dapat menyatakannya dalam deret Taylor

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots, \\ g(x) &= g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots. \end{aligned}$$

Di sekitar  $x = 0$ , persamaan diferensial dapat dituliskan

$$y'' + \frac{1}{x}f_0y' + \frac{1}{x^2}g_0y = 0,$$

atau

$$x^2y'' + f_0xy' + g_0y = 0. \quad (4.5)$$

Persamaan ini adalah persamaan Euler-Cauchy yang memiliki solusi dalam bentuk

$$y(x) = x^p.$$

Jika fungsi ini kita letakkan pada (4.5), kita memiliki bentuk

$$p(p-1)x^p + f_0px^p + g_0x^p = 0,$$

kita dapat selalu mencari bentuk  $p$  dalam persamaan kuadrat

$$p(p-1) + f_0p + g_0 = 0,$$

sehingga  $x^p$  merupakan solusi dari (4.5).

Sehingga secara alami, kita menggunakan (4.4) sebagai solusi uji. Terdapat sebuah teorema matematik yang dikenal sebagai teorema Fuchs yang mengatakan jika  $x = 0$  merupakan sebuah titik singular biasa, maka paling tidak terdapat sebuah solusi yang bisa dicari dengan cara ini. Hal yang akan kita pelajari dan lakukan sebagai fisika-wan adalah menggunakan metode ini bukan membuktikan teorema yang merupakan pekerjaan matematikawan.

Setelah (4.4) kita substitusikan pada persamaan diferensial, kita menentukan koefisien  $a_n$  sehingga persamaan tersebut terpenuhi secara identik. Jika deret dengan koefisien yang telah kita cari adalah konvergen, maka kita telah menemukan solusinya. Dalam menggunakan (4.4) kita dapat mengasumsikan  $a_0 \neq 0$ , karena jika  $a_0$  nilainya nol, maka kita dapat menaikkan nilai  $p$  sebesar 1 dan menamai ulang  $a_1$  sebagai  $a_0$ . Contoh berikut mengilustrasikan bagaimana prosedur ini bekerja.

**Contoh 4.1.2.** Selesaikan persamaan diferensial

$$xy'' + 2y' + xy = 0,$$

dengan mengekspansikan  $y(x)$  dalam deret Frobenius!

**Solusi 4.1.2.** Dengan

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p}, \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p) x^{n+p-1}, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+p)(n+p-1) x^{n+p-2}, \end{aligned}$$



sehingga persamaan diferensialnya menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+p)(n+p-1)x^{n+p-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+p)x^{n+p-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p+1} = 0,$$

atau

$$x^p \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+p)(n+p-1) + 2(n+p)] x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \right\} = 0.$$

Karena

$$(n+p)(n+p-1) + 2(n+p) = (n+p)(n+p+1),$$

dan  $x^p$  tidak dapat bernilai nol secara identik, maka:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+p)(n+p+1)] x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Untuk mengumpulkan suku-sukunya, kita memisahkan suku  $n = 0$  dan  $n = 1$  pada penjumlahan pertama, sehingga

$$a_0 p(p+1)x^{-1} + a_1(p+1)(p+2) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n [(n+p)(n+p+1)] x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Selanjutnya

$$\sum_{n=2}^{\infty} [a_n(n+p)(n+p+1)] x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+p+2)(n+p+3)] x^{n+1},$$

sehingga

$$a_0 p(p+1)x^{-1} + a_1(p+1)(p+2) + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+p+2)(n+p+3) + a_n] x^{n+1} = 0.$$

Agar suku ini hilang, semua koefisien haruslah bernilai nol, yaitu

$$a_0 p(p+1) = 0, \tag{4.6}$$

$$a_1(p+1)(p+2) = 0, \tag{4.7}$$

$$a_{n+2}(n+p+2)(n+p+3) + a_n = 0. \tag{4.8}$$

Karena  $a_0 \neq 0$ , maka dari (4.6) kita mempunyai

$$p(p+1) = 0.$$

Persamaan ini dikenal sebagai persamaan indicial<sup>1</sup>, yang memiliki solusi:

$$p = 0, \quad p = -1.$$

---

<sup>1</sup>Persamaan ini adalah persamaan rekursi, termasuk juga persamaan karakteristik, yang didapatkan ketika menggunakan metode Frobenius dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde dua.

Terdapat tiga buah kemungkinan agar (4.7) terpenuhi:

$$\text{Kasus 1 : } p = -1; a_1 \neq 0$$

$$\text{Kasus 2 : } p = -1; a_1 = 0$$

$$\text{Kasus 2 : } p = 0; a_1 = 0.$$

Selanjutnya dari sini, kita menyelesaikan persamaan di dalam tiga kasus yang berbeda. Pertama untuk  $p = -1$  pada kasus 1, dari (4.8), kita memperoleh

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Hubungan ini dikenal sebagai hubungan rekursi, dan dari hubungan ini kita memiliki

$$\begin{aligned} n = 0 : a_2 &= \frac{-1}{2 \cdot 1} a_0 \\ n = 2 : a_4 &= \frac{-1}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{-1}{4 \cdot 3} \left( \frac{-1}{2 \cdot 1} a_0 \right) = \frac{(-1)^2}{4!} a_0 \\ n = 4 : a_6 &= \frac{-1}{6 \cdot 5} a_4 = \frac{-1}{6 \cdot 5} \left( \frac{(-1)^2}{4!} a_0 \right) = \frac{(-1)^3}{6!} a_0 \\ &\dots \\ n = 1 : a_3 &= \frac{-1}{3 \cdot 2} a_1 \\ n = 3 : a_5 &= \frac{-1}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{-1}{5 \cdot 4} \left( \frac{-1}{3 \cdot 2} a_1 \right) = \frac{(-1)^2}{5!} a_1 \\ n = 5 : a_7 &= \frac{-1}{7 \cdot 6} a_5 = \frac{-1}{7 \cdot 6} \left( \frac{(-1)^2}{5!} a_1 \right) = \frac{(-1)^3}{7!} a_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Sehingga solusi persamaan diferensialnya bisa dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{-1} a_0 \left( 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots \right) \\ &\quad + x^{-1} a_1 \left( x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \right), \end{aligned}$$

yang dapat dikenali sebagai

$$y(x) = a_0 \frac{1}{x} \cos x + a_1 \frac{1}{x} \sin x.$$

Di sini kita telah menemukan dua buah solusi linier yang saling bebas dari persamaan diferensial orde dua.

Dalam kasus 2,  $p = -1$  dan  $a = 0$ . Dengan menggunakan hubungan rekursi,  $a_n$  ganjil nilainya nol, yaitu

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0.$$

Sehingga solusinya

$$y(x) = a_0 \frac{1}{x} \cos x,$$

yang merupakan salah satu solusi.

Kasus 3,  $p = 0$  dan  $a_1 = 0$ . Dalam kasus ini semua koefisien ganjil bernilai nol, dan untuk koefisien genap, hubungan rekursinya adalah:

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+3)(n+2)} a_n.$$

Jadi solusinya bisa dituliskan

$$\begin{aligned} y(x) &= x^0 a_0 \left( 1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 - \frac{1}{7!} x^6 + \dots \right) \\ &= a_0 \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \right) \\ &= a_0 \frac{1}{x} \sin x, \end{aligned}$$

yang merupakan solusi lain. Secara umum  $a_0$  pada kasus 2 tidaklah sama dengan  $a_0$  pada kasus 3. Sehingga solusinya merupakan kombinasi linier dari kasus 2 dan 3

$$y(x) = c_1 \frac{1}{x} \cos x + c_2 \frac{1}{x} \sin x$$

Deret Frobenius merupakan deret pangkat yang umum

$$y = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Jika  $p$  nilainya positif, maka deret tersebut menjadi deret Taylor, sedangkan jika bernilai negatif maka akan menjadi deret Laurent. Semua persamaan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan deret Taylor atau Laurent, juga dapat diselesaikan dengan deret Frobenius. Deret Frobenius tentu lebih umum, karena  $p$  dapat juga berupa pecahan bahkan bilangan kompleks. Maka jika kita mencoba menyelesaikan persamaan diferensial dengan metode deret, daripada kita berpusing-pusing menentukan apakah titik pusat ekspansinya merupakan sebuah titik biasa atau titik singular biasa, kita bisa langsung menggunakan metode Frobenius. Namun sebelum akhirnya kita menentukan deret yang kita peroleh merupakan solusi atau bukan, kita harus memeriksa apakah deret tersebut konvergen atau divergen.

## 4.2 Fungsi Bessel

Fungsi Bessel merupakan salah satu fungsi yang sangat penting dalam fisika matematik. Fungsi ini biasanya muncul dalam simetri silinder. Fungsi Bessel merupakan

solusi dari persamaan diferensial yang berbentuk

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0, \quad (4.9)$$

dengan  $n$  adalah sebuah nilai yang diberikan. Persamaan diferensial homogen ini dinamakan sebagai persamaan Bessel ditemukan oleh Wilhem Bessel (1752-1833), seorang matematikawan sekaligus astronom berkebangsaan Jerman.

#### 4.2.1 Fungsi Bessel $J_n(x)$ untuk Orde Bilangan Bulat

Meskipun  $n$  bisa berupa sembarang bilangan, kita membatasi diri kita terlebih dahulu pada kasus ketika  $n$  merupakan bilangan bulat ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Kita mencari solusi persamaan Bessel dalam deret Frobenius

$$y(x) = x^p \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{j+p}, \quad (4.10)$$

dengan  $p$  konstanta sebarang dan

$$a_0 \neq 0.$$

Untuk sekarang, anggap bahwa fungsi tersebut dapat diturunkan sehingga:

$$y' = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+p) x^{j+p-1}$$

$$y'' = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (j+p)(j+p-1) x^{j+p-2}$$

Substitusikan pada (4.9) diperoleh:

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(j+p)(j+p-1) + (j+p) + (x^2 - n^2)] a_j x^{j+p} = 0,$$

atau

$$x^p \left[ \sum_{j=0}^{\infty} [(j+p)^2 - n^2] a_j x^j + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+2} \right] = 0. \quad (4.11)$$

Setelah kita memisahkan  $j = 0$  dan  $j = 1$  secara eksplisit, penjumlahan pertama menjadi:

$$\sum_{j=0}^{\infty} [(j+p)^2 - n^2] a_j x^j = [p^2 - n^2] a_0 + [(p+1)^2 - n^2] a_1 x$$

$$+ \left[ \sum_{j=2}^{\infty} [(j+p)^2 - n^2] a_j x^j \right],$$

dan penjumlahan kedua dapat dituliskan

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i+2} = \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2} x^j.$$

Agar bernilai nol, maka kuantitas yang ada dalam kurung pada (4.11) haruslah bernilai nol juga, yaitu:

$$[p^2 - n^2] a_0 + [(p+1)^2 - n^2] a_1 x + \left[ \sum_{j=2}^{\infty} [(j+p)^2 - n^2] a_j + a_{j-2} \right] x^j = 0.$$

Agar persamaan ini terpenuhi, maka koefisien tiap pangkat  $x$  haruslah hilang, yaitu:

$$[p^2 - n^2] a_0 = 0, \quad (4.12)$$

$$[(p+1)^2 - n^2] a_1 = 0, \quad (4.13)$$

$$[(j+p)^2 - n^2] a_j + a_{j-2} = 0. \quad (4.14)$$

Karena  $a_0 \neq 0$ , maka dari (4.12)

$$p = \pm n,$$

pertama kita pilih  $+n$ , sehingga (4.13)

$$a_1 = 0.$$

Sehingga dari (4.14) kita memiliki hubungan rekursi

$$a_j = \frac{-a_{j-2}}{(j+n)^2 - n^2} = \frac{-1}{j(j+2n)} a_{j-2}. \quad (4.15)$$

Karena  $a_1 = 0$ , maka dari hubungan rekursi ini juga diperoleh  $a_3 = a_5 = \dots = 0$ , atau

$$a_{2j-1} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

Karena hanya koefisien genap yang tak bernilai nol, kita bisa menuliskan

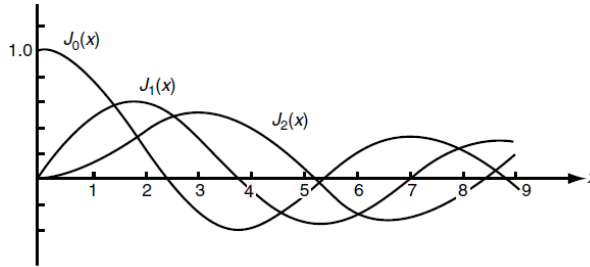
$$j = 2k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

sehingga (4.15) menjadi:

$$a_{2k} = \frac{-1}{2^2 k(k+n)} a_{2(k-1)}. \quad (4.16)$$

Hubungan ini berlaku untuk semua nilai  $k$ , secara spesifik kita memiliki

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2^2 \cdot 1 \cdot (n+1)} a_0, \\ a_4 &= -\frac{1}{2^2 \cdot 2 \cdot (n+2)} a_2 = \frac{(-1)^2}{2^4 \cdot 2! \cdot (n+2)(n+1)} a_0, \\ a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(n+k)(n+k-1) \dots (n+1)} a_0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Gambar 4.1: Fungsi Bessel  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  dan  $J_2(x)$ 

Sehingga  $a_0$  merupakan faktor yang akan ditemui dalam semua deret pangkat. Nilainya merupakan perkalian sebuah konstanta yang bisa kita atur sedemikian rupa. Bagaimanapun, sesuai perjanjian, kita pilih  $a_0$  sebagai

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!}, \quad (4.18)$$

deret yang dihasilkan untuk  $y(x)$  adalah  $J_n(x)$  yang dikenal sebagai fungsi Bessel jenis pertama orde  $n$ . Dengan pemilihan ini (4.17) menjadi

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \frac{1}{2^{n+2k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.19)$$

dan

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{n+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \\ &= \frac{x^n}{2^n n!} \left(1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(n+1)(n+2)} - \dots\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dengan menggunakan uji rasio, deret ini konvergen untuk semua nilai  $x$ . Sehingga  $J_n(x)$  terikat di semua titik dari  $x = 0$  sampai  $x \rightarrow \infty$ .

Fungsi Bessel dapat dilihat pada Gambar 4.1. Fungsi ini merupakan deret berubah tanda. Fungsi Bessel juga merupakan fungsi yang berosilasi namun tidak periodik. Amplitudonya tidak konstan melainkan berkurang secara asimptotik.

## 4.2.2 Nilai Nol Fungsi Bessel

Seperti terlihat pada Gambar 4.1, untuk tiap  $n$  terdapat sejumlah nilai  $x$  sehingga  $J_n(x) = 0$ . Nilai  $x$  ini adalah nilai pembuat nol dari fungsi Bessel. Nilai-nilai ini sangatlah berguna dalam aplikasi praktis yang akan kita temui ketika membahas persamaan diferensial parsial. Beberapa nilai bisa dilihat pada Tabel 4.1. Sebagai contoh bagaimana penggunaan tabel ini, marilah kita menjawab pertanyaan berikut. Jika

Tabel 4.1: Nilai Nol Fungsi Bessel

Jmlh Nol	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

$\lambda_{nj}$  adalah akar ke- $j$  dari  $J_n(\lambda c) = 0$ , dengan  $c = 2$ , carilah  $\lambda_{01}$ ,  $\lambda_{23}$  dan  $\lambda_{53}$ ! Maka jawabannya haruslah:

$$\begin{aligned}\lambda_{01} &= \frac{2.4048}{2} = 1.2024, \\ \lambda_{23} &= \frac{11.6198}{2} = 5.8099, \\ \lambda_{53} &= \frac{15.7002}{2} = 7.8501.\end{aligned}$$

### 4.2.3 Fungsi Gamma

Untuk fungsi Bessel dengan orde bilangan pecahan, kita perlu menggunakan perluasan fungsi faktorial. Hal ini bisa dilakukan dengan fungsi gamma.

Fungsi gamma didefinisikan dengan integral tentu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (4.21)$$

Dengan integral parsial kita peroleh

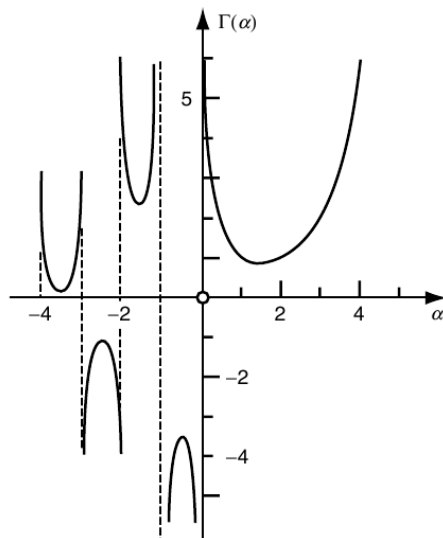
$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha} dt = -e^{-t} t^{\alpha} \Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Rumus pertama pada ruas kanan nilainya nol, dan integral pada ruas kanan adalah  $\alpha\Gamma(\alpha)$ . Ini memberikan hubungan mendasar

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Karena

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

Gambar 4.2: Fungsi gamma  $\Gamma(\alpha)$ .

kita menyimpulkan untuk bilangan bulat  $n$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)\cdots 1\Gamma(1) = n! \end{aligned} \quad (4.22)$$

Untuk bilangan tak bulat (pecahan)  $\alpha$ , integral (4.21) dapat dihitung. Fungsi gamma  $\Gamma(\alpha)$  untuk  $\alpha$  positif dan negatif ditunjukkan Gambar 4.2. Mengikuti (4.22) bahwa

$$0! = \Gamma(1) = 1. \quad (4.23)$$

Karena  $n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$ , sehingga  $\Gamma(n) = \Gamma(n+1)/n$ . Diperoleh

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= \frac{\Gamma(1)}{0} \rightarrow \infty, \\ \Gamma(-1) &= \frac{\Gamma(0)}{-1} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

dan untuk bilangan negatif sebarang

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(-n+1)}{-n} \rightarrow \infty.$$

Kasus khusus  $\Gamma(1/2)$  menjadi perhatian tersendiri

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt. \quad (4.24)$$

Misalkan  $t = x^2$  sehingga  $dt = 2x dx$  dan  $t^{-1/2} = x^{-1}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \frac{1}{x} 2x dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$



Untuk integral tertentu, nama variabel yang diintegrasikan tidak penting dalam arti kita bisa menuliskan

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy,$$

maka

$$\begin{aligned} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Integral ganda ini dapat dianggap sebagai integral terhadap kuadran pertama sebuah bidang. Jika kita rubah dalam koordinat polar

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \\ da &= \rho d\theta d\rho, \end{aligned}$$

kita mempunyai

$$\begin{aligned} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-\rho^2} \rho d\theta d\rho \\ &= 4 \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi \left[ e^{-\rho^2} \right]_0^{\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Jadi

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (4.25)$$

#### 4.2.4 Fungsi Bessel Orde Pecahan

Ketika kita membentuk fungsi Bessel, kita memilih  $a_0 = 1/(2^n n!)$  yang dapat dituliskan dalam fungsi varGamma sebagai:

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}.$$

Hal ini membuat kita bisa memilih untuk nilai pecahan  $\alpha$

$$a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}.$$

Dengan prosedur yang sama dengan fungsi Bessel untuk orde bilangan bulat, kita bisa memperoleh fungsi Bessel untuk orde pecahan (termasuk bilangan bulat), yaitu:

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2k}. \quad (4.26)$$

**Contoh 4.2.1.** Tunjukkan bahwa

$$J_{(1/2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-(1/2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

**Solusi 4.2.1.** Dengan definisi

$$\begin{aligned} J_{(1/2)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{1}{2} + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{(1/2)+2k} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{1}{2} + 1)} \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(k + \frac{1}{2} + 1) &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{2} - 1\right) \left(k + \frac{1}{2} - 2\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2k+1)(2k-1)(2k-3) \cdots 1}{2^{k+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} k! \Gamma(k + \frac{1}{2} + 1) 2^{2k+1} &= k! [(2k+1)(2k-1) \cdots 1] \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^k \\ &= [2k(2k-2) \cdots 2] [(2k+1)(2k-1) \cdots 1] \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= (2k+1)! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= (2k+1)! \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$J_{(1/2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Tetapi

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

maka

$$J_{(1/2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \quad (4.27)$$

Dengan cara yang sama (pembaca sangat diharapkan untuk mengerjakan detilnya)

$$\begin{aligned} J_{-(1/2)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \frac{1}{2} + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-(1/2)+2k} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)! \Gamma(\frac{1}{2})} x^{2k} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{aligned} \quad (4.28)$$

### 4.2.5 Fungsi Bessel Orde Bilangan Negatif

Jika  $\alpha$  bukan merupakan bilangan bulat (pecahan), maka fungsi Bessel  $J_{-\alpha}(x)$  sederhana. Hal yang perlu kita lakukan hanyalah mengganti  $\alpha$  dengan  $-\alpha$  pada definisi  $J_{\alpha}(x)$ , yaitu

$$J_{-\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha+2k}. \quad (4.29)$$

Karena suku pertama  $J_{\alpha}(x)$  dan  $J_{-\alpha}(x)$  secara berurutan merupakan perkalian dengan  $x^{\alpha}$  dan  $x^{-\alpha}$ , maka  $J_{\alpha}(x)$  dan  $J_{-\alpha}(x)$  bebas linier. Sehingga secara umum, solusi dari persamaan Bessel berorde  $\alpha$  adalah kombinasi linier antara keduanya

$$y(x) = c_1 J_{\alpha}(x) + c_2 J_{-\alpha}(x).$$

Tetapi jika  $\alpha$  adalah bilangan bulat negatif,  $J_{-n}(x)$  dan  $J_n(x)$  tidaklah bebas linier melainkan saling bergantung. Untuk membuktikannya, kita mulai dari definisi

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}.$$

Jika  $k < n$ , maka  $\Gamma(k - n + 1) \rightarrow \infty$  dan semua sukunya akan bernilai nol. Sehingga deret dimulai dari  $k = n$ , yaitu

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}.$$

Sekarang kita definisikan  $j = k - n$  sehingga  $k = n + j$ , maka

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+j}}{(n+j)! \Gamma(j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2(j+n)} \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(n+j+1) j!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

### 4.2.6 Fungsi Neumann dan Fungsi Hankel

Untuk menentukan solusi bebas linier kedua dari fungsi Bessel ketika  $\alpha = n$  dan  $n$  adalah bilangan bulat, biasanya kita membentuk kombinasi linier dari  $J_{\alpha}(x)$  dan  $J_{-\alpha}(x)$  kemudian menggantikan  $\alpha \rightarrow n$ . Kombinasi

$$N_{\alpha}(x) = \frac{\cos(\alpha\pi) J_{\alpha}(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad (4.30)$$

disebut sebagai fungsi Bessel jenis kedua berorde  $\alpha$ . Fungsi ini juga dikenal sebagai fungsi Neumann. Dalam literatur lain dinotasikan sebagai  $Y_\alpha(x)$ .

Untuk bilangan pecahan  $\alpha$ ,  $N_\alpha(x)$  jelas merupakan solusi dari persamaan Bessel, karena fungsi ini dibentuk dari kombinasi linier dari dua buah solusi yang juga bebas linier  $J_\alpha(x)$  dan  $J_{-\alpha}(x)$ .

Untuk bilangan bulat  $\alpha = n$  dan  $n = 1, 2, 3, \dots$ , (4.30) menjadi

$$N_n(x) = \frac{\cos(n\pi)J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)},$$

yang memberikan bentuk tak tentu karena  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ,  $\sin(n\pi) = 0$  dan  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ . Kita bisa menggunakan hukum l'Hôpital untuk menghitung rasio ini. Jika kita mendefinisikan fungsi Neumann  $N_n(x)$  sebagai

$$N_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{\cos(\alpha\pi)J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Maka

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} (\cos(\alpha\pi)J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x))}{\frac{\partial}{\partial \alpha} \sin(\alpha\pi)} \right]_{\alpha=n} \\ &= \left[ \frac{-\pi \sin(\alpha\pi)J_\alpha(x) + \cos(\alpha\pi) \frac{\partial}{\partial \alpha} J_\alpha(x) - \frac{\partial}{\partial \alpha} J_{-\alpha}(x)}{\pi \cos(\alpha\pi)} \right]_{\alpha=n} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} J_\alpha(x) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \alpha} J_{-\alpha}(x) \right]_{\alpha=n} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa  $N_n(x)$  terdefinisi sedemikian rupa sehingga juga merupakan solusi dari persamaan Bessel. Dengan definisi  $J_\alpha(x)$  dan  $J_{-\alpha}(x)$ , memenuhi persamaan diferensial berikut:

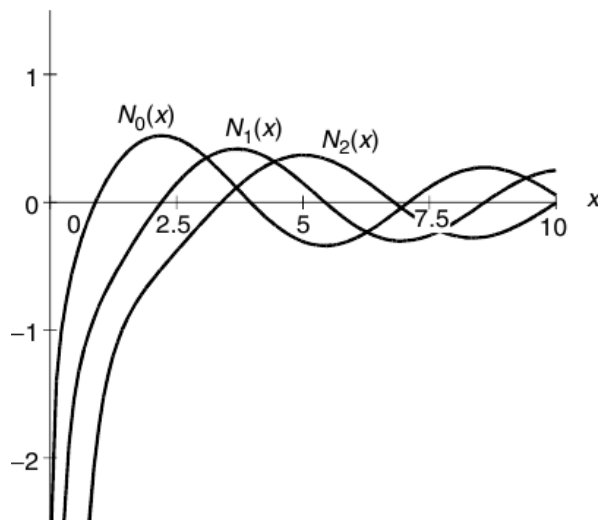
$$\begin{aligned} x^2 J_\alpha''(x) + x J_\alpha'(x) + (x^2 - \alpha^2) J_\alpha(x) &= 0, \\ x^2 J_{-\alpha}''(x) + x J_{-\alpha}'(x) + (x^2 - \alpha^2) J_{-\alpha}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Turunkan terhadap  $\alpha$

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha} \right) + x \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha} \right) + (x^2 - \alpha^2) \left( \frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha} \right) - 2\alpha J_\alpha &= 0, \\ x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha} \right) + x \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha} \right) + (x^2 - \alpha^2) \left( \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha} \right) - 2\alpha J_{-\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Kalikan persamaan kedua dengan  $(-1)^n$  dan kurangkan dengan persamaan pertama, kita mempunyai

$$\begin{aligned} x^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha} \right) + x \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha} \right) \\ + (x^2 - \alpha^2) \left( \frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial \alpha} \right) - 2\alpha (J_\alpha - (-1)^n J_{-\alpha}) &= 0. \end{aligned}$$

Gambar 4.3: Fungsi Neumann  $N_0(x)$ ,  $N_1(x)$  dan  $N_2(x)$ 

Dengan mengambil limit  $\alpha \rightarrow n$ , suku terakhir hilang karena

$$J_n - (-1)^n J_{-n} = 0.$$

Sehingga jelaslah bahwa fungsi Neumann yang dinyatakan pada (4.31) memenuhi fungsi Bessel.

Fungsi Neumann memiliki suku logaritmik, karena

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right] \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + x^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \end{aligned}$$

dan

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{\alpha \ln x} = e^{\alpha \ln x} \ln x = x^\alpha \ln x.$$

Maka  $N_n(x)$  mengandung suku  $J_n(x) \ln x$ . Sehingga jelas bahwa ini bebas linier terhadap  $J_n(x)$ .

Fungsi Neumann divergen untuk  $x \rightarrow 0$ . Untuk  $\alpha \neq 0$ , fungsi ini divergen karena deret untuk  $J_{-\alpha}(x)$  dimulai dengan suku  $x^{-\alpha}$ . Untuk  $\alpha = 0$ , suku  $J_0(x) \ln x$  nilainya  $-\infty$  ketika  $x$  mendekati nol.

Sama seperti fungsi Bessel, nilai fungsi Neumann dan nilai nolnya sudah ditabulasikan. Tiga orde pertama fungsi Neumann bisa dilihat pada Gambar 4.3.

Karena  $J_\alpha(x)$  dan  $N_\alpha(x)$  merupakan pasangan yang saling bebas linier, maka solusi persamaan Bessel secara umum dapat dituliskan

$$y(x) = c_1 J_\alpha(x) + c_2 N_\alpha(x),$$

yang valid untuk semua nilai  $\alpha$ .

Dalam aplikasi fisika, kita biasanya menginginkan solusi yang berhingga pada titik awal. Karena  $N_\alpha(x)$  nilainya tak hingga pada  $x = 0$ , kita harus memilih  $c_2 = 0$  dan solusinya hanyalah sebuah konstanta dikalikan dengan  $J_\alpha(x)$ . Tetapi ada beberapa kasus yang tidak menyertakan titik asal, sehingga solusinya tetaplah merupakan kombinasi linier dari  $J_\alpha(x)$  dan  $N_\alpha(x)$ .

**Fungsi Hankel.** Kombinasi linier berikut sangatlah berguna untuk mempelajari perambatan gelombang, terutama untuk daerah asimptotik ketika memiliki perilaku eksponensial kompleks murni. Fungsi tersebut dinamakan fungsi Hankel jenis pertama

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x),$$

dan fungsi Hankel jenis kedua

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x).$$

Fungsi Hankel ini juga dikenal sebagai fungsi Bessel jenis ketiga.

## 4.3 Sifat-sifat Fungsi Bessel

### 4.3.1 Hubungan Rekursi

Mulai dengan representasi dalam bentuk deret, kita dapat mendeduksi sifat rekursi fungsi Bessel sebagai berikut

1.

$$\frac{d}{dx} [x^{n+1} J_{n+1}(x)] = x^{n+1} J_n(x). \quad (4.32)$$

**Bukti:**

$$\begin{aligned}
 x^{n+1} J_{n+1}(x) &= x^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+2)} \frac{x^{2n+2k+2}}{2^{n+2k+1}} \\
 \frac{d}{dx} [x^{n+1} J_{n+1}(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(n+k+1)}{k! \Gamma(k+n+2)} \frac{x^{2n+2k+1}}{2^{n+2k+1}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2n+2k+1}}{2^{n+2k}} \\
 &= x^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}} \\
 &= x^{n+1} J_n(x).
 \end{aligned}$$

2.

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (4.33)$$

**Bukti:**

$$\begin{aligned}
 x^{-n} J_n(x) &= x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2k}}{2^{n+2k}} \\
 \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k! \Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2k-1}}{2^{n+2k}}.
 \end{aligned}$$

Karena suku pertama dengan  $k = 0$  bernilai nol. Maka penjumlahan dimulai dari  $k = 1$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k! \Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2k-1}}{2^{n+2k}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)! \Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2k-1}}{2^{n+2k-1}}.
 \end{aligned}$$

Sekarang pilih variabel baru  $j = k - 1$ , sehingga  $k = j + 1$ , maka

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j! \Gamma(j+n+2)} \frac{x^{2j+1}}{2^{n+2j+1}} \\
 &= -x^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+n+2)} \frac{x^{n+2j+1}}{2^{n+2j+1}} \\
 &= -x^{-n} J_{n+1}(x).
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat-sifat ini, kita dapat memperoleh hubungan sebagai berikut

3.

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x), \quad (4.34)$$

4.

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)], \quad (4.35)$$

5.

$$J'_0(x) = -J_1(x). \quad (4.36)$$

Untuk membuktikan tiga hubungan di atas, kita mulai dengan

$$\frac{d}{dx} [x^{n+1} J_{n+1}(x)] = (n+1)x^n J_{n+1}(x) + x^{n+1} J'_{n+1}(x),$$

mengikuti (4.32) yaitu

$$(n+1)x^n J_{n+1}(x) + x^{n+1} J'_{n+1}(x) = x^{n+1} J_n(x),$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$J'_{n+1}(x) = J_n(x) - \frac{n+1}{x} J_{n+1}(x),$$

atau

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x). \quad (4.37)$$

Dari (4.33) kita mempunyai

$$-nx^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J'_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x),$$

atau

$$J'_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x). \quad (4.38)$$

Dari (4.37) dan (4.38)

$$J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x),$$

atau

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x),$$

yang merupakan hubungan rekursi 3.

Dengan menjumlahkan (4.37) dan (4.38), kita memperoleh

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)],$$

yang merupakan hubungan rekursi 4.

Kasus khusus  $J'_0(x)$  mengikuti langsung sifat 2. Ambil  $n = 0$  pada (4.33), kita mempunyai

$$J'_0(x) = -J_1(x),$$



yang merupakan hubungan rekursi 5.

Hubungan rekursi ini sangatlah berguna. Dalam artian sepanjang kita mengetahui nilai  $J_0(x)$  dan  $J_1(x)$ , fungsi Bessel dengan orde yang lebih tinggi dan juga turunannya dapat kita cari dengan mudah. Hubungan menarik yang dapat diperoleh dari sifat 1 adalah

$$\int_0^r d [x^{n+1} J_{n+1}(x)] = \int_0^r x^{n+1} J_n(x) dx.$$

Sehingga

$$6. \quad \int_0^r x^{n+1} J_n(x) dx = r^{n+1} J_{n+1}(r), \quad (4.39)$$

kasus penting adalah ketika  $n = 0$

$$7. \quad \int_0^r x J_0(x) dx = r J_1(r). \quad (4.40)$$

### 4.3.2 Fungsi Pembangkit untuk Fungsi Bessel

Meskipun fungsi Bessel yang kita pelajari utamanya berkaitan dengan solusi persamaan diferensial, akan menjadi sebuah pelajaran yang berharga untuk membanggunya dengan pendekatan yang sama sekali berbeda yang dinamakan fungsi pembangkit.

Ingat kembali

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

sehingga

$$\exp\left(\frac{xt}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{xt}{2}\right)^n, \quad \exp\left(-\frac{x}{2t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x}{2t}\right)^n.$$

Mengikuti hal ini

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{xt}{2} - \frac{x}{2t}\right) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{xt}{2}\right)^l \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{x}{2t}\right)^m \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{l!m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{l+m} t^{l-m}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Jika  $l - m = n$  maka  $l = m + n$  dann  $l + m = 2m + n$ , sehingga (4.41) dapat dituliskan

$$\exp\left(\frac{xt}{2} - \frac{x}{2t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+n)!} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \right) t^n.$$

Fungsi Bessel  $J_n(x)$  diberikan oleh

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+n)!} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n},$$

jelas bahwa

$$\exp\left(\frac{xt}{2} - \frac{x}{2t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n. \quad (4.42)$$

Ruas kiri dari persamaan ini dikenal sebagai fungsi pembangkit untuk fungsi Bessel. Kadang dituliskan sebagai  $G(x, t)$

$$G(x, t) = \exp\left(\frac{xt}{2} - \frac{x}{2t}\right).$$

### 4.3.3 Representasi Integral

Sebuah cara yang berguna untuk memperlakukan fungsi Bessel yaitu dengan representasi integral. Jika kita menggantikan

$$t = e^{i\theta},$$

sehingga

$$t - \frac{1}{t} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta.$$

Sehingga (4.42) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} e^{(ix \sin \theta)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\theta} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [J_n(x)e^{in\theta} + J_{-n}(x)e^{-in\theta}] \\ &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)(\cos n\theta + i \sin n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(x)(\cos n\theta - i \sin n\theta) \\ &= J_0(x) + 2[J_2(x) \cos 2\theta + J_4(x) \cos 4\theta + J_6(x) \cos 6\theta + \dots] \\ &\quad + 2i[J_1(x) \sin \theta + J_3(x) \sin 3\theta + J_5(x) \sin 5\theta + \dots]. \end{aligned}$$

Tetapi

$$e^{(ix \sin \theta)} = \cos(x \sin \theta) + i \sin(x \sin \theta),$$

sehingga

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2[J_2(x) \cos 2\theta + J_4(x) \cos 4\theta + J_6(x) \cos 6\theta + \dots], \quad (4.43)$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2[J_1(x) \sin \theta + J_3(x) \sin 3\theta + J_5(x) \sin 5\theta + \dots]. \quad (4.44)$$

Representasi ini merupakan representasi jenis Fourier. Koefisien  $J_n(x)$  dapat dengan mudah diperoleh. Sebagai contoh kalikan (4.43) dengan  $\cos(n\theta)$  dan integralkan dari 0 sampai dengan  $\pi$  kita memperoleh

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta) \cos(n\theta) d\theta = \begin{cases} J_n(x), & n \text{ genap} \\ 0, & n \text{ ganjil} \end{cases}.$$

Dengan cara yang sama, dari (4.44)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) \sin(n\theta) \, d\theta = \begin{cases} 0, & n \text{ genap} \\ J_n(x), & n \text{ ganjil} \end{cases}.$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan ini didapatkan

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(x \sin \theta) \cos(n\theta) + \sin(x \sin \theta) \sin(n\theta)] \, d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta - n\theta) \, d\theta. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Kasus khusus

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) \, d\theta. \quad (4.46)$$

Kita tahu bahwa cosinus adalah fungsi genap, sedangkan sinus adalah fungsi ganjil

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \theta) \, d\theta, \\ \int_0^{2\pi} \sin(x \sin \theta) \, d\theta &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga (4.46) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x \sin \theta) \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\cos(x \sin \theta) + i \sin(x \sin \theta)] \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix \sin \theta) \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix \cos \theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

Bentuk ini sangat berguna pada difraksi Fraunhofer dengan celah lingkaran.

## 4.4 Fungsi Bessel dan Persamaan Sturm-Liouville

### 4.4.1 Syarat Batas Persamaan Bessel

Seperti yang telah dibicarakan dalam bab sebelumnya. Fungsi Bessel sendiri bukanlah merupakan persamaan Sturm-Liouville. Tidak terdapat sebuah cara agar persamaan ini memenuhi kondisi syarat batas. Namun, perhatikan persamaan berikut:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0 \quad (4.47)$$

merupakan persamaan Sturm-Liouville. Dengan mudah ditunjukkan bahwa

$$y(x) = J_n(\lambda x)$$

merupakan solusi dari persamaan ini. Ambil  $z = \lambda x$ , maka

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dJ_n(z)}{dz} \frac{dz}{dx} = \lambda \frac{dJ_n(z)}{dz}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left[ \lambda \frac{dJ_n(z)}{dz} \right] = \frac{d}{dz} \left[ \lambda \frac{dJ_n(z)}{dz} \right] \frac{dz}{dx} = \lambda^2 \frac{d^2J_n(z)}{dz^2}.\end{aligned}$$

Dengan substitusi pada (4.47), kita memiliki

$$\begin{aligned}x^2 \lambda^2 \frac{d^2J_n(z)}{dz^2} + x \lambda \frac{dJ_n(z)}{dz} + (\lambda^2 x^2 - n^2) J_n(z) &= \\ z^2 \frac{d^2J_n(z)}{dz^2} + z \frac{dJ_n(z)}{dz} + (z^2 - n^2) J_n(z) &= 0.\end{aligned}$$

Baris kedua tidak lain adalah persamaan Bessel biasa, sehingga kita telah mendapatkan bahwa  $J_n(z)$  merupakan solusi (4.47).

Jika kita menuliskan (4.47) sebagai

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) y + \left( \lambda^2 x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0 \quad (4.48)$$

bersama dengan syarat batas  $x = c$  yang merupakan persamaan Sturm-Liouville pada selang  $0 \leq x \leq c$ . Syarat batas umumnya memiliki bentuk

$$Ay(c) + By'(c) = 0,$$

dengan  $A$  dan  $B$  konstanta. Jika  $B = 0$  maka dikenal sebagai kondisi Dirichlet. Sedangkan jika  $A = 0$ , dikenal sebagai kondisi Neumann.

Selain itu persamaan ini mensyaratkan bahwa solusinya terikat pada  $x = 0$ . Hal ini menghalangi fungsi Neumann sebagai solusi.

Hal ini juga berarti bahwa nilai  $\lambda$  yang memenuhi persamaan

$$AJ_n(\lambda c) + B \frac{dJ_n(\lambda c)}{dx} \Big|_{x=c} = 0 \quad (4.49)$$

dapat diterima. Karena fungsi Bessel memiliki karakter osilatorik, terdapat tak hingga  $\lambda$  yang memenuhi persamaan ini. Nilai  $\lambda$  ini merupakan nilai eigen dari persamaan. Sebagai contoh, jika  $B = 0$ ,  $n = 0$ ,  $c = 2$ , maka

$$J_0(2\lambda) = 0.$$

Akar ke- $j$  dari persamaan ini, dilabeli dengan  $\lambda_{0j}$ , dapat dilihat dari Tabel 4.1 yaitu

$$\lambda_{01} = \frac{2.4048}{2} = 1.2024 \quad \lambda_{02} = \frac{5.5201}{2} = 2.7601, \quad \text{dsb.}$$

Nilai dari  $J'(x)$  juga ditabulasikan. Sehingga jika  $A = 0$ ,  $\lambda_{nj}$  juga bisa dilihat dari tabel. Secara umum, apabila  $A$  dan  $B$  nilainya tak nol, maka  $\lambda_{nj}$  haruslah dihitung secara numerik.

### 4.4.2 Ortogonalitas Fungsi Bessel

Satu set (himpunan) nilai eigen  $\{\lambda_{nj}\}$  memiliki fungsi eigen  $\{J_n(\lambda_{nj}x)\}$ . Fungsi eigen ini membentuk sebuah himpunan lengkap dan saling tegak lurus satu dengan yang lainnya terhadap fungsi bobot  $x$  yaitu

$$\int_0^c J_n(\lambda_{ni}x)J_n(\lambda_{nk}x) x dx = 0, \quad \text{jika } \lambda_{ni} \neq \lambda_{nk}.$$

Sehingga sebuah fungsi yang berperilaku baik  $f(x)$  pada selang  $0 \leq x \leq c$  dapat diekspansikan ke dalam deret Fourier-Bessel

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j J_n(\lambda_{nj}x),$$

dengan

$$a_j = \frac{1}{\int_0^c [J_n(\lambda_{nj}x)]^2 x dx} \int_0^c f(x)J_n(\lambda_{nj}x) x dx.$$

Pembahasan setelah ini, kita akan mengevaluasi integral normalisasi

$$\beta_{nj}^2 = \int_0^c [J_n(\lambda_{nj}x)]^2 x dx$$

dalam beberapa kondisi tertentu.

### 4.4.3 Normalisasi Fungsi Bessel

Salah satu cara untuk mencari nilai integral normalisasi  $\beta_{nj}^2$  yaitu dengan mensubstitusikan  $y = J_n(\lambda x)$  pada (4.48) dan mengalikannya dengan  $2x(d/dx)J_n(\lambda x)$ :

$$2x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) \left[ \frac{d}{dx} \left( x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) \right) + \left( \lambda^2 x - \frac{n^2}{x} \right) J_n(\lambda x) \right] = 0.$$

Persamaan ini dapat dituliskan sebagai

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) \right)^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2) J_n(\lambda x) 2 \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) = 0,$$

atau

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) \right)^2 + (\lambda^2 x^2 - n^2) \frac{d}{dx} (J_n(\lambda x))^2 = 0.$$

Selanjutnya

$$\lambda^2 x^2 \frac{d}{dx} (J_n(\lambda x))^2 = \frac{d}{dx} \left( \lambda^2 x^2 (J_n(\lambda x))^2 \right) - 2\lambda^2 x (J_n(\lambda x))^2,$$

maka

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) \right)^2 + \lambda^2 x^2 (J_n(\lambda x))^2 - n^2 (J_n(\lambda x))^2 \right] = 2\lambda^2 x (J_n(\lambda x))^2. \quad (4.50)$$

Dari (4.38) kita mempunyai

$$x \frac{d}{dx} J_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x),$$

gantikan  $x$  dengan  $\lambda x$ , kita memperoleh

$$x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) = nJ_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x). \quad (4.51)$$

Kuadratkan

$$\left( x \frac{d}{dx} J_n(\lambda x) \right)^2 = n^2 J_n^2(\lambda x) - 2n\lambda x J_n(\lambda x) J_{n+1}(\lambda x) + \lambda^2 x^2 J_{n+1}^2(\lambda x),$$

kemudian substitusikan pada (4.50)

$$\frac{d}{dx} [\lambda^2 x^2 J_{n+1}^2(\lambda x) + \lambda^2 x^2 J_n^2(\lambda x) - 2n\lambda x J_n(\lambda x) J_{n+1}(\lambda x)] = 2\lambda^2 x (J_n(\lambda x))^2.$$

Integralkan terhadap  $x$  diperoleh

$$[\lambda^2 x^2 J_{n+1}^2(\lambda x) + \lambda^2 x^2 J_n^2(\lambda x) - 2n\lambda x J_n(\lambda x) J_{n+1}(\lambda x)]_0^c = 2\lambda^2 \int_0^c x (J_n(\lambda x))^2 dx,$$

atau

$$\int_0^c x (J_n(\lambda x))^2 dx = \frac{c^2}{2} [J_{n+1}^2(\lambda c) + J_n^2(\lambda c)] - \frac{nc}{\lambda} J_n(\lambda c) J_{n+1}(\lambda c). \quad (4.52)$$

Sekarang jika syarat batas pada (4.49) sedemikian rupa sehingga  $B = 0$  maka

$$J_n(\lambda_{nj}c) = 0.$$

Dalam kasus ini, konstanta normalisasinya adalah

$$\beta_{nj}^2 = \int_0^c x (J_n(\lambda_{nj}x))^2 dx = \frac{1}{2} c^2 J_{n+1}^2(\lambda_{nj}c), \quad \text{untuk } B = 0. \quad (4.53)$$

Jika  $B \neq 0$ , maka (4.49) dapat dituliskan

$$\frac{A}{B} J_n(\lambda c) = \left. \frac{dJ_n(\lambda x)}{dx} \right|_{x=c}$$

yang menurut (4.51) diberikan oleh

$$\left. \frac{dJ_n(\lambda x)}{dx} \right|_{x=c} = \frac{n}{c} J_n(\lambda c) - \lambda J_{n+1}(\lambda c).$$

Sehingga

$$J_{n+1}(\lambda c) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{n}{c} - \frac{A}{B} \right) J_n(\lambda c). \quad (4.54)$$

Jika kita masukkan pada (4.52) kita mempunyai

$$\begin{aligned} \int_0^c x (J_n(\lambda x))^2 dx &= \frac{c^2}{2} J_n^2(\lambda c) \left[ 1 + \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{n}{c} - \frac{A}{B} \right)^2 \right] - \frac{nc}{\lambda^2} \left( \frac{n}{c} - \frac{A}{B} \right) J_n^2(\lambda c) \\ &= \frac{1}{2\lambda^2} J_n^2(\lambda c) \left[ (\lambda c)^2 - n^2 + \left( \frac{Ac}{B} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Sehingga dalam kasus  $\lambda = \lambda_j$  dengan  $\lambda_j$  akar dari (4.54)

$$\beta_{nj}^2 = \int_0^c x (J_n(\lambda_j x))^2 dx = \frac{1}{2\lambda_j^2} J_n^2(\lambda_j c) \left[ (\lambda_j c)^2 - n^2 + \left( \frac{Ac}{B} \right)^2 \right], \text{ untuk } B \neq 0. \quad (4.55)$$

## 4.5 Fungsi Bessel Jenis Lain

### 4.5.1 Fungsi Bessel Termodifikasi

Selain persamaan Bessel dengan orde  $n$ , kita juga sering menemui persamaan Bessel yang termodifikasi

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2) y = 0.$$

Satu-satunya perbedaan dengan persamaan Bessel biasa adalah tanda minus di depan suku  $x^2$  yang kedua. Jika kita mengubah  $x$  menjadi  $ix$  maka persamaan ini kembali menjadi persamaan Bessel. Sehingga  $J_n(ix)$  dan  $N_n(ix)$  juga merupakan solusi dari persamaan ini.

Sekarang kita definisikan

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix),$$

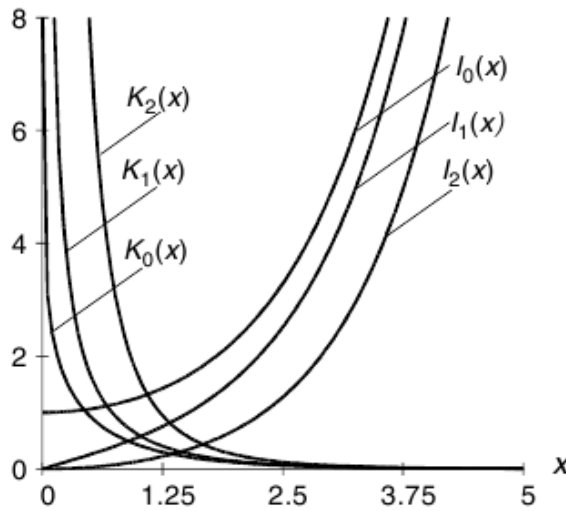
sebagai fungsi Bessel jenis pertama. Karena

$$J_n(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left( \frac{ix}{2} \right)^{2k+n},$$

fungsi Bessel termodifikasi  $I_n(x)$

$$I_n(x) = \frac{1}{i^n} J_n(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k+n+1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k+n}$$

merupakan fungsi riil dan naik secara monotonik.



Gambar 4.4: Fungsi Bessel termodifikasi

Fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua biasanya didefinisikan sebagai  $K_n(x)$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [J_n(ix) + iN_n(ix)].$$

Fungsi ini tidak memiliki nilai nol ganda/berulang dan bukan merupakan fungsi ortogonal. Fungsi ini bisa kita bandingkan dengan  $\sinh(x) = -i \sin(ix)$  dan  $\cosh(x) = \cos(ix)$ . Dengan analogi ini  $I_n(x)$  dan  $K_n(x)$  juga sering disebut fungsi Bessel hiperbolik. Faktor  $i$  dimasukkan agar nilainya menjadi riil. Tiga buah nilai pertama dari  $I_n(x)$  dan  $K_n(x)$  diperlihatkan pada Gambar 4.4. Perhatikan bahwa fungsi Bessel termodifikasi pertama  $I_n(x)$  berperilaku baik pada titik asal tetapi divergen pada tak hingga. Sedangkan fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua  $K_n(x)$  divergen pada titik asal dan berperilaku baik pada tak hingga.

### 4.5.2 Fungsi Bessel Sferis

Persamaan

$$x^2 y'' + 2xy' + [x^2 - l(l+1)] y = 0 \quad (4.56)$$

dengan  $l$  bilangan bulat, bisa kita temui dalam suku radial persamaan gelombang dalam koordinat bola. Persamaan ini dinamakan sebagai persamaan Bessel sferis karena dapat ditransformasikan ke dalam persamaan Bessel dengan mengubah variabel. Ambil

$$y = \frac{1}{(x)^{1/2}} z(x).$$



Sehingga

$$y' = \frac{z'}{(x)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{z}{(x)^{3/2}}$$

$$y'' = \frac{z''}{(x)^{1/2}} - \frac{z'}{(x)^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{z}{x^{5/2}}.$$

Dengan mensubstitusikan pada (4.56) dan mengalikannya dengan  $x^{1/2}$  kita memperoleh

$$x^2 \left[ z'' - \frac{1}{x} z' + \frac{3}{4} \frac{1}{x^2} z \right] + 2x \left[ z' - \frac{1}{2} \frac{1}{x} z \right] + [x^2 - l(l+1)] z = 0$$

atau

$$x^2 z'' + x z' + \left[ x^2 - l(l+1) - \frac{1}{4} \right] z = 0. \quad (4.57)$$

Karena

$$\left[ l(l+1) + \frac{1}{4} \right] = \left( l + \frac{1}{2} \right)^2,$$

jelas bahwa (4.57) merupakan fungsi Bessel dengan orde  $l + 1/2$  sehingga

$$z(x) = C_1 J_{l+1/2}(x) + C_2 J_{-(l+1/2)}(x),$$

dan

$$y(x) = C_1 \sqrt{\frac{1}{x}} J_{l+1/2}(x) + C_2 \sqrt{\frac{1}{x}} J_{-(l+1/2)}(x).$$

Dua buah solusi linier yang saling bebas dikenal sebagai fungsi Bessel sferis  $j_l(x)$  dan fungsi Neumann sferis  $n_l(x)$  yang masing-masing didefinisikan sebagai berikut

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x),$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x).$$

Karena

$$N_{l+1/2}(x) = \frac{\cos[(l+1/2)\pi] J_{l+1/2}(x) - J_{-(l+1/2)}(x)}{\sin[(l+1/2)\pi]}$$

$$= (-1)^{l+1} J_{-(l+1/2)}(x)$$

sehingga  $n_l(x)$  dapat dituliskan sebagai

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-(l+1/2)}(x).$$

Fungsi Hankel sferis didefinisikan sebagai

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + i n_l(x),$$

$$h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - i n_l(x).$$

Semua fungsi ini bisa dinyatakan dalam bentuk fungsi dasar tertutup. Dalam (4.27) dan (4.28), kita telah membuktikan bahwa

$$J_{(1/2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-(1/2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Dan dengan hubungan rekursi (4.34)

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x),$$

kita dapat memperoleh semua fungsi Bessel untuk bilangan pecahan setengah. Sebagai contoh untuk  $n = 1/2$ , kita mempunyai

$$\begin{aligned} J_{(3/2)}(x) &= \frac{1}{x} J_{(1/2)}(x) - J_{-(1/2)}(x) \\ &= \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{aligned}$$

Dengan  $n = -1/2$  kita peroleh

$$J_{(1/2)}(x) = -\frac{1}{x} J_{-(1/2)}(x) - J_{-(3/2)}(x),$$

atau

$$\begin{aligned} J_{-(3/2)}(x) &= -\frac{1}{x} J_{-(1/2)}(x) - J_{(1/2)}(x) \\ &= -\frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(1/2)}(x) = \frac{1}{x} \sin x, \\ j_1(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{(3/2)}(x) = \frac{1}{x^2} \sin x - \frac{1}{x} \cos x, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} n_0(x) &= -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-(1/2)}(x) = -\frac{1}{x} \cos x, \\ n_1(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-(3/2)}(x) = -\frac{1}{x^2} \cos x - \frac{1}{x} \sin x. \end{aligned}$$

Fungsi Bessel sferis dengan orde yang lebih tinggi dapat dibentuk dengan menggunakan hubungan rekursi

$$f_{l+1} = \frac{2l+1}{x} f_l - f_{l-1}, \quad (4.58)$$

dengan  $f_l$  yang dapat berupa  $j_l$ ,  $n_l$ ,  $h_l^{(1)}$  dan  $h_l^{(2)}$ . Hubungan rekursi ini didapatkan dengan mengalikan (4.34) dengan  $\sqrt{\pi/2x}$  dan mengambil  $n = l + 1/2$ .

Ekspresi asimtotik dari  $j_l$ ,  $n_l$ ,  $h_l^{(1)}$  dan  $h_l^{(2)}$  menarik untuk dipelajari. Dalam daerah asimtotik, suku  $1/x$  lebih dominan jika dibandingkan suku-suku yang lain. Karena  $j_0(x) = (1/x) \sin x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} j_1(x) \rightarrow -\frac{1}{x} \cos x = \frac{1}{x} \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right),$$

sehingga untuk  $l = 0$  dan  $l = 1$ , secara asimtotik kita dapat menuliskan

$$j_l(x) \rightarrow \frac{1}{x} \sin \left( x - \frac{l\pi}{2} \right), \quad l = 0, 1.$$

Untuk orde  $l$  yang lebih tinggi dapat diperoleh dari hubungan rekursi (4.58) yaitu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} j_{l+1}(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} [-j_{l-1}(x)] \rightarrow -\frac{1}{x} \sin \left( x - \frac{(l-1)\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{x} \sin \left( x - \frac{(l-1)\pi}{2} - \pi \right) = \frac{1}{x} \sin \left( x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Sehingga untuk tiap bilangan bulat  $l$ , secara asimtotik

$$j_l(x) \rightarrow \frac{1}{x} \sin \left( x - \frac{l\pi}{2} \right).$$

Dengan cara yang sama, kita dapat menunjukkan secara asimtotik

$$n_l(x) \rightarrow -\frac{1}{x} \cos \left( x - \frac{l\pi}{2} \right)$$

untuk semua  $l$ . Lebih dari itu,

$$\begin{aligned} h_l^{(1)}(x) &\rightarrow \frac{1}{x} \sin \left( x - \frac{l\pi}{2} \right) + i \frac{-1}{x} \cos \left( x - \frac{l\pi}{2} \right) = \frac{1}{x} \exp \left[ i \left( x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right) \pi \right], \\ h_l^{(2)}(x) &\rightarrow \frac{1}{x} \sin \left( x - \frac{l\pi}{2} \right) - i \frac{-1}{x} \cos \left( x - \frac{l\pi}{2} \right) = \frac{1}{x} \exp \left[ -i \left( x - \frac{(l+1)\pi}{2} \right) \pi \right]. \end{aligned}$$

Ekspresi asimtotik ini sangat berguna ketika kita mempelajari hamburan.

Kita juga harus mengatakan bahwa dari  $j_0(x)$ ,  $j_1(x)$  dan (4.58), dengan menggunakan induksi matematika, kita bisa memperoleh

$$j_l(x) = x^l \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x},$$

dan dengan cara yang sama

$$n_l(x) = x^l \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x},$$

yang dikenal sebagai persamaan Rayleigh.

## 4.6 Fungsi Legendre

Persamaan diferensial

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} y - 2x \frac{d}{dx} y + \lambda y = 0 \quad (4.59)$$

dikenal sebagai persamaan Legendre, ditemukan oleh matematikawan Perancis Adrien Marie Legendre (1785-1833). Persamaan ini muncul dalam berbagai aplikasi di bidang fisika. Solusi dari persamaan ini disebut sebagai fungsi Legendre yang merupakan salah satu fungsi khusus yang sangat penting.

Fungsi Legendre muncul dalam solusi persamaan diferensial parsial ketika Laplaciannya kita nyatakan dalam koordinat bola. Dalam penggunaan ini, variabel  $x$  adalah cosinus dari sudut polar ( $x = \cos \theta$ ). Sehingga nilai  $x$  jangkauannya dibatasi pada  $-1 \leq x \leq 1$ .

### 4.6.1 Solusi Deret Persamaan Legendre

Kita mulai dengan solusi deret (4.59)

$$\begin{aligned} y(x) &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (a_0 \neq 0). \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) x^{n+k-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Jika kita masukkan pada (4.59) kita mendapatkan

$$\begin{aligned} (1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) x^{n+k-1} \\ + \lambda x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0, \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k} \\ - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k) x^{n+k} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k} = 0. \end{aligned}$$

Dengan mengkombinasikan tiga penjumlahan terakhir, kita memperoleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+k)(n+k-1) + 2(n+k) - \lambda] x^{n+k} = 0.$$

Jika kita menuliskan secara eksplisit dua buah suku pertama pada penjumlahan pertama dan menggunakan

$$(n+k)(n+k-1) + 2(n+k) - \lambda = (n+k)(n+k+1) - \lambda,$$

kita memperoleh

$$a_0 k(k-1)x^{k-2} + a_1(k+1)kx^{k-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n+k)(n+k-1)x^{n+k-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(n+k)(n+k+1) - \lambda]x^{n+k} = 0.$$

Jika kita menggeser indeks sebanyak 2, kita dapat menuliskan penjumlahan yang dimulai dengan  $n = 2$  sebagai

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n+k)(n+k-1)x^{n+k-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+k+2)(n+k+1)x^{n+k}.$$

Maka (4.61) menjadi

$$a_0 k(k-1)x^{k-2} + a_1(k+1)kx^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+k+2)(n+k+1) - a_n[(n+k)(n+k+1) - \lambda]]x^{n+k} = 0$$

yang mengimplikasikan

$$a_0 k(k-1) = 0, \quad (4.61)$$

$$a_1(k+1)k = 0, \quad (4.62)$$

$$[a_{n+2}(n+k+2)(n+k+1) - a_n[(n+k)(n+k+1) - \lambda]] = 0. \quad (4.63)$$

Karena  $a_0 \neq 0$ , dari (4.61) kita mempunyai  $k = 0$  atau  $k = 1$ , kemudian dari (4.62)  $a_1$  haruslah 0. Jika  $k = 0$ ,  $a_1$  dapat bernilai 0 atau tidak sama dengan 0. Sehingga kita mempunyai tiga kasus

$$\text{kasus 1 : } k = 0 \quad \text{dan} \quad a_1 = 0,$$

$$\text{kasus 2 : } k = 1 \quad \text{dan} \quad a_1 = 0,$$

$$\text{kasus 3 : } k = 0 \quad \text{dan} \quad a_1 \neq 0.$$

Pertama kita lihat kasus 1. Karena  $k = 0$  (4.63) menjadi:

$$[a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n[n^2 + n - \lambda]] = 0,$$

atau

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n. \quad (4.64)$$

Karena  $a_1 = 0$ , kita melihat dari persamaan ini  $a_3 = a_5 = \dots = 0$ . Sehingga kita hanya memiliki suku genap saja. Marilah kita tuliskan persamaannya sebagai:

$$a_{n+2} = f(n)a_n,$$

dengan

$$f(n) = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} \quad (4.65)$$

$$y(x) = a_0 (1 + f(0)x^2 + f(2)f(0)x^4 + f(4)f(2)f(0)x^6 + \dots), \quad (4.66)$$

yang merupakan deret tak hingga. Sekarang yang harus kita lakukan adalah melakukan uji deret, apakah deret ini konvergen atau tidak? Untuk melakukannya, kita bisa menuliskan deret ini dengan bentuk

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (x^2)^j$$

dengan

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= a_0 f(0), \\ b_j &= a_0 f(2j-2)f(2j-4) \dots f(0), \\ b_{j+1} &= a_0 f(2j)f(2j-2) \dots f(0). \end{aligned}$$

Untuk uji rasio, kita gunakan

$$R = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{b_{j+1}(x^2)^{j+1}}{b_j(x^2)^j} = \lim_{j \rightarrow \infty} f(2j)x^2.$$

Dengan (4.65)

$$f(2j) = \frac{2j(2j+1) - \lambda}{(2j+2)(2j+1)}, \quad (4.67)$$

sehingga

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(2j)x^2 = x^2.$$

Sehingga untuk  $-1 < x < 1$  deret ini konvergen, sedangkan untuk  $x = 1$  uji deret biasa tidak memberikan informasi apapun. Sehingga kita harus menggunakan uji deret orde kedua (yang juga disebut uji Gauss atau uji Raabe), yang mengatakan dengan

$$R \rightarrow 1 - \frac{s}{j}, \quad (4.68)$$

jika  $s > 1$  deretnya konvergen, sedangkan jika  $s \leq 1$  deretnya divergen. Uji deret ini berdasarkan pada perbandingan dengan fungsi Riemann Zeta  $\xi(s)$  yang didefinisikan sebagai:

$$\xi(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^s}.$$

Karena

$$\int_1^{\infty} x^{-s} dx = \begin{cases} \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \Big|_1^{\infty} & s \neq 1 \\ \ln x \Big|_1^{\infty} & s = 1 \end{cases},$$

nilai integral ini divergen untuk  $s \leq 1$  dan konvergen untuk  $s > 1$ . Sehingga menurut uji integral  $\xi(s)$  divergen untuk  $s \leq 1$  dan konvergen untuk  $s > 1$ . Untuk  $\xi(s)$

$$R = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1/(j+1)^s}{1/j^s} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j^s}{(j+1)^s} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{j+1}{j} \right)^{-s} \rightarrow 1 - \frac{s}{j},$$

yang juga merupakan bentuk (4.68). Kita juga dapat menunjukkan bahwa kriteria konvergensinya dapat digunakan untuk semua deret yang berperilaku asimptotik sama dengan fungsi Riemann Zeta  $\xi(s)$ .

Sekarang dalam (4.67)

$$R = \lim_{j \rightarrow \infty} f(2j) = \frac{j}{j+1} = \frac{j}{j(1+1/j)} = 1 - \frac{1}{j} \dots$$

Karena  $s = 1$  maka deret tersebut divergen. Sehingga untuk  $\lambda$  sebarang, solusi tersebut tidak akan terikat pada  $x = \pm 1$ . Bagaimanapun, jika

$$\lambda = l(l+1), \quad l = \text{bilangan genap},$$

maka deret yang kita miliki akan berhenti dan menjadi polinomial, sehingga kita tidak mempunyai masalah dengan konvergensi. Jelas dari (4.64)

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad (4.69)$$

yaitu  $a_{l+2} = 0$ . Dari sini kita juga memiliki  $a_{l+4} = a_{l+6} = \dots = 0$ . Contohnya jika  $l = 0$ , maka  $a_2 = a_4 = \dots = 0$ . Solusinya, menurut (4.60) adalah  $y = a_0$ . Untuk tiap  $l$ , solusinya bisa didapatkan secara sistematis dari (4.65) dan (4.66). Karena

$$f(n) = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)}, \quad (4.70)$$

$$y(x) = a_0 (1 + f(0)x^2 + f(2)f(0)x^4 + f(4)f(2)f(0)x^6 + \dots),$$

sehingga

$$l = 0: f(0) = 0, \quad y = a_0, \quad (4.71)$$

$$l = 2: f(0) = -3, f(2) = 0, \quad y = a_0 (1 - 3x^2), \quad (4.72)$$

$$l = 4: f(0) = -10, f(2) = -\frac{7}{6}, f(4) = 0 \quad y = a_0 \left( 1 - 10x^2 + \frac{70}{6}x^4 \right).$$

Untuk kasus 2,  $k = 1$ ,  $a_1 = 0$ , (4.63) menjadi:

$$[a_{n+2}(n+3)(n+2) - a_n [(n+1)(n+2) - \lambda]] = 0,$$

atau

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) - \lambda}{(n+3)(n+2)} a_n. \quad (4.73)$$

Karena  $a_1 = 0$ , dan dengan hubungan rekursi ini, semua koefisien ganjil  $a_n$  juga bernilai nol. Solusinya diberikan oleh

$$\begin{aligned} y(x) &= x(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots) \\ &= (a_0x + a_2x^3 + a_4x^5 + \dots), \end{aligned} \quad (4.74)$$

yang merupakan deret pangkat untuk  $x$  ganjil. Dengan argumen yang sama pada kasus 1, deret ini divergen untuk  $x = 1$  kecuali untuk

$$\lambda = l(l+1), \quad l = \text{bilangan ganjil.}$$

Dalam kasus ini

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) - l(l+1)}{(n+3)(n+2)} a_n = f(n+1)a_n,$$

dan

$$y(x) = a_0 [x + f(1)x^3 + f(3)f(1)x^5 + f(5)f(3)f(1)x^7 + \dots],$$

Dengan

$$l = 1, \quad f(1) = 0, \quad y = a_0x, \quad (4.75)$$

$$l = 3, \quad f(1) = -\frac{5}{3}, \quad f(3) = 0, \quad y = a_0 \left( x - \frac{5}{3}x^3 \right). \quad (4.76)$$

Untuk kasus 3,  $k = 0$ ,  $a_1 \neq 0$ . Karena  $a_0$  tidak bernilai nol, maka dengan mudah ditunjukkan bahwa solusinya merupakan jumlah dari dua buah deret tak hingga, satu deret merupakan pangkat genap dari  $x$  dan deret lainnya merupakan deret dengan pangkat ganjil dari  $x$ . Dalam kasus ini, solusi deretnya divergen untuk  $x = \pm 1$ .

### 4.6.2 Polinomial Legendre

Dalam subbab terakhir kita telah melihat solusi dari persamaan Legendre

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} y(x) + l(l+1)y(x) = 0,$$

diberikan oleh polinomial berorde  $l$ . Selanjutnya polinomial tersebut hanya mengandung  $x$  pangkat dalam orde genap jika  $l$  genap dan hanya mengandung  $x$  pangkat dalam orde ganjil jika  $l$  ganjil. Solusi ini diberikan dengan perkalian terhadap konstanta  $a_0$ . Sekarang dengan perjanjian, jika  $a_0$  dipilih sedemikian rupa sehingga  $y(1) = 1$ , maka polinomial ini dikenal sebagai polinomial Legendre  $P_l(x)$ . Sebagai contoh (4.72)

$$l = 2, \quad y_2(x) = a_0 (1 - 3x^2),$$



maka

$$y_2(1) = a_0(-2) = 1$$

kita harus memilih

$$a_0 = -\frac{1}{2}.$$

Dengan pemilihan ini  $y_2(x)$  dikenal sebagai  $P_2(x)$ , yaitu

$$y_2(x) = -\frac{1}{2}(1 - 3x^2) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = P_2(x).$$

Dengan cara yang sama, dari (4.76)

$$l = 3, \quad y_3(x) = a_0 \left( x - \frac{5}{3}x^3 \right)$$

dengan

$$a_0 = -\frac{3}{2}, \quad y_3(1) = 1.$$

Sehingga

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Beberapa polinomial Legendre dapat dilihat pada Gambar 4.5 dan nilainya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, & P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$

Jelas bahwa

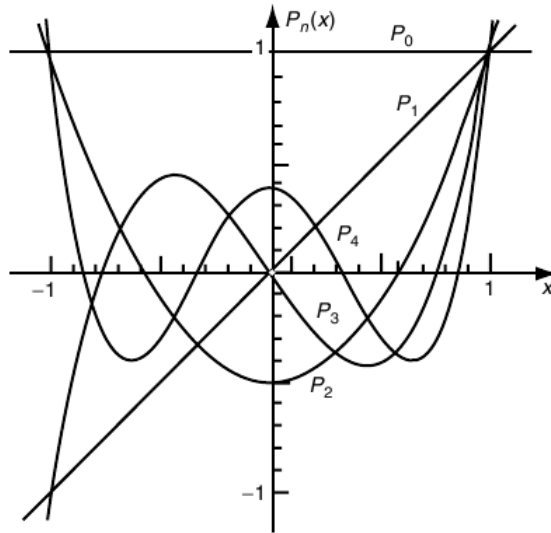
$$P_l(1) = 1, \quad \text{untuk semua } l.$$

Jika  $l$  genap, maka  $P_l(x)$  merupakan fungsi genap simetrik terhadap nol, dan jika  $l$  ganjil, maka  $P_l(x)$  merupakan fungsi ganjil, antisimetrik terhadap nol. Yakni

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x),$$

dan khususnya

$$P_l(-1) = (-1)^l.$$



Gambar 4.5: Polinomial Legendre

### 4.6.3 Fungsi Legendre Jenis Kedua

Dengan memilih  $\lambda = l(l+1)$ , kita telah memilih satu dari dua deret tak hingga menjadi polinomial. Solusi kedua tetaplah berbentuk deret tak hingga. Deret tak hingga ini masih bisa kita tuliskan dalam bentuk tertutup, meskipun tetap divergen pada  $x = \pm 1$ .

Cara lain untuk mendapatkan solusi orde kedua adalah dengan yang dinamakan “metode reduksi orde”. Dengan  $P_l(x)$  adalah solusi persamaan Legendre orde  $l$ , kita menuliskan solusi keduanya sebagai

$$y_2(x) = u_l(x)P_l(x).$$

Dengan mensyaratkan bahwa  $y_2(x)$  memenuhi persamaan Legendre dengan orde yang sama, kita bisa menentukan  $u_l(x)$ . Jika kita masukkan  $y_2(x)$  pada persamaan Legendre, kita mempunyai

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} [u_l(x)P_l(x)] - 2x \frac{d}{dx} [u_l(x)P_l(x)] + l(l+1) [u_l(x)P_l(x)] = 0.$$

Persamaan ini dapat dituliskan

$$\begin{aligned} & (1-x^2) P_l(x) u_l''(x) - [2xP_l(x) - 2(1-x^2) P_l'(x)] u_l'(x) \\ & + \left[ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) - 2x \frac{d}{dx} P_l(x) + l(l+1)P_l(x) \right] u_l(x) = 0. \end{aligned}$$

Karena  $P_l(x)$  merupakan solusi, maka suku pada tanda kurung terakhir bernilai nol, sehingga kita hanya memiliki

$$(1 - x^2) P_l(x) u_l''(x) - [2xP_l(x) - 2(1 - x^2) P_l'(x)] u_l'(x) = 0,$$

atau

$$u_l''(x) = \left[ \frac{2x}{(1 - x^2)} - \frac{2}{P_l(x)} P_l'(x) \right] u_l'(x).$$

Karena  $u_l''(x) = d/dx(u_l'(x))$  maka persamaan ini bisa dituliskan

$$\frac{du_l'(x)}{u_l'(x)} = \left[ \frac{2x}{(1 - x^2)} - \frac{2}{P_l(x)} P_l'(x) \right] dx.$$

Integralkan kedua ruas, kita memperoleh

$$\ln u_l'(x) = -\ln(1 - x^2) - 2 \ln P_l(x) + C,$$

atau

$$u_l'(x) = \frac{c}{(1 - x^2) P_l^2(x)}.$$

Sehingga

$$u_l(x) = \int^x \frac{c dx'}{(1 - x'^2) P_l^2(x')}.$$

Konstanta sebarang  $c$  tidak berkontribusi apapun pada sifat-sifat fungsi Legendre. Dengan memilih  $c = 1$ , fungsi Legendre jenis kedua kita berikan simbol  $Q_l(x)$ .

Dengan  $P_0(x) = 1$ ,

$$u_0(x) = \int^x \frac{dx'}{(1 - x'^2)} = \frac{1}{2} \int^x \left( \frac{dx'}{1 + x'} + \frac{dx'}{1 - x'} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Konstanta integrasi tambahan pada integral ini dipilih nol untuk memudahkan. Dengan pemilihan ini

$$Q_0(x) = u_0(x) P_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}. \quad (4.77)$$

Dengan cara yang sama, dengan  $P_1(x) = x$ ,

$$u_1(x) = \int^x \frac{c dx'}{(1 - x'^2) x'^2} = \int^x \left( \frac{dx'}{1 - x'^2} + \frac{dx'}{x'^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1}{x},$$

dan

$$Q_1(x) = u_1(x) P_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} - 1 = P_1(x) Q_0(x) - 1.$$

$Q_l$  dengan orde yang lebih tinggi bisa diperoleh dengan hubungan rekursi

$$lQ_l(x) = (2l - 1)xQ_{l-1}(x) - (l - 1)Q_{l-2}(x),$$

yang juga dipenuhi oleh  $P_l(x)$ , (akan dibuktikan setelah ini). Beberapa fungsi  $Q_l(x)$  adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, & Q_1 &= P_1 Q_0 - 1, & Q_2 &= P_2 Q_0 - \frac{3}{2}x, \\ Q_3 &= P_3 Q_0 - \frac{5}{2}x^2, & Q_4 &= P_4 Q_0 - \frac{35}{8}x^3 + \frac{55}{24}x, \\ Q_5 &= P_5 Q_0 - \frac{63}{8}x^4 + \frac{49}{8}x^2 - \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan juga bahwa ekspresi ini tidak lain adalah solusi deret tak hingga yang didapatkan dari metode Frobenius. Sebagai contoh, koefisien pada solusi kedua dari (4.74)

$$y = a_0 x + a_2 x^3 + a_4 x^5 + \dots,$$

diberikan oleh (4.73)

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) - \lambda}{(n+3)(n+2)} a_n.$$

Dengan  $\lambda = 0$

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+2)} a_n.$$

Sehingga

$$y = a_0 \left( x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \right) = \frac{a_0}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},$$

ekspresi ini identik dengan  $a_0 Q_0(x)$ .

Sehingga solusi umum dari persamaan Legendre dengan orde bilangan bulat  $l$  adalah

$$y(x) = c_1 P_l(x) + c_2 Q_l(x),$$

dengan  $P_l(x)$  adalah polinomial yang konvergen untuk semua  $x$  dan  $Q_l(x)$  divergen pada  $x = \pm 1$ .

## 4.7 Sifat-sifat Polinomial Legendre

### 4.7.1 Rumus Rodrigues

Polinomial Legendre dapat diringkas dengan rumus Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (4.78)$$

Jelas bahwa rumus ini akan memberikan polinomial berorde  $l$ . Kita akan membuktikan bahwa polinomial ini adalah polinomial Legendre. Terdapat dua bagian dalam pembuktian. Pertama kita akan membuktikan bahwa  $(d^l/dx^l)(x^2 - 1)^l$  memenuhi

persamaan Legendre. Kemudian kita akan menunjukkan bahwa  $P_l(1)$  yang diberikan oleh (4.78) sama dengan 1.

Sebelum kita membuktikan, marilah kita mengingat kembali aturan rantai Leibnitz dalam menurunkan

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} A(x)B(x) &= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} A(x) \frac{d^k}{dx^k} B(x) \\ &= \left[ \frac{d^m}{dx^m} A(x) \right] B(x) + m \left[ \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} A(x) \right] \left[ \frac{d}{dx} B(x) \right] + \cdots + A(x) \left[ \frac{d^m}{dx^m} B(x) \right] \end{aligned} \quad (4.79)$$

Untuk membuktikan bagian pertama (4.78), ambil

$$\begin{aligned} v &= (x^2 - 1)^l, \\ \frac{dv}{dx} &= l(x^2 - 1)^{l-1} 2x, \\ (x^2 - 1) \frac{dv}{dx} &= l(x^2 - 1)^l 2x = 2lxv. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Turunkan ruas kiri persamaan ini sebanyak  $l+1$  kali dengan aturan Leibnitz [dengan  $A(x) = dv/dx$  dan  $B(x) = (x^2 - 1)$ ]:

$$\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} (x^2 - 1) \frac{dv}{dx} = (x^2 - 1) \frac{d^{l+2}v}{dx^{l+2}} + (l+1)2x \frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}} + \frac{(l+1)l}{2!} 2 \frac{d^l v}{dx^l}$$

Turunkan ruas kanan Pers. (4.80) sebanyak  $l+1$  kali dengan aturan Leibnitz [dengan  $A(x) = v$  dan  $B(x) = 2lx$ ]:

$$\frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} 2lxv = 2lx \frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}} + (l+1)2l \frac{d^l v}{dx^l},$$

kita mempunyai

$$(x^2 - 1) \frac{d^{l+2}v}{dx^{l+2}} + (l+1)2x \frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}} + \frac{(l+1)l}{2!} 2 \frac{d^l v}{dx^l} = 2lx \frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}} + (l+1)2l \frac{d^l v}{dx^l}.$$

Kita bisa menyederhanakannya

$$(x^2 - 1) \frac{d^{l+2}v}{dx^{l+2}} + 2x \frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}} - l(l+1) \frac{d^l v}{dx^l} = 0,$$

atau

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} \left[ \frac{d^l v}{dx^l} \right] \right] + l(l+1) \left[ \frac{d^l v}{dx^l} \right] = 0.$$

Jelas bahwa

$$\frac{d^l v}{dx^l} = \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

memenuhi persamaan Legendre. Sekarang jika kita dapat menunjukkan

$$\left[ \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \right]_{x=1} = 1,$$

maka

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

adalah polinomial Legendre.

Dengan menuliskan

$$\frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \frac{d^l}{dx^l} (x + 1)^l (x - 1)^l,$$

dan menggunakan aturan Leibnitz  $A(x) = (x + 1)^l$  dan  $B(x) = (x - 1)^l$

$$\frac{d^l}{dx^l} (x - 1)^l (x + 1)^l = \left[ \frac{d^l}{dx^l} (x - 1)^l \right] (x + 1)^l + l \left[ \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x - 1)^l \right] \left[ \frac{d}{dx} (x + 1)^l \right] + \dots \quad (4.81)$$

Perhatikan

$$\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x - 1)^l = l!(x - 1),$$

pada  $x = 1$ , suku ini nilainya nol. Sepanjang suku  $(x - 1)^l$  ini diturunkan sebanyak kurang dari  $l$  kali, maka hasilnya akan mengandung suku  $(x - 1)$ . Pada  $x = 1$  nilai turunannya nol. Sehingga semua suku pada ruas kanan Pers. (4.81) nilainya nol pada  $x = 1$  kecuali suku pertama.

Sehingga

$$\left[ \frac{d^l}{dx^l} (x - 1)^l (x + 1)^l \right]_{x=1} = \left[ \left[ \frac{d^l}{dx^l} (x - 1)^l \right] (x + 1)^l \right]_{x=1}.$$

Sekarang

$$\frac{d^l}{dx^l} (x - 1)^l = l!, \quad [(x + 1)^l]_{x=1} = 2^l,$$

sehingga

$$\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \Big|_{x=1} = 1,$$

yang melengkapi bukti kita.

## 4.7.2 Fungsi Pembangkit Polinomial Legendre

Kita akan membuktikan identitas yang sangat penting

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n, \quad |z| < 1. \quad (4.82)$$

Keuntungan dari hubungan ini adalah kita meringkas  $P_n$  menjadi satu buah persamaan. Hal ini memungkinkan kita untuk mendapatkan polinomial Legendre dengan orde berbeda tanpa mengetahui secara eksplisit bentuknya. Selain aplikasinya dalam fisika, hubungan ini juga banyak dijumpai dalam statistik.

Untuk membuktikan hubungan ini, kita akan menggunakan deret pangkat dengan bentuk

$$f = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)z^n. \quad (4.83)$$

Selanjutnya kita akan membuktikan bahwa koefisien  $F_n(x)$  memenuhi persamaan Legendre dan juga  $F_n(1) = 1$ . Hal ini akan memungkinkan kita untuk mengatakan bahwa  $F_n(x)$  tidak lain adalah  $P_n(x)$ . Sekarang

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2} (1-2xz+z^2)^{-3/2} (-2z) = zf^3, \quad (4.84)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{2} (1-2xz+z^2)^{-3/2} (-2x+2z) = (x-z)f^3, \quad (4.85)$$

maka

$$f = \frac{f^3}{f^2} = f^3 (1-2xz+z^2) = (1-x^2)f^3 + (x-z)^2 f^3$$

dan

$$(1-x^2)f^3 = f - (x-z)^2 f^3.$$

Kemudian

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{\partial f}{\partial x} &= (1-x^2) z f^3 = z [f - (x-z)^2 f^3] \\ &= z \left[ f - (x-z) \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ &= -z \frac{\partial}{\partial z} [(x-z)f]. \end{aligned}$$

Jika kita turunkan kedua ruas terhadap  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \frac{\partial f}{\partial x} \right] &= -z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} [(x-z)f] = -z \frac{\partial}{\partial z} \left[ f + (x-z) \frac{\partial f}{\partial x} \right] \\ &= -z \frac{\partial}{\partial z} [f + (x-z)z f^3] \\ &= -z \frac{\partial}{\partial z} \left[ f + z \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ &= -z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (zf) \\ &= -z \frac{\partial^2}{\partial z^2} (zf). \end{aligned}$$

Dengan ekspansi deret dari  $f$ , kita mempunyai

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)z^n \right] = -z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ z \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)z^n \right],$$

atau

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} F_n(x) \right] z^n &= -z \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) \frac{\partial^2}{\partial z^2} z^{n+1} \\ &= -z \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) (n+1) n z^{n-1} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) (n+1) n z^n. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} F_n(x) + n(n+1) F_n(x) \right] z^n = 0.$$

Sehingga  $F_n(x)$  memenuhi persamaan Legendre

$$\frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} F_n(x) + n(n+1) F_n(x) = 0.$$

Selanjutnya untuk  $x = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(1) z^n.$$

Karena

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-z)^2}} = \frac{1}{1-z},$$

dan

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

maka

$$F_n(1) = 1.$$

Sehingga (4.82) telah terbukti sebagai fungsi pembangkit polinomial Legendre yang dinotasikan sebagai

$$G(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n.$$

### 4.7.3 Hubungan Rekursi

Hubungan rekursi berikut sangat bermanfaat dalam menangani polinomial Legendre dan juga turunannya



1.

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (4.86)$$

**Bukti:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1 - 2xz + z^2)^{-1/2} \right] &= \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n, \\ (1 - 2xz + z^2)^{-3/2} (x - z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1}, \\ (x - z) \frac{(1 - 2xz + z^2)^{-1/2}}{1 - 2xz + z^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1}, \end{aligned}$$

maka

$$(x - z) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = (1 - 2xz + z^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)nz^{n-1},$$

atau

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2xnP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n+1}. \end{aligned}$$

Dengan menyatukan suku-suku, kita mendapatkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_n(x)z^{n+1} = 0.$$

Karena

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)z^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_n(x)z^{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(x)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} nP_{n-1}(x)z^n, \end{aligned}$$

sehingga

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x)] z^n = 0.$$

Maka

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} [(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)]. \quad (4.87)$$

Hal ini berarti sepanjang kita mengetahui  $P_{n-1}(x)$  dan  $P_n(x)$ , kita dapat memperoleh  $P_{n+1}(x)$ .

2.

$$nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0, \quad \text{dengan} \quad P'_n(x) = \frac{d}{dx}P_n(x). \quad (4.88)$$

**Bukti:** Dengan menurunkan fungsi pembangkit berturut-turut terhadap  $z$  dan  $x$  kita mendapatkan

$$\frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1}$$

$$\frac{z}{(1-2xz+z^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)z^n.$$

Dengan mengambil rasionya, kita memiliki

$$\frac{x-z}{z} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)z^n}.$$

Dari sini, kita memperoleh

$$(x-z) \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP'_n(x)z^n - \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^n. \quad (4.89)$$

Sekarang

$$\sum_{n=0}^{\infty} xP'_n(x)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} xP'_n(x)z^n,$$

karena  $P'_0(x) = 0$  dan

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)z^n,$$

karena suku pertama  $n = 0$  sama dengan nol. Dengan mudah dibuktikan bahwa

$$\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} P'_{n-1}(x)z^n.$$

Sehingga (4.89) dapat dituliskan

$$\sum_{n=1}^{\infty} [xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) - nP_n(x)] z^n = 0.$$

Kita bisa memperoleh

$$xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) - nP_n(x) = 0. \quad (4.90)$$

Hubungan ini bersama dengan hubungan rekursi (4.86) dapat digunakan untuk mencari semua turunan polinomial Legendre hanya dengan mengetahui  $P_0(x) =$

1 dan  $P_1(x) = x$ . Hubungan yang lain juga dapat dicari dengan menggunakan dua buah hubungan rekursi ini. Sebagai contoh dari (4.87) kita mempunyai

$$P'_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}(P_n + xP'_n) - \frac{n}{n+1}P'_{n-1},$$

atau

$$xP'_n = \frac{n+1}{2n+1}P'_{n+1} - P_n + \frac{n}{2n+1}P'_{n-1}.$$

Jika kita masukkan pada (4.90)

$$\frac{n+1}{2n+1}P'_{n+1} - P_n + \frac{n}{2n+1}P'_{n-1} - P'_{n-1} - nP_n = 0,$$

jika kita kumpulkan suku-sukunya

$$\frac{n+1}{2n+1}P'_{n+1} + \frac{n+1}{2n+1}P'_{n-1} - (n+1)P_n = 0,$$

kita memperoleh hubungan yang sangat berguna

$$P_n = \frac{1}{2n+1}[P'_{n+1} - P'_{n-1}]. \quad (4.91)$$

Persamaan ini memungkinkan kita menghitung integral

$$\int_x^1 P_n(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2n+1}[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)].$$

#### 4.7.4 Ortogonalitas dan Normalisasi Polinomial Legendre

Seperti yang sudah kita bahas sebelumnya, persamaan Legendre dengan sendirinya yang berbentuk

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} y \right] + \lambda y = 0$$

termasuk persamaan Sturm-Liouville pada selang  $-1 \leq x \leq 1$  dengan fungsi bobot satuan. Persyaratan bahwa solusinya harus terikat (berhingga) pada  $x = \pm 1$  membuat nilai eigen  $\lambda$  menjadi  $l(l+1)$ , dengan  $l$  bilangan bulat. Fungsi eigen yang berkaitan dengan nilai eigen tersebut adalah polinomial Legendre  $P_l(x)$ . Karena fungsi eigen dari persamaan Sturm-Liouville haruslah saling tegak lurus dengan fungsi bobot tertentu, maka

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x)dx = 0, \quad l \neq l'.$$

Perluasan dari sini adalah

$$\int_{-1}^1 x^n P_l(x)dx = 0, \quad n < l,$$

karena  $x^n$  dapat dituliskan sebagai kombinasi linier polinomial Legendre dengan orde tertinggi  $n$ .

Semua fungsi yang berperilaku baik dalam selang  $-1 \leq x \leq 1$  dapat diekspansikan dalam deret Fourier-Legendre

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

Untuk melakukan ekspansi deret ini, kita perlu mengetahui nilai dari integral normalisasi

$$\beta_n^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx.$$

Terdapat banyak cara untuk menghitung integral ini, yang paling sederhana adalah menggunakan (4.91)

$$P_n = \frac{1}{2n+1} [P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)].$$

Kalikan kedua ruas dengan  $P_n(x)$  dan integralkan

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{1}{2n+1} \left[ \int_{-1}^1 P_n(x) P'_{n+1}(x) dx - \int_{-1}^1 P_n(x) P'_{n-1}(x) dx \right].$$

Integral kedua pada ruas kanan nilainya nol karena  $P'_{n-1}$  adalah polinomial dengan orde  $n-2$ . Suku pertama pada ruas kanan bisa dituliskan

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x) P'_{n+1}(x) dx &= \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} dx = \int_{-1}^1 P_n(x) dP_{n+1}(x) \\ &= [P_n(x) P_{n+1}(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_{n+1}(x) P'_n(x) dx. \end{aligned}$$

Integral pada suku kedua bernilai nol karena  $P'_n(x)$  adalah polinomial berorde  $n-1$ . Suku yang diintegrasikan

$$\begin{aligned} [P_n(x) P_{n+1}(x)]_{-1}^1 &= P_n(1) P_{n+1}(1) - P_n(-1) P_{n+1}(-1) \\ &= 1 - (-1)^n (-1)^{n+1} = 2. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\beta_n^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

## 4.8 Fungsi Legendre Terasosiasi dan Fungsi Harmonik Bola

### 4.8.1 Polinomial Legendre Terasosiasi

Persamaan

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} y(x) + \left[ \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y(x) = 0. \quad (4.92)$$

dikenal sebagai persamaan Legendre terasosiasi. Persamaan ini dalam bentuk persamaan Sturm-Liouville. Persamaan ini menjadi persamaan nilai eigen untuk  $\lambda$  jika kita mensyaratkan bahwa solusinya terikat pada titik singular  $x = \pm 1$ . Jika  $m = 0$ , persamaan ini menjadi persamaan Legendre yang kita kenal dan  $\lambda = l(l + 1)$ . Ketika  $m$  nilainya tak nol, maka kita bisa menggunakan metode Frobenius untuk mencari solusinya sama seperti yang kita lakukan untuk persamaan Legendre. Tetapi, akan lebih menarik dan efisien jika kita mencari hubungan antara kasus  $m \neq 0$  dan  $m = 0$ .

Untuk memulainya, kita ingat kembali persamaan Legendre

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) - 2x \frac{d}{dx} P_l(x) + l(l + 1)P_l(x) = 0, \quad (4.93)$$

dan mengubahnya menjadi persamaan Legendre terasosiasi dengan penurunan berulang. Dengan aturan Leibnitz (4.79), kita bisa menuliskan

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} \left[ (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l \right] &= (1 - x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_l - 2mx \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l - m(m - 1) \frac{d^m}{dx^m} P_l, \\ \frac{d^m}{dx^m} \left[ 2x \frac{d}{dx} P_l \right] &= 2x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l + 2m \frac{d^m}{dx^m} P_l. \end{aligned}$$

Sehingga dengan menurunkan (4.93)  $m$  kali dan kita kumpulkan suku-sukunya diperoleh

$$(1 - x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_l - 2x(m + 1) \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l + [l(l + 1) - m(m + 1)] \frac{d^m}{dx^m} P_l = 0. \quad (4.94)$$

Dengan menuliskan

$$u = \frac{d^m}{dx^m} P_l(x),$$

persamaan di atas menjadi

$$(1 - x^2) u'' - 2x(m + 1)u' + [l(l + 1) - m(m + 1)]u = 0. \quad (4.95)$$

Sekarang kita akan membuktikan bahwa dengan

$$u(x) = (1 - x^2)^{-m/2} y(x),$$

$y(x)$  memenuhi persamaan Legendre terasosiasi. Dengan memasukkan  $u(x)$  dan turunannya

$$\begin{aligned} u' &= (1 - x^2)^{-m/2} y' + \frac{m}{2} (1 - x^2)^{-m/2-1} 2xy \\ &= \left( y' + \frac{mx}{1 - x^2} y \right) (1 - x^2)^{-m/2}, \\ u'' &= \left[ y'' + \frac{2mx}{1 - x^2} y' + \frac{m}{1 - x^2} y + \frac{m(m + 2)x^2}{(1 - x^2)^2} y \right] (1 - x^2)^{-m/2}, \end{aligned}$$

pada (4.95) dan menyederhanakannya, kita memperoleh

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0,$$

yang merupakan persamaan Legendre terasosiasi. Sehingga

$$y(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x),$$

haruslah merupakan solusi persamaan Legendre terasosiasi. Nilai negatif dari  $m$  tidak mengubah nilai  $m^2$  sehingga solusi ini juga berlaku untuk bilangan  $m$  negatif.

Solusi ini dikenal sebagai fungsi Legendre terasosiasi  $P_l^m(x)$ . Untuk  $m$  positif dan negatif, didefinisikan sebagai

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x). \quad (4.96)$$

Dengan menggunakan rumus Rodrigues, dapat ditunjukkan bahwa

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l. \quad (4.97)$$

Karena pangkat tertinggi dari  $(x^2-1)^l$  adalah  $x^{2l}$ , jelas bahwa  $-l \leq m \leq l$ .

Sebuah konstanta dikalikan (4.96) juga tetap merupakan solusi, sehingga hal ini memungkinkan beberapa penulis dalam literatur yang lain mendefinisikan  $P_l^m$  secara berbeda mengalikannya dengan  $(-1)^m$ . Jika tidak dikatakan secara eksplisit, kita akan menggunakan definisi (4.96). Beberapa polinomial ada di bawah ini, untuk aplikasi, kita biasa menemukan  $x = \cos \theta$ .

$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}$	$P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$
$P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2}$	$P_2^1(\cos \theta) = 3 \cos \theta \sin \theta$
$P_2^2(x) = 3(1-x^2)$	$P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta$
$P_3^1(x) = (3/2)(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$	$P_3^1(\cos \theta) = (3/2)(5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$
$P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$	$P_3^2(\cos \theta) = 15 \cos \theta \sin^2 \theta$
$P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2}$	$P_3^3(\cos \theta) = 15 \sin^3 \theta$

### 4.8.2 Ortogonalitas dan Normalisasi Polinomial Legendre Terasosiasi

Persamaan Legendre terasosiasi adalah berbentuk persamaan Sturm-Liouville, sehingga fungsi eigennya, fungsi Legendre terasosiasi, saling tegak lurus.

Mari kita ingat persamaan Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left[ r(x) \frac{d}{dx} y \right] + q(x)y + \lambda w(x)y = 0.$$

Jika  $r(a) = r(b) = 0$  maka persamaan ini adalah persamaan Sturm-Liouville singular pada selang  $a \leq x \leq b$ , sehingga solusinya terikat pada  $x = a$  dan  $x = b$ . Hal ini berarti fungsi eigennya saling tegak lurus dengan fungsi bobot tertentu  $w(x)$ .

Jika persamaan Legendre terasosiasi dituliskan sebagai

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_l^m(x) \right] + l(l+1)P_l^m(x) - \frac{m^2}{1-x^2} P_l^m(x) = 0,$$

kita dapat mengidentifikasi

$$r(x) = x^2 - 1, \quad q(x) = -l(l+1), \quad w(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad \lambda = m^2,$$

kita dapat menyimpulkan

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) \frac{1}{1-x^2} dx = 0, \quad m \neq m'. \quad (4.98)$$

Pada sisi yang lain, kita dapat mengidentifikasi

$$r(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = -\frac{m^2}{1-x^2}, \quad w(x) = 1, \quad \lambda = l(l+1),$$

maka  $P_l^m(x)$  juga memenuhi syarat tegak lurus

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = 0, \quad l \neq l'. \quad (4.99)$$

Dalam aplikasi praktis (4.99) lebih sering digunakan sedangkan (4.98) hanya sekedar keingintahuan matematik.

Untuk menggunakan  $P_l^m(x)$  sebagai himpunan basis dalam deret Fourier umum, kita harus menghitung integral normalisasi

$$\int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx = \beta_{lm}^2.$$

Dengan definisi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} d \left[ \frac{d^{m-1} P_l(x)}{dx^{m-1}} \right]. \end{aligned}$$

Dengan mengintegrasikan parsial kita memperoleh

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^m \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} d \left[ \frac{d^{m-1} P_l(x)}{dx^{m-1}} \right] = (1-x^2)^m \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \frac{d^{m-1} P_l(x)}{dx^{m-1}} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1} P_l(x)}{dx^{m-1}} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^m \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \right] dx.$$

Bagian yang diintegrasikan hilang pada batas atas dan bawah, sehingga

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)^m \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \right] = (1-x^2)^m \frac{d^{m+1} P_l(x)}{dx^{m+1}} - 2mx (1-x^2)^{m-1} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}.$$

Menggantikan  $m$  dengan  $m-1$  pada (4.94) persamaannya menjadi

$$(1-x^2) \frac{d^{m+1} P_l}{dx^{m+1}} - 2xm \frac{d^m P_l}{dx^m} + [l(l+1) - (m-1)m] \frac{d^{m-1} P_l}{dx^{m-1}} = 0.$$

Kalikan persamaan ini dengan  $(1-x^2)^{m-1}$ , kita mempunyai

$$\begin{aligned} & (1-x^2)^m \frac{d^{m+1} P_l(x)}{dx^{m+1}} - 2mx (1-x^2)^{m-1} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m} \\ & = - (1-x^2)^{m-1} (l+m)(l-m+1) \frac{d^{m-1} P_l(x)}{dx^{m-1}}. \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx &= (l+m)(l-m+1) \int_{-1}^1 \frac{d^{m-1} P_l(x)}{dx^{m-1}} (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_l(x)}{dx^{m-1}} \\ &= (l+m)(l-m+1) \int_{-1}^1 [P_l^{m-1}(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Proses ini dapat dilakukan berulang kali, dan setelah  $m$  kali

$$\int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx = k_{lm} \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx,$$

dengan

$$\begin{aligned} k_{lm} &= (l+m)(l-m+1)(l+m-1)(l-m+2) \cdots (l+1)l \\ &= (l+m)(l+m-1) \cdots (l+1)l \cdots (l-m+2)(l-m+1) \\ &= (l+m)(l+m-1) \cdots (l-m+1) \frac{(l-m)!}{(l-m)!} = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \end{aligned}$$

Karena

$$\int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1},$$

maka

$$\beta_{lm}^2 = \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$



### 4.8.3 Fungsi Harmonik Bola

Penggunaan paling banyak dari polinomial Legendre bersama dengan fungsi harmonik bola  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  yang merupakan suku angular dari solusi persamaan Laplace dalam koordinat bola,

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \tag{4.100}$$

dengan  $\theta$  adalah sudut polar dan  $\varphi$  adalah sudut azimuth dan  $m \geq 0$ . Untuk  $m \leq 0$

$$Y_l^{-|m|}(\theta, \varphi) = (-1)^m [Y_l^m(\theta, \varphi)]^*. \tag{4.101}$$

Sepanjang permukaan bola,  $\{Y_l^m\}$  membentuk himpunan ortonormal lengkap

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{l_1}^{m_1*}(\theta, \varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta d\varphi = \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2}.$$

Ortogonalitas terhadap  $(m_1, m_2)$  berasal dari suku yang bergantung  $\varphi$  yaitu  $e^{im\varphi}$

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-im_1\varphi} e^{im_2\varphi} d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{i(m_2-m_1)\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{m_1, m_2},$$

sedangkan ortogonalitas  $(l_1, l_2)$  berkaitan dengan fungsi Legendre terasosiasi  $P_l^m(\cos \theta)$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} P_{l_1}^m(\cos \theta) P_{l_2}^m(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l_1, l_2}.$$

Beberapa fungsi harmonik bola adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} Y_0^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} & Y_2^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_1^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta & Y_2^{\pm 1}(\theta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi} \\ Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} & Y_2^{\pm 2}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi} \end{aligned}$$

Faktor  $(-1)^m$  pada (4.100) adalah faktor fase. Meskipun tidak terlalu penting, namun pemilihan ini akan sering ditemukan dalam teori momentum sudut di dalam mekanika kuantum. Faktor ini dinamakan fase Condon-Shortely. Beberapa penulis tidak mencantulkannya dalam mendefinisikan fungsi harmonik bola. Beberapa yang lain menggunakan  $\cos \varphi$  atau  $\sin \varphi$  daripada  $e^{i\varphi}$ . Sehingga ketika kita menggunakan fungsi harmonik bola, konvensi fase harus dispesifikasi terlebih dahulu.

Sebuah fungsi  $\theta$  dan  $\varphi$  yang berperilaku baik dapat diekspansikan sebagai penjumlahan fungsi harmonik bola

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi),$$

dengan

$$c_{lm} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [Y_l^m(\theta, \varphi)]^* f(\theta, \varphi) d\varphi d(\cos\theta).$$

Hal ini merupakan contoh dari deret Fourier umum dengan himpunan basisnya adalah solusi dari persamaan Sturm–Liouville.

## 4.9 Latihan

1. Selesaikan persamaan diferensial berikut

$$\frac{dT(t)}{dt} + \alpha T(t) = 0,$$

dengan mengekspansikan  $T(t)$  dalam deret Frobenius

$$T(t) = t^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Jawab:  $T(t) = a_0 \left( 1 - \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} - \frac{\alpha^3 t^3}{3!} + \dots \right) = a_0 e^{-\alpha t}.$

2. *Polinomial Laguerre*. Gunakan metode Frobenius untuk menyelesaikan persamaan Laguerre

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0.$$

Tunjukkan bahwa jika  $\lambda$  adalah bilangan bulat  $n$  tak negatif, solusinya adalah polinomial orde  $n$ . Jika polinomial tersebut ternormalisasi sehingga sama dengan satu pada  $x = 0$ , polinomial tersebut dikenal sebagai polinomial Laguerre  $L_n(x)$ . Tunjukkan bahwa

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!(k!)^2} x^k.$$

Carilah ekspresi eksplisit dari  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$  dan tunjukkan bahwa polinomial ini identik dengan hasil yang diperoleh dengan prosedur Gram–Schmidt.

3. Carilah koefisien  $c_n$  dari ekspansi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x)$$

dalam selang  $0 \leq x < \infty$ . Misalkan  $f(x) = x^2$ , carilah  $c_n$  dan verifikasi hasilnya dengan ekspresi eksplisit dari  $L_0(x)$ ,  $L_1(x)$ ,  $L_2(x)$ .

Petunjuk: Ingat bahwa persamaan Laguerre adalah persoalan Sturm–Liouville dalam selang  $0 \leq x < \infty$ . Fungsi eigennya saling ortogonal terhadap fungsi bobot  $e^{-x}$ .

4. *Rumus Rodrigues untuk polinomial Laguerre.* Tunjukkan bahwa

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Petunjuk: Gunakan aturan Leibnitz untuk menurunkan  $(x^n e^{-x})$ .

5. *Polinomial Laguerre Terassosiasi* (a) Tunjukkan bahwa solusi persamaan Laguerre terassosiasi

$$xy'' + (K + 1 - x)y' + ny = 0,$$

diberikan oleh

$$y = \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x).$$

(b) Selain sebagai konstanta perkalian, solusi ini dinamakan sebagai polinomial Laguerre terassosiasi  $L_n^k(x)$ . Tunjukkan bahwa  $L_0^1(x)$ ,  $L_1^1(x)$ ,  $L_2^1(x)$  sebanding dengan

$$\frac{d}{dx} L_1(x), \frac{d}{dx} L_2(x), \frac{d}{dx} L_3(x).$$

Petunjuk: (a) Mulai dengan persamaan Laguerre berorde  $(n + k)$ , turunkan  $k$  kali.

Peringatan: Terdapat banyak notasi berbeda yang digunakan dalam literatur untuk polinomial Laguerre terassosiasi. Ketika berhubungan dengan polinomial ini, kita harus berhati-hati dengan definisi yang digunakan.

6. *Polinomial Hermite.* Gunakan metode Frobenius untuk menunjukkan polinomial berikut

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

dengan

$$\frac{c_{k+2}}{c_k} = \frac{2k - 2n}{(k + 1)(k + 2)}$$

adalah solusi persamaan Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Di sini kita memiliki *terminating series* dengan suku  $k = 0, 2, \dots, n$  untuk  $n$  genap dan dengan suku  $k = 1, 3, \dots, n$  untuk  $n$  ganjil. Jika koefisien dengan pangkat tertinggi dari  $x$  ternormalisasi menjadi  $2^n$ , maka polinomial ini dinamakan polinomial Hermite  $H_n(x)$ . Carilah ekspresi eksplisit dari  $H_0(x), H_1(x), H_2(x)$ . Tunjukkan juga bahwa ini bisa diperoleh dengan prosedur Gram–Schmidt.

7. Dengan perkalian dari

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} x^{2l}$$

$$e^{2xt} = 1 + 2xt + \frac{(2x)^2}{2!} t^2 + \frac{(2x)^3}{3!} t^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} t^k,$$

yang dituliskan sebagai

$$e^{-t^2} e^{2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) t^n,$$

tunjukkan bahwa untuk  $n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $n = 2$

$$A_n(x) = \frac{1}{n!} H_n(x),$$

dengan  $H_n(x)$  adalah polinomial Hermite pada soal sebelumnya.

8. *Fungsi Pembangkit Polinomial Hermite.* Tunjukkan bahwa (a)  $A_n(x)$  pada soal sebelumnya dapat dituliskan

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{k,n} x^k, \quad \text{dan} \quad c_{n,n} = \frac{2^n}{n!},$$

dengan  $k$  dan  $n$  keduanya ganjil atau keduanya genap.

(b) Tunjukkan bahwa  $c_{k,n}$  diberikan oleh

$$c_{k,n} = \frac{2^k (-1)^{(n-k)/2}}{k! [(n-k)/2]}.$$

(c) Tunjukkan juga

$$\frac{c_{k+2,n}}{c_{k,n}} = \frac{2k-2n}{(k+1)(k+2)}.$$

(d) Tunjukkan secara umum

$$e^{-t^2} e^{2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n,$$

dengan  $H_n(x)$  adalah polinomial Hermite berorde  $n$ . Ruas kiri persamaan ini dikenal sebagai fungsi pembangkit  $G(x, t)$  polinomial Hermite,

$$G(x, t) = e^{-t^2+2xt}.$$

Petunjuk: (a) Pangkat  $x$  hanya berasal dari  $e^{2xt}$ .

(b) Koefisien  $t^n$  adalah hasil perkalian  $t^k$  dalam ekspansi  $e^{2xt}$  dan koefisien  $t^{n-k}$  dalam ekspansi  $e^{-t^2}$ . Pilih  $(n-k) = 2l$ .

(d) Koefisien yang memenuhi hubungan rekursi polinomial Hermite dan koefisien pangkat  $x$  tertinggi ternormalisasi pada  $(1/n!)2n$ .

9. *Hubungan rekursi polinomial Hermite.* Tunjukkan bahwa

$$(a) \quad 2xH_n(x) = 2nH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x), \quad n \geq 1.$$

$$(b) \quad \frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

Petunjuk: (a) Perhatikan  $\frac{\partial}{\partial t}G(x, t)$  dan (b)  $\frac{\partial}{\partial x}G(x, t)$ .

10. *Rumus Rodrigues untuk Polinomial Hermite*. Tunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} G(x, t) \right|_{t=0} = H_n(x), \\ \text{(b)} \quad & \frac{\partial^n}{\partial t^n} G(x, t) = e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(t-x)^2}, \\ \text{(c)} \quad & H_n(x) = (-1)^x e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} \end{aligned}$$

Petunjuk: (b)  $G(x, t) = e^{-t^2+2xt} = e^{x^2-(t-x)^2} = e^{x^2} e^{-(t-x)^2}$

$$\text{(c)} \quad e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(t-x)^2} = (-1)^x e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-(t-x)^2}.$$

11. Gunakan ekspresi deret fungsi Bessel

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k},$$

untuk membuktikan

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & J_0(0) = 1; \quad J_n(0) = 0 \text{ untuk } n = 1, 2, 3, \dots, \\ \text{(b)} \quad & J_0'(x) = -J_1(x). \end{aligned}$$

12. Misalkan  $\lambda_{nj}$  adalah akar ke- $j$  dari  $J_n(\lambda c)$ , dengan  $c = 2$ . Carilah  $\lambda_{01}, \lambda_{12}, \lambda_{23}$  dengan menggunakan tabel.

Jawab: 1.2024, 3.5078, 5.8099.

13. Buktikan bahwa

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^c J_0(\lambda r) r \, dr = \frac{c}{\lambda} J_1(\lambda c). \\ \text{(b)} \quad & \int_0^1 J_1(\lambda r) \, dr = \frac{1}{\lambda} \text{ jika } J_0(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Petunjuk: (a) Gunakan (4.32). (b) Gunakan (4.36).

14. Buktikan bahwa

$$J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = 1.$$

Petunjuk: Gunakan fungsi pembangkit.

15. Selesaikan

$$y''(x) + y(x) = 0$$

dengan substitusi  $y = \sqrt{x}u$  dan menyelesaikan persamaan Bessel yang dihasilkan. Tunjukkan bahwa solusinya ekuivalen dengan

$$y(x) = A \sin x + B \cos x.$$

16. (a) Tunjukkan bahwa persamaan yang berbentuk

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (ax^\beta)^2 y - b^2 y = 0$$

ditransformasikan dalam persamaan Bessel

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + z^2 y - \left(\frac{b}{\beta}\right)^2 y = 0$$

dengan mengganti variabel

$$z = \frac{ax^\beta}{\beta}.$$

- (b) Selesaikan

$$x^2 y'' + xy' + 4x^4 y - 16y = 0.$$

Jawab: (b)  $y(x) = c_1 J_2(x^2) + c_2 N_2(x^2)$ .

17. Selesaikan

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + x^2 y(x) = 0.$$

Petunjuk: Misalkan  $y(x) = x^\alpha u(x)$  dan tunjukkan persamaannya menjadi

$$x^2 u'' + (2\alpha - 1)xu' + [x^2 + (\alpha^2 - 2\alpha)]u = 0,$$

dan kemudian pilih  $\alpha = 1$ .

Jawab.  $y(x) = x [c_1 J_1(x) + c_2 N_1(x)]$ .

18. Gunakan rumus Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

untuk mendapatkan ekspansi deret polinomial Legendre berikut

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^k l!}{k!(l-k)!} \frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} x^{l-2k},$$

dengan  $[l/2] = l/2$  jika  $l$  genap dan  $[l/2] = (l-1)/2$  jika  $l$  ganjil. Tunjukkan bahwa

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, \quad P_{2n+1}(0) = 0.$$

19. Gunakan fungsi pembangkit  $G(0, t)$  untuk mencari  $P_{2n}(0)$ .

Petunjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} &= 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \frac{3}{2} t^4 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{2n} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{n!} \frac{1}{2^n} t^{2n}, \end{aligned}$$

dengan  $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\dots 1$  dan

$$(2n-1)!! = (2n-1)!! \frac{(2n)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

20. Gunakan rumus Rodrigues untuk membuktikan

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

Kemudian buktikan bahwa

$$\int_x^1 P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1} [P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)]$$

21. Gunakan kenyataan bahwa  $P_n(x)$  dan  $P_m(x)$  memenuhi persamaan Legendre untuk membuktikan bahwa

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad \text{jika } n \neq m.$$

Petunjuk: Kalikan persamaan Legendre

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} P_m(x) \right] + m(m+1)P_m(x) = 0$$

dengan  $P_n(x)$ , kemudian integralkan secara parsial

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) \left[ \frac{d}{dx} P_m(x) \right] \frac{d}{dx} P_n(x) dx = m(m+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx.$$

Dengan cara serupa

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) \left[ \frac{d}{dx} P_n(x) \right] \frac{d}{dx} P_m(x) dx = n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx.$$

Kemudian dapatkan kesimpulan

$$[m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0.$$

22. Gunakan rumus Rodrigues untuk membuktikan

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Petunjuk: Pertama tunjukkan bahwa

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \left[ \frac{1}{2^n n!} \right]^2 \int_{-1}^1 d \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \right] \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n dx,$$

kemudian integralkan secara parsial berulang untuk membuktikan

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = (-1)^n \left[ \frac{1}{2^n n!} \right]^2 \int_{-1}^1 (x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2-1)^n dx.$$

Perhatikan bahwa  $(d^{2n}/dx^{2n})(x^2-1)^n = (2n)!$ , sehingga

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \left[ \frac{1}{2^n n!} \right]^2 (2n)! \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx.$$

Hitung integral pertama di ruas kanan dengan mengganti variabel  $x = \cos \theta$ . Pertama perhatikan

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx = \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta)^n d \cos \theta = \int_0^\pi (\sin \theta)^{2n+1} d\theta,$$

kemudian buktikan bahwa

$$(2n + 1) \int_0^\pi (\sin \theta)^{2n+1} d\theta = 2n \int_0^\pi (\sin \theta)^{2n-1} d\theta,$$

dari integral parsial berulang

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta)^n d \cos \theta &= \int_{-1}^1 (\sin \theta)^{2n} d \cos \theta = - \int_\pi^0 \cos \theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta)^{2n} d\theta \\ &= 2n \int_0^\pi (\sin \theta)^{2n-1} d\theta - 2n \int_0^\pi (\sin \theta)^{2n+1} d\theta. \end{aligned}$$

Terakhir dapatkan hasilnya dari

$$\int_0^\pi (\sin \theta)^{2n+1} d\theta = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2 \frac{[2^n n!]^2}{(2n+1)!}.$$

23. Jika

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases},$$

Buktikan bahwa  $f(x)$  dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)}{(4n+4)} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} P_{2n+1}(x).$$

Petunjuk: Buktikan bahwa

$$f(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)] P_{2n+1}(x).$$

24. Buktikan bahwa

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_{-1}^1 x P_n(x) P_m(x) dx &= \begin{cases} \frac{2(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} & \text{jika } m = n+1 \\ \frac{2n}{(2n-1)(2n+1)} & \text{jika } m = n-1, \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \\ \text{(b)} \quad \int_{-1}^1 x^2 P_n(x) P_m(x) dx &= \begin{cases} \frac{2(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} & \text{jika } m = n+2 \\ \frac{2(2n^2+2n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} & \text{jika } m = n \\ \frac{2n(n-1)}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} & \text{jika } m = n-2 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}. \end{aligned}$$



Petunjuk: Gunakan (4.87).

25. Buktikan jika  $P_l^{-m}(x)$  dan  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  terdefinisi sebagai

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

dan

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad \text{untuk } -l \leq m \leq l,$$

maka  $Y_l^{-m}(\theta, \varphi)$  dari rumus terakhir adalah sama dengan

$$Y_l^{-|m|}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[ Y_l^{|m|}(\theta, \varphi) \right]^*,$$

yang didefinisikan pada (4.101).



# III

## Persamaan Diferensial Parsial



# Persamaan Diferensial Parsial dalam Koordinat Cartesian

Sebuah persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan parsial dari sebuah fungsi yang tidak diketahui dari dua atau lebih variabel independen disebut persamaan diferensial parsial. Dibandingkan dengan persamaan diferensial biasa, persoalan yang jauh lebih dalam ilmu fisis mengarah pada persamaan diferensial parsial. Pada kenyataannya, sebagian besar matematika fisika sepakat dengan persamaan diferensial parsial.

Secara umum, solusi keseluruhan dari persamaan diferensial parsial sangat luas. Namun, solusi unik dari persamaan diferensial parsial sesuai dengan persoalan fisis yang diberikan biasanya dapat diperoleh dengan menggunakan baik syarat batas dan/atau kondisi awal. Dalam prakteknya, kondisi batas sering berfungsi sebagai panduan dalam memilih bentuk tertentu dari solusi, yang memenuhi persamaan diferensial parsial serta syarat batas.

Bidang persamaan diferensial parsial sangat luas. Kita akan memusatkan perhatian kita pada persamaan yang paling sering dijumpai dalam fisika, yaitu

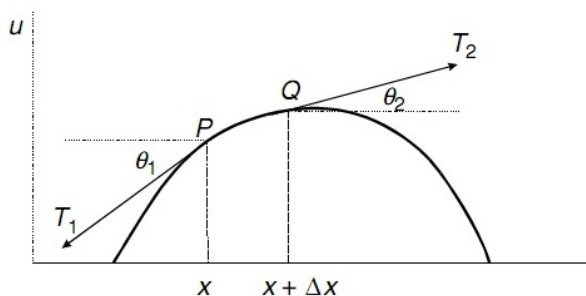
$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{Persamaan Gelombang}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \text{Persamaan Difusi}$$

$$\nabla^2 u = 0, \quad \text{Persamaan Laplace,}$$

dengan  $\nabla^2$  adalah operator

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$



Gambar 5.1: Sebuah getaran senar pada waktu  $t$ .

Persamaan Schrödinger dalam mekanika kuantum juga memiliki bentuk yang sama kecuali itu sebuah bilangan imajiner melekat pada turunan waktu.

Dalam bab ini kita hanya membahas persoalan-persoalan dalam koordinat Cartesien. Persoalan dengan syarat batas lengkung (koordinat silinder dan bola) akan dibahas dalam Bab 6.

Hal yang menakjubkan adalah bahwa ada banyak persoalan yang secara fisis tidak berhubungan, tetapi mereka dapat dijelaskan oleh persamaan diferensial parsial yang sama atau yang sangat mirip.

## 5.1 Persamaan Gelombang Satu Dimensi

### 5.1.1 Persamaan untuk Getaran Dawai

Sebagai contoh, kita akan memperoleh persamaan yang mengatur getaran kecil sebuah dawai yang elastik dengan panjang  $L$ , tetap pada kedua titik ujung. Variabel terikat  $u(x, t)$  menyatakan, pada waktu  $t$ , perpindahan dari titik dawai itu pada jarak sejauh  $x$  dari titik ujung pertama 0.

Kita akan mengasumsikan dawai adalah homogen, yaitu, massa dari dawai per satuan panjang, dinotasikan sebagai  $\rho$ , adalah sebuah konstanta. Kita juga akan mengasumsikan bahwa dawai hanya mengalami perpindahan vertikal kecil dari posisi kesetimbangan. (Perpindahan tidak harus berada dalam arah vertikal, tapi dalam hal ini, kita asumsikannya seperti itu). Mari kita memperhatikan segmen dawai antara  $x$  dan  $x + \Delta x$ , dengan  $\Delta x$  adalah sebuah kenaikan kecil, seperti yang terlihat pada Gambar 5.1. Besaran  $T_1$  dan  $T_2$  dalam gambar adalah tegangan pada titik P dan Q dari dawai.  $T_1$  dan  $T_2$  adalah tangensial/menyingsung terhadap kurva yang muncul. Karena tidak ada gerakan horizontal dari dawai, maka gaya total horizontal yang bekerja pada segmen harus nol. Dengan kata lain, komponen horizontal dari tegangan

pada P dan Q harus sama dan berlawanan arah. Yaitu

$$T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 = T, \quad (5.1)$$

dengan  $T$  adalah sebuah konstanta yang sama dengan gaya horizontal pada dawai teregang. Jika amplitudo kecil, kita dapat menganggap  $T$  sebagai tegangan dari dawai.

Ada gaya total yang bekerja dalam arah vertikal,  $F_u$ , yang menyebabkan gerakan vertikal dari dawai. Jelas bahwa

$$F_u = T_2 \sin \theta_2 - T_1 \sin \theta_1.$$

Menurut hukum kedua Newton, gaya ini adalah sama dengan massa segmen,  $\rho \Delta x$ , dikalikan percepatan yang merupakan turunan kedua dari perpindahan terhadap waktu. Yaitu

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Bagi persamaan di atas dengan  $T$  dan gunakan (5.1), kita memperoleh

$$\frac{T_2 \sin \theta_2}{T_2 \cos \theta_2} - \frac{T_1 \sin \theta_1}{T_1 \cos \theta_1} = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

jika disederhanakan menjadi

$$\tan \theta_2 - \tan \theta_1 = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.2)$$

Tetapi  $\tan \theta_2$  dan  $\tan \theta_1$  adalah kemiringan kurva dawai pada  $x + \Delta x$  dan  $x$ , yaitu

$$\begin{aligned} \tan \theta_2 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}, \\ \tan \theta_1 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x. \end{aligned}$$

Oleh karena itu (5.2) bisa ditulis

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.3)$$

Mengingat definisi turunan

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Jika dipahami bahwa  $\Delta x$  mendekati nol meskipun tanpa tanda limit, maka kita dapat menuliskan

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \frac{dF}{dx} \Delta x.$$

Sehingga jelas bahwa

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x.$$

Oleh karena itu (5.3) menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5.4)$$

Ini dinamakan sebagai persamaan gelombang 1 dimensi. Kita melihat persamaan linear, homogen dan orde kedua.

Jika dawai kedua ujungnya tetap, kita memiliki dua syarat batas

$$\text{S. B. : } u(0, t) = 0; u(L, t) = 0.$$

Selanjutnya, jika awalnya dawai dipindahkan ke posisi  $u = f(x)$  dan dilepaskan pada saat diam (kecepatannya nol) dari posisi itu, maka kita memiliki kondisi awal sebagai berikut:

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = f(x); u_t(x, 0) = 0$$

dengan  $u_t(x, 0)$  menunjukkan turunan pertama parsial dari  $u(x, t)$  terhadap  $t$  dan kemudian dihitung pada  $t = 0$

$$u_t(x, 0) = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Syarat pertama menyatakan bahwa bentuk awal dawai adalah  $f(x)$ , syarat kedua hanya mengatakan bahwa pada saat  $t = 0$ , kecepatan di setiap titik pada dawai adalah nol. Tentu saja ada kemungkinan bahwa dawai juga memiliki kecepatan awal. Dalam kasus itu, kondisi awal menjadi

$$u(x, 0) = f(x); u_t(x, 0) = g(x).$$

### 5.1.2 Separasi Variabel

Untuk menggambarkan gerakan dari dawai, kita harus memecahkan persamaan diferensial dan solusinya harus memenuhi syarat batas dan kondisi awal. Secara khusus mari kita cari rumus untuk perpindahan transversal  $u(x, t)$  dari dawai yang terbentang memenuhi (5.4). Untuk menyederhanakan penulisan, mari kita definisikan

$$a^2 = \frac{T}{\rho}. \quad (5.5)$$

Besaran  $a$  memiliki arti fisis yang nanti akan menjadi jelas.

Sebuah metode klasik dan kuat memecahkan persoalan nilai batas linear persamaan diferensial parsial adalah metode separasi (pemisahan) variabel yang mengubah persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa. Meskipun tidak semua persoalan bisa diselesaikan dengan metode ini dan tentu terdapat metode lain, umumnya pemisahan variabel adalah metode pertama yang harus kita uji.



Mari kita pecahkan persoalan matematika berikut ini:

$$\text{P. D. : } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (5.6)$$

$$\text{S. B. : } u(0, t) = 0; \quad u(L, t) = 0, \quad (5.7)$$

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = f(x); \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (5.8)$$

Asumsi dari pemisahan variabel adalah kita dapat menuliskan  $u(x, t)$  sebagai

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

dengan  $X$  adalah sebuah fungsi dari  $x$  sendiri dan  $T$  adalah sebuah fungsi dari  $t$  sendiri. Pembeneran asumsi dari metode ini adalah hal ini berlaku. Mengikuti asumsi ini, bahwa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left( \frac{d^2}{dx^2} X(x) \right) T(t) = X''(x)T(t), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= X(x) \left( \frac{d^2}{dt^2} T(t) \right) = X(x)T''(t). \end{aligned}$$

Maka (5.6) menjadi

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{a^2} X(x)T''(t).$$

Kedua ruas dibagi dengan  $X(x)T(t)$

$$\frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)} = \frac{1}{a^2} \frac{X(x)T''(t)}{X(x)T(t)},$$

kita dapatkan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Ruas kiri persamaan ini hanyalah fungsi dari  $x$  saja, persamaan ini tidak berubah terhadap  $t$ . Tetapi, persamaan ini sama dengan sebuah fungsi yang tidak berubah terhadap  $x$ . Hal ini mungkin jika dan hanya jika dua ruas sama dengan sebuah konstanta umum  $\alpha$ . Sehingga kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= \alpha, \\ \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} &= \alpha. \end{aligned}$$

Mengikuti hal ini:

$$X''(x) = \alpha X(x) \quad (5.9)$$

$$T''(t) = \alpha a^2 T(t). \quad (5.10)$$

Persamaan diferensial parsial sekarang sudah terdekomposisi menjadi dua buah persamaan diferensial biasa.

### Nilai Eigen dan Fungsi Eigen

Jika  $u(x, t)$  memenuhi syarat batas pertama, maka

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0$$

untuk semua  $t$ . Karena  $T(t)$  berubah terhadap  $t$ , satu-satunya kemungkinan bahwa hal ini benar adalah

$$X(0) = 0.$$

Dengan cara yang sama, syarat  $U(L, t) = 0$  memberikan

$$X(L) = 0.$$

Sejauh ini kita belum menspesifikasi nilai dari konstanta separasi  $\alpha$ , nilainya dapat lebih kecil dari nol, sama dengan nol, juga lebih besar dari nol. Mudah untuk dibuktikan, jika  $\alpha = 0$ , maka tidak ada solusi yang memenuhi syarat batas.

Pertama jika  $\alpha = 0$ , solusi dari (5.9) adalah  $X(x) = Ax + B$ . Dalam kasus ini  $X(0) = 0$  mengharuskan  $B = 0$ . Sehingga,  $X(L) = AL$ . Karena  $X(L) = 0$ , maka  $A = 0$ . Maka  $X(x) = 0$  yang merupakan solusi trivial untuk kasus  $u$  yang identik sama dengan nol untuk semua  $x$  dan  $t$ .

Ketika  $\alpha > 0$ , marilah kita tuliskan  $\alpha = \mu^2$  dengan  $\mu$  riil. Maka solusi dari  $X(x) = \mu^2 X(x)$  adalah  $X(x) = C \cosh \mu x + D \sin \mu x$ . Dengan  $X(0) = 0$ ,  $C$  haruslah sama dengan nol. Diperoleh  $X(x) = D \sinh \mu x$ . Karena  $\sinh \mu L = 0$ ,  $X(L) = 0$  yang mengharuskan  $D = 0$ . Hal ini juga memberikan solusi trivial.

Sehingga  $\alpha$  haruslah kurang dari nol. Marilah kita tuliskan  $\alpha = -\mu^2$ , sehingga (5.9) menjadi

$$X''(x) = -\mu^2 X(x).$$

Solusi umum dari persamaan ini adalah

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x.$$

Maka  $X(0) = A$  dan kondisi  $X(0) = 0$  berarti  $A = 0$ . Sehingga yang tersisa untuk kita adalah

$$X(x) = B \sin \mu x.$$

Untuk memenuhi kondisi  $X(L) = 0$ ,  $\mu$  haruslah dipilih

$$\mu = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sehingga, untuk tiap  $n$ , terdapat sebuah solusi  $X_n(x)$

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

dengan  $B_n$  konstanta sebarang. Angka  $\alpha = -n^2\pi^2/L^2$  sehingga persoalan ini bukan merupakan solusi trivial disebut sebagai nilai eigen dan fungsi yang berkaitan (5.11) disebut sebagai fungsi eigen.

*Solusi Persamaan.* Penting untuk diingat bahwa  $\alpha$  pada (5.9) dan (5.10) haruslah sama. Ketika  $\alpha = -n^2\pi^2/L^2$ , (5.9) adalah sebuah persoalan berbeda untuk tiap bilangan bulat positif  $n$  yang berbeda. Untuk sebuah bilangan bulat  $n$  yang tetap, (5.10) menjadi

$$T_n''(t) = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}a^2T_n(t).$$

Solusi untuk persamaan ini adalah

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi a}{L}t + D_n \sin \frac{n\pi a}{L}t.$$

Maka, tiap

$$U_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$$

merupakan solusi persamaan diferensial. Sebuah teorema penting dari persamaan diferensial parsial homogen adalah prinsip superposisi. Jika  $u_1$  dan  $u_2$  adalah persamaan diferensial linier homogen, maka

$$u = c_1u_1 + c_2u_2,$$

dengan  $c_1$  dan  $c_2$  merupakan konstanta sebarang, juga merupakan solusi dari persamaan tersebut. Teorema ini dapat dengan mudah dibuktikan dengan menunjukkan persamaan tersebut dipenuhi dengan kombinasi sebagai solusi.

Sehingga solusi umumnya diberikan oleh

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi a}{L}t + b_n \sin \frac{n\pi a}{L}t \right) \sin \frac{n\pi}{L}x. \end{aligned} \quad (5.12)$$

di sini kita telah mengkombinasikan tiga buah konstanta sebarang  $c_n C_n B_n$  menjadi sebuah konstanta  $a_n$  dan  $c_n D_n B_n$  menjadi  $b_n$ . Sekarang koefisien  $a_n$  dan  $b_n$  dapat dipilih sedemikian rupa sehingga memenuhi kondisi awal.

Salah satu kondisi awal adalah

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{d}{dt} \left( a_n \cos \frac{n\pi a}{L}t + b_n \sin \frac{n\pi a}{L}t \right) \right]_{t=0} \sin \frac{n\pi}{L}x = 0,$$

yang memberikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi}{L}x = 0.$$

Karena  $\sin(n\pi/L)x$  merupakan himpunan lengkap pada selang  $0 \leq x \leq L$ , semua koefisien haruslah nol. Cara lain untuk melihat bahwa semua  $b_n$  nol adalah sebagai berikut. Persamaan ini adalah deret Fourier sinus untuk nol. Koefisiennya merupakan perkalian nol dengan sebuah fungsi sinus. Jelaslah bahwa hasilnya nol. Maka

$$b_n = 0.$$

Kita memiliki

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi a}{L} t, \quad (5.13)$$

dengan koefisien  $a_n$  dipilih sedemikian rupa untuk memenuhi kondisi awal yang lain.

Karena  $u(x, 0) = f(x)$ , mengikuti persamaan terakhir

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x).$$

Persamaan ini adalah deret Fourier sinus setengah selang  $f(x)$  antara 0 dan  $L$ . Sehingga  $a_n$  diberikan oleh koefisien Fourier

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Maka solusi persoalan ini adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L f(x') \sin \frac{n\pi x'}{L} dx' \right] \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi a}{L} t. \quad (5.14)$$

**Contoh 5.1.1.** Sebuah senar gitar sepanjang  $L$  ditarik ke atas di tengahnya sehingga memiliki ketinggian  $h$ . Bagaimanakah gerak senar/dawai tersebut jika dilepaskan dari keadaan diamnya?

**Solusi 5.1.1.** Untuk mencari gerak sebagai akibat berarti kita perlu mencari perpindahan senar sebagai fungsi dari  $t$ . Hal ini berarti kita perlu mencari  $u(x, t)$  dari persamaan

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Karena ujung kedua senar gitar ini tetap, kita harus memenuhi syarat batas

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

Bentuk awal senar diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x & \text{untuk } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{2h}{L}(L-x) & \text{untuk } \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Karena senarnya dilepaskan dari keadaan diam, maka kecepatan awal senar di tiap titik adalah nol. Hal ini berarti turunan  $u(x, t)$  terhadap waktu pada  $t = 0$  adalah nol. Maka kondisi awalnya adalah

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Menurut (5.14),  $u(x, t)$  diberikan oleh

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi a}{L} t,$$

dengan

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{2h}{L} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \frac{2h}{L} (L-x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{8h}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

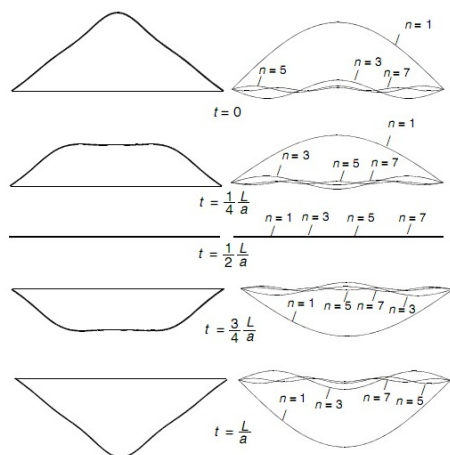
Sehingga

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{8h}{n^2 \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi a}{L} t \\ &= \frac{8h}{n^2 \pi^2} \left( \sin \frac{\pi}{L} x \cos \frac{\pi a}{L} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{L} x \cos \frac{3\pi a}{L} t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{L} x \cos \frac{5\pi a}{L} t - \frac{1}{7^2} \sin \frac{7\pi}{L} x \cos \frac{7\pi a}{L} t + \dots \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Menarik untuk melihat perpindahan sebagai fungsi waktu. Bentuk senar pada berbagai waktu diperlihatkan pada kolom sebelah kiri Gambar 5.2. Komponen individu diperlihatkan kolom sebelah kanan pada gambar yang sama. Senar berosilasi ke atas dan bawah seperti yang diperkirakan. Kita telah menunjukkan posisi senar pada setengah siklusnya. Setelah itu senar akan kembali pada posisi awalnya dan mengulangi gerakannya. Dalam selang waktu setengah siklusnya, frekuensi dasar (suku pertama dari deret,  $\sin(\pi x/L) \cos(\pi at/L)$ ) juga menyelesaikan setengah siklusnya. Frekuensi harmonik ketiga (suku tak nol kedua  $\sin(3\pi x/L) \cos(3\pi at/L)$ ) telah berosilasi sebanyak satu setengah kali, keduanya dijumlahkan menjadi sebuah osilasi pada kolom sebelah kiri. Sebenarnya kita hanya menjumlahkan empat buah suku tak nol, sehingga garis untuk bentuk senar sebenarnya melengkung dan titik sudutnya melingkar. Jika kita gunakan komputer untuk menggambar

$$\frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi a}{L} t,$$

Dengan  $N = 50$ , maka semua garis pada kolom sebelah kiri akan lurus dan titik sudutnya akan jelas menjadi titik. Amplitudo komponen yang lebih tinggi sangat



Gambar 5.2: Perpindahan senar bergantung waktu setelah titik tengahnya ditarik ke atas sampai ketinggian  $h$  dan dilepaskan dari posisi tersebut. Kolom sebelah kiri adalah bentuk senar pada berbagai waktu yang didapatkan dengan menjumlahkan empat buah suku tak nol pertama dari (5.15). Kolom sebelah kanan merupakan posisi dari empat buah suku dari deret pada waktu yang sama. Meskipun komponen berbeda beresilasi pada frekuensi yang berbeda, komponen ini dijumlahkan sehingga senar bergerak naik turun seperti yang diharapkan. Terlihat bahwa suku pertama (frekuensi dasar) mendominasi gerak.

kecil, tetapi membuat penjumlahan konvergen pada nilai sebenarnya. Terlihat di sini, frekuensi dasar mendominasi gerak.

### 5.1.3 Gelombang Berdiri

Untuk interpretasi fisis deret (5.14), marilah kita anggap bahwa senar tiba-tiba dilepaskan dari posisi  $u(x, 0) = \sin(2\pi/L)x$ . Dalam kasus ini koefisiennya diberikan oleh

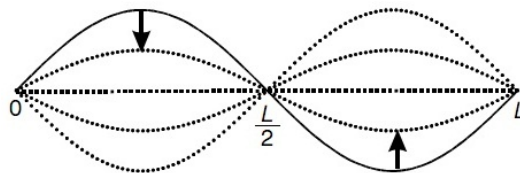
$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 1 & n = 2, \\ 0 & n \neq 2. \end{cases}$$

Perpindahan senarnya adalah

$$u(x, t) = \sin \frac{2\pi}{L} x \cos \frac{2\pi a}{L} t.$$

Gerak ini ditunjukkan pada Gambar 5.3. Pada waktu singkat,  $u(x, t)$  berupa kurva sinus murni

$$u(x, t) = A_2(t) \sin \frac{2\pi}{L} x,$$



Gambar 5.3: Gelombang berdiri dari  $\sin(2\pi/L)x \cos(2\pi a/L)t$ .

dengan  $A_2(t)$  adalah amplitudo gelombang sinus dan  $A_2(t) = \cos(2\pi a/L)t$ . Perhatikan bahwa titik-titik pada  $x = 0$ ,  $x = L/2$  dan  $x = L$  tetap untuk semua waktu. Titik-titik ini dinamakan simpul. Antara titik-titik simpul, senar berosilasi ke atas dan ke bawah. Gerak seperti ini disebut sebagai gelombang berdiri

Secara umum (5.13) dapat dianggap sebagai

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t), \quad (5.16)$$

dengan

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi a}{L} t$$

dikenal sebagai mode normal ke- $n$ . Salah satu karakteristik sebuah mode normal adalah ketika senar bergetar dalam gelombang berdiri dalam mode tersebut, senar akan terus bergetar dalam mode tersebut selamanya. Tentu, jika terdapat redaman, amplitudonya akan mengecil.

Kebergantungan tiap mode normal terhadap waktu diberikan oleh  $\cos(n\pi a t/L)$  yang merupakan fungsi periodik. Periode didefinisikan setelah selang waktu ketika fungsinya kembali pada nilai asalnya. Misalkan  $P_n$  adalah periode, maka

$$\cos \frac{n\pi a}{L} (t + P_n) = \cos \frac{n\pi a}{L} t. \quad (5.17)$$

Karena

$$\cos \frac{n\pi a}{L} (t + P_n) = \cos \left( \frac{n\pi a}{L} t + \frac{n\pi a}{L} P_n \right)$$

jelaslah

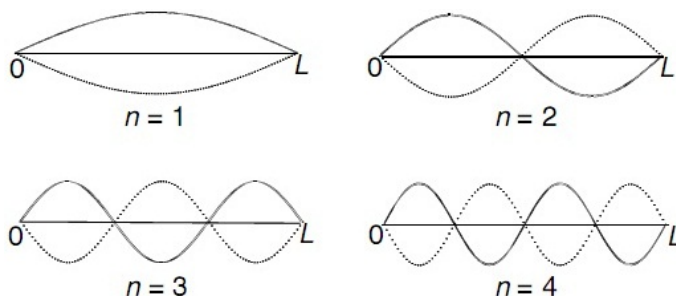
$$\frac{n\pi a}{L} P_n = 2\pi.$$

Sehingga

$$P_n = \frac{2L}{na}.$$

Frekuensi  $\nu_n$  didefinisikan sebagai jumlah osilasi dalam satu detik (satuan frekuensi adalah Hertz, Hz), yaitu

$$\nu_n = \frac{1}{P_n} = \frac{na}{2L}.$$



Gambar 5.4: Empat buah mode normal pertama dari senar yang bergetar. Tiap mode normal merupakan gelombang berdiri. Mode normal ke- $n$  memiliki simpul  $n - 1$ , tanpa simpul pada dua buah titik akhir.

Sehingga deret (5.16) merepresentasikan gerak senar (dalam violin atau gitar) sebagai superposisi mode normal tak hingga, yang masing-masing bergetar dengan frekuensi berbeda. Frekuensi paling rendahnya

$$\nu_1 = \frac{a}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

disebut sebagai frekuensi dasar. Di sini, kita telah menggunakan definisi yang diberikan (5.5). Frekuensi dasar biasanya mendominasi suara yang kita dengar. Frekuensi  $\nu_n = n\nu_1$ , dari nada atas atau nada harmonik ke- $n$  merupakan perkalian bulat dari  $\nu_1$ .

Perhatikan bahwa ketika  $L$ ,  $T$ ,  $\rho$  dipilih, frekuensi dasar tetap. Kondisi awal tidak mempengaruhi  $\nu_1$ , tetapi, menentukan koefisien pada (5.14) dan tingkat frekuensi harmonik yang lebih tinggi berkontribusi pada suara yang dihasilkan. Sehingga, kondisi awal berpengaruh pada pencampuran frekuensi (disebut timbre), dibandingkan pada frekuensi dasar. Sebagai contoh, jika senar sebuah violin diikat simpul pada titik lain bukan pada pusatnya, amplitudo harmonik yang lebih tinggi akan berbeda dengan yang ditunjukkan pada Gambar 5.2. Dengan memilih titik secara tepat harmonik yang kita inginkan akan diperkuat atau dihilangkan, sebuah hal yang dimengerti dengan baik oleh musisi. Ketika instrumen musik dibuat, panjang senar  $L$  dan rapat massa  $\rho$  tidak dapat diubah. Maka penyetelan nada dilakukan dengan mengubah tegangan  $T$ .

Kebergantungan spasial (ruang) dari beberapa mode normal pertama ditunjukkan Gambar 5.4. Mode pertama ( $n = 1$ ) disebut sebagai mode dasar, merepresentasikan sebuah frekuensi harmonik yang bergantung waktu  $a/2L$ . Frekuensi harmonik kedua atau nada atas pertama ( $n = 2$ ) bergetar harmonik dengan frekuensi  $a/L$ , dua kali lebih cepat dibandingkan mode dasar. Geraknya juga digambarkan pada Gambar 5.4. Perhatikan bahwa, sebagai tambahan untuk dua buah titik akhir, titik tengah



harmonik ini adalah titik simpul. Dengan cara yang sama, harmonik ketiga ( $n = 3$ ) dan keempat ( $n = 4$ ) masing-masing memiliki dua dan tiga titik simpul.

Dalam mendeskripsikan frekuensi osilasi, frekuensi sudut  $\omega_n$  (radian per detik) biasanya digunakan

$$\omega_n = 2\pi\nu_n = \frac{\pi na}{L}.$$

Kuantitas lain yang berkaitan dengan gerak gelombang adalah panjang gelombang. Panjang gelombang  $\lambda_n$  didefinisikan sehingga  $u_n(x, t)$  akan kembali pada nilai semula jika  $x$  naik sebesar  $\lambda_n$ , yaitu

$$u_n(x + \lambda_n, t_0) = u_n(x, t_0) \quad (5.18)$$

Karena

$$\begin{aligned} u_n(x + \lambda_n, t_0) &= \sin\left(\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi}{L}\lambda_n\right) \cos\frac{n\pi a}{L}t_0; \\ u_n(x, t_0) &= \sin\frac{n\pi}{L}x \cos\frac{n\pi a}{L}t_0 \end{aligned}$$

jelas bahwa (5.18) terpenuhi jika

$$\frac{n\pi}{L}\lambda_n = 2\pi.$$

Sehingga

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}. \quad (5.19)$$

Maka untuk  $n = 1, L = \frac{1}{2}\lambda; n = 2, L = \lambda; n = 3, L = \frac{3}{2}\lambda, n = 4, L = 2\lambda$ . Hubungan ini jelas terlihat pada Gambar 5.4. Sehingga jarak antara dua simpul berdekatan adalah setengah panjang gelombang.

Sering sebuah kuantitas yang dikenal sebagai bilangan gelombang  $k_n$  (jumlah panjang gelombang dalam selang  $2\pi$ )

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} \quad (5.20)$$

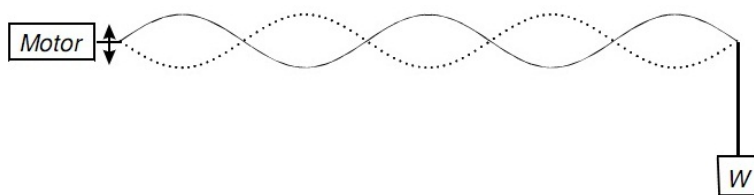
digunakan untuk mendeskripsikan bentuk gelombang. Dalam notasi ini, mode normal  $u_n(x, t)$  dituliskan sebagai

$$u_n(x, t) = \sin k_n x \cos \omega_n t. \quad (5.21)$$

Hubungan sangat penting antara frekuensi dan panjang gelombang adalah

$$\nu_n \lambda_n = \frac{na}{2L} \frac{2L}{n} = a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (5.22)$$

Hubungan ini mengatakan bahwa frekuensi berbanding terbalik dengan panjang gelombang dan konstanta kesebandingannya sama dengan akar kuadrat dari tegangan



Gambar 5.5: Percobaan gelombang berdiri untuk memverifikasi hubungan antara panjang gelombang dengan frekuensi.

dibagi rapat massa. Eksperimen fisika standar ditunjukkan pada Gambar 5.5. Sebuah senar dengan rapat massa  $\rho$  dan tegangan  $T$  dihubungkan dengan vibrator, alat yang frekuensinya bisa divariasikan. Pola gelombang berdiri akan muncul untuk nilai frekuensi diskrit tertentu. Panjang gelombang tiap gelombang berdiri dapat diukur. Setelah beberapa gelombang berdiri dengan frekuensi berbeda diukur kita dapat membuat grafik frekuensi terhadap satu per panjang gelombang. Kurvanya akan berupa garis lurus dan kemiringannya sama dengan  $\sqrt{T/\rho}$ .

Ini bukan hanya demonstrasi prinsip fisika, tetapi juga demonstrasi dari kekuatan analisis. Kita telah menggunakan hukum Newton, yang menghubungkan antara gaya dengan percepatan partikel dengan gerak senar melalui penggunaan kalkulus dan menyimpulkan bahwa frekuensi dan panjang gelombang harus memenuhi hubungan (5.22). Hal ini telah anda lakukan dalam laboratorium pada mata kuliah Fisika Dasar.

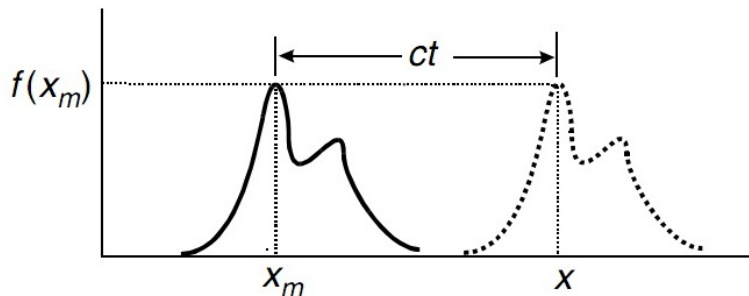
Jika gelombang merambat pada garis tak hingga, kita dapat berfikir bahwa frekuensi adalah jumlah siklus gelombang yang dibangkitkan tiap detik dan masing-masing memperpanjang sebuah jarak satu gelombang, sehingga  $\nu_n \lambda_n = a$  adalah jarak yang ditempuh gelombang dalam satu detik. Dengan kata lain,  $a$  adalah kecepatan gelombang berjalan. Hal ini adalah kasus yang akan kita lihat dalam Subbab 5.1.4 berikut.

### 5.1.4 Gelombang Berjalan

Dalam Subbab 5.1.3 kita telah mempelajari tiap mode normal adalah gelombang berdiri. Sekarang kita ingin menunjukkan bahwa mode normal yang sama dapat dianggap sebagai sebuah superposisi dua buah gelombang berjalan dalam arah yang berlawanan.

Dengan menggunakan identitas trigonometri

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)],$$



Gambar 5.6: Gelombang berjalan. Kurva penuh menunjukkan seperti apa fungsi  $f(x - ct)$  pada  $t = 0$ , kurva putus-putus menunjukkan fungsi pada waktu  $t$  setelah itu.

kita dapat menuliskan (5.21) sebagai

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= \frac{1}{2} \sin(k_n x + \omega_n t) + \frac{1}{2} \sin(k_n x - \omega_n t) \\ &= \frac{1}{2} \sin[k_n(x + at)] + \frac{1}{2} \sin[k_n(x - at)], \end{aligned} \quad (5.23)$$

dengan menggunakan

$$\frac{\omega_n}{k_n} = \nu_n \lambda_n = a.$$

Sebelum kita membicarakan interpretasi (5.23), marilah pertama kita perhatikan perilaku fungsi  $f(x - ct)$ . Dalam fungsi ini, variabel  $x$  dan  $t$  dikombinasikan dengan cara tertentu dari  $x - ct$ . Anggap pada  $t = 0$ , fungsi  $f(x)$  seperti kurva penuh pada Gambar 5.6. Jika nilai maksimum fungsi  $f(x_m)$  adalah pada  $x = x_m$ , maka pada beberapa waktu  $t$  setelah itu, fungsi  $f(x - ct)$  akan mencapai maksimum yang sama pada  $x = x_m + ct$ . Hal ini berarti titik maksimum telah berpindah sejauh  $ct$  dalam selang waktu  $t$ . Kenyataannya, tidak sulit untuk melihat fungsi keseluruhan telah berpindah sejauh  $ct$  ke kanan pada selang waktu  $t$ , seperti terlihat pada kurva putus-putus dalam Gambar 5.6. Sehingga  $f(x - ct)$  merepresentasikan fungsi yang berpindah (tanpa mengubah bentuk fungsinya) ke kanan dengan kecepatan  $c$ . Dengan cara yang sama,  $f(x + ct)$  merepresentasikan fungsi yang bergerak ke kiri dengan kecepatan  $c$ .

Sekarang jelas bahwa  $\sin[k_n(x + at)]$  dan  $\sin[k_n(x - at)]$  dalam mode normal (5.23) adalah dua buah gelombang sinus yang merambat dalam arah berlawanan dengan kecepatan  $a$ . Menarik untuk menuliskan (5.13) dalam suku gelombang berjalan

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\sin k_n(x + at) + \sin k_n(x - at)]. \quad (5.24)$$

Karena pada saat  $t = 0$  senar bergeser sehingga berbentuk  $f(x)$

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x, \quad (5.25)$$

jelaslah

$$f(x + at) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n(x + at),$$

$$f(x - at) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n(x - at).$$

Maka

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x + at) + \frac{1}{2}f(x - at). \quad (5.26)$$

Dengan kata lain, ketika senar dilepaskan pada  $t = 0$  dari posisi tergesernya  $f(x)$ , senar akan terpisah menjadi dua bagian, satu bergerak ke kanan, satu lagi bergerak ke kiri dengan kecepatan  $a$  yang sama.

Tetapi terdapat sebuah pertanyaan tentang selang sehingga  $f(x)$  terdefinisi. Perpindahan awal  $f(x)$  terdefinisi antara 0 dan  $L$ . Tetapi sekarang argumennya adalah  $x + at$  atau  $x - at$ . Karena  $t$  dapat memiliki nilai berapapun, argumen bisa melewati selang antara 0 dan  $L$ . Agar (5.26) berlaku untuk semua  $t$ , kita harus memperbesar argumen fungsi melewati selang ini. Karena (5.26) diperoleh dari (5.25) dan  $\sin k_n x = \sin(n\pi/L)x$  yang merupakan fungsi ganjil periodik dengan periode  $2L$ , fungsi pada (5.26) juga harus memiliki sifat seperti ini. Sehingga kita notasikan  $f^*$  sebagai ekstensi periodik ganjil dari  $f$  dengan periode  $2L$ , selanjutnya

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f^*(x + at) + \frac{1}{2}f^*(x - at), \quad (5.27)$$

berlaku untuk semua  $t$ .

**Contoh 5.1.2.** Dengan interpretasi gelombang berjalan, selesaikan soal pada contoh sebelumnya dari senar yang ditarik pada tengahnya.

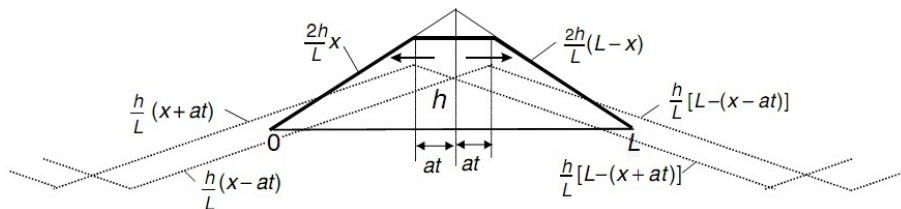
**Jawab 5.1.2.** Dengan pergeseran awal senar

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x & \text{jika } 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2h}{L}(L - x) & \text{jika } \frac{L}{2} < x < L \end{cases},$$

pergeseran  $u(x, t)$  diberikan oleh

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f^*(x + at) + \frac{1}{2}f^*(x - at)$$

Untuk menginterpretasi ekspresi ini, pertama kita bayangkan fungsi  $f(x)$  diperluas antisimetrik dari 0 sampai  $-L$ , kemudian diperluas periodik dari  $-\infty$  sampai  $\infty$  dengan periode  $2L$ . Kemudian setengah dari fungsi yang diperluas bergerak ke kanan dengan kecepatan  $a$  dan setengah yang lain ke kiri dengan kecepatan yang sama yang



Gambar 5.7: Interpretasi gelombang berjalan dari solusi persamaan gelombang dengan kondisi awal dan syarat batas. Perpindahan  $u(x, t)$  adalah jumlah dari setengah perluasan fungsi awal bergerak ke kiri dan kanan dengan kecepatan  $a$  yang sama.

ditunjukkan pada Gambar 5.7. Jumlah dari dua buah gelombang berjalan ini dalam daerah  $0 \leq x \leq L$  adalah pergeseran senar  $u(x, t)$ .

Sebagai sebuah konsekuensi, kita melihat untuk waktu sebarang  $t = T$ , untuk  $T \leq L/2a$ , perpindahannya

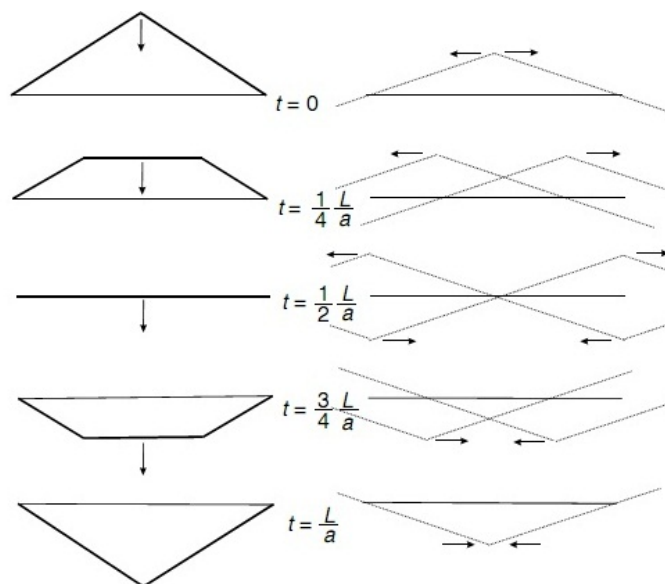
$$\begin{aligned} u(x, T) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2h}{L}(x + aT) + \frac{2h}{L}(x - aT) \right\} \\ &= \frac{2h}{L}x \quad \text{jika } 0 \leq x \leq \left( \frac{L}{2} - aT \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, T) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2h}{L}[L - (x + aT)] + \frac{2h}{L}(x - aT) \right\} \\ &= \frac{2h}{L} \left( \frac{L}{2} - aT \right) \quad \text{jika } \left( \frac{L}{2} - aT \right) \leq x \leq \left( \frac{L}{2} + aT \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, T) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{2h}{L}[L - (x + aT)] + \frac{2h}{L}[L - (x - aT)] \right\} \\ &= \frac{2h}{L}(L - x) \quad \text{jika } \left( \frac{L}{2} + aT \right) \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Hasil ini bisa dilihat pada Gambar 5.7.

Perpindahan  $u(x, t)$  sebagai fungsi waktu ditunjukkan Gambar 5.8. Pada kolom sebelah kiri, posisi senar ditunjukkan pada waktu  $t$  yang berbeda. Tiap kasus adalah superposisi dua buah gelombang berjalan, satu ke kiri dan satu ke kanan, ditunjukkan pada kolom sebelah kanan. Keduanya bergerak dengan kecepatan  $a$  yang sama. Jumlah dua buah gelombang berjalan ini membuat senar bergerak ke atas dan ke bawah. Menarik untuk membandingkan Gambar 5.8 dengan Gambar 5.2. Keduanya mendeskripsikan gerak yang sama dengan interpretasi berbeda.



Gambar 5.8: Grafik solusi senar bergetar dengan perpindahan awal  $u(x,0)$  ditunjukkan pada bagian atas kolom sebelah kiri. Pada waktu berbeda  $t$ , senar akan berada pada posisi seperti yang ditunjukkan kolom sebelah kiri. Posisi diperoleh sebagai superposisi sebuah gelombang berjalan ke kanan dan sebuah gelombang berjalan ke kiri yang ditunjukkan kolom sebelah kanan.

### Persoalan dengan Kecepatan Awal

Marilah kita perhatikan kasus senar yang awalnya diam tetapi memiliki kecepatan awal  $g(x)$ . Perpindahan senar adalah solusi persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } & \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \\ \text{S. B. : } & u(0,t) = 0; \quad u(L,t) = 0, \\ \text{K. A. : } & u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

Dengan separasi variabel, kita akan mendapatkan (5.12) seperti sebelumnya, karena persamaan diferensial dan syarat batas yang sama

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Kondisi awal  $u(x,0) = 0$  berarti bahwa

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x = 0.$$

Maka semua  $a_n$  nilainya haruslah nol. Sehingga

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \cos \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad (5.28)$$

Dari kondisi awal yang lain  $U_t(x, 0) = g(x)$  diperoleh

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x = g(x). \quad (5.29)$$

Deret ini adalah deret Fourier sinus, maka

$$b_n \frac{n\pi a}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

Sehingga solusinya,  $u(x, t)$ , diberikan oleh deret tak hingga

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x') \sin \frac{n\pi}{L} x' \, dx' \right] \sin \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Solusi ini dinyatakan dalam suku penjumlahan gelombang berdiri tak hingga. Kita dapat juga menyatakannya dalam suku penjumlahan dua buah gelombang berjalan. Dengan identitas trigonometrik

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)],$$

kita dapat menuliskan (5.28) sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \cos \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi}{L} (x + at) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi}{L} (x - at). \end{aligned}$$

Dengan (5.29), kita dapat menuliskannya sebagai

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = \frac{1}{2} g^*(x + at) + \frac{1}{2} g^*(x - at)$$

dengan  $g^*$  adalah ekstensi ganjil dari  $g$  berperiode  $2L$ , untuk alasan yang sama seperti  $f^*$  yang merupakan ekstensi periodik ganjil dari  $f$  berperiode  $2L$ .

Integrasi dari  $(\partial/\partial t)u(x, t)$  akan diperoleh  $u(x, t)$ , Konstanta integrasi ditentukan oleh kondisi awal  $u(x, 0) = 0$ . Syarat ini dipenuhi oleh integral berikut:

$$\frac{\partial u(x, t')}{\partial t'} \, dt' = \frac{1}{2} \int_0^t g^*(x + at') \, dt' + \frac{1}{2} \int_0^t g^*(x - at') \, dt'.$$

Dengan menggantikan variabel

$$\tau = x + at', \quad dt' = \frac{1}{a} d\tau,$$

integral pertama ruas kanan dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{2} \int_0^t g^*(x + at') dt' = \frac{1}{2a} \int_x^{x+at} g^*(\tau) d\tau,$$

karena pada  $t' = 0, \tau = x$  dan pada  $t' = t, \tau = x + at$ .

Serupa dengan hal ini, integral keduanya dapat dituliskan

$$\frac{1}{2} \int_0^t g^*(x - at') dt' = -\frac{1}{2a} \int_x^{x-at} g^*(\tau) d\tau.$$

Mangikuti hal ini:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_x^{x+at} g^*(\tau) d\tau - \frac{1}{2a} \int_x^{x-at} g^*(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g^*(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Persamaan ini adalah solusi senar tanpa perpindahan awal tetapi memiliki kecepatan awal  $g(x)$ .

### Superposisi Solusi

Jika senarnya memiliki perpindahan awal dan kecepatan awal

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (5.31)$$

maka perpindahan yang diakibatkan dapat dituliskan sebagai superposisi dari (5.27) dan (5.30), yaitu

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x - at) + f^*(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g^*(\tau) d\tau. \quad (5.32)$$

Perhatikan bahwa kedua suku memenuhi persamaan diferensial homogen dan syarat batas, sedangkan jumlahnya memenuhi kondisi awal (5.31).

Secara umum solusi dari persoalan linier yang memiliki lebih dari satu syarat tak homogen dapat dituliskan sebagai jumlah solusi persoalan yang hanya memiliki satu syarat batas saja. Cara melihat seperti ini, meskipun tidak harus, biasanya menyederhanakan proses penyelesaian.

### 5.1.5 Persamaan Gelombang Tak Homogen

#### Senar Bergetar dengan Gaya Luar

Jika terdapat gaya luar yang bekerja pada senar yang diregangkan, maka akan terdapat suku tambahan dalam persamaan diferensial pembangkit. Sebagai contoh, jika gaya



berat senar tidak diabaikan, maka dalam penurunan (5.4), kita harus menambahkan gaya gravitasi ke bawah  $-\rho\Delta xg$ , dengan  $g$  adalah percepatan gravitasi. Sebagai konsekuensinya (5.6) menjadi

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{g}{a^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (5.33)$$

Marilah kita selesaikan persamaan ini dengan syarat batas dan kondisi awal yang sama seperti persoalan sebelumnya:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, & u(L,t) &= 0, \\ u(x,0) &= f(x) & u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Karena (5.33) merupakan persamaan tak homogen, penggunaan langsung separasi variabel tidak bisa dilakukan. Tetapi, cara berikut akan mereduksi persamaan diferensial parsial tak homogen menjadi persamaan diferensial homogen ditambah sebuah persamaan diferensial biasa yang dapat kita selesaikan. Misalkan

$$u(x,t) = U(x,t) + \phi(x),$$

maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2}, \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

sehingga persoalannya menjadi

$$\begin{aligned} \text{P.D. : } & \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{g}{a^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \\ \text{S. B. : } & u(0,t) = U(0,t) + \phi(0) = 0, \quad u(L,t) = U(L,t) + \phi(L) = 0, \\ \text{K. A. : } & u(x,0) = U(x,0) + \phi(x) = f(x), \quad u_t(x,0) = U_t(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Sekarang kita mensyaratkan

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{g}{a^2} &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \quad \phi(L) = 0. \end{aligned}$$

Hal ini merupakan persamaan diferensial biasa orde dua dengan dua buah syarat batas, yang dapat diselesaikan dengan mudah yaitu

$$\phi(x) = \frac{g}{2a^2}(x^2 - Lx).$$

Dengan  $\phi(x)$  dipilih sedemikian rupa, sehingga tersisa persamaan diferensial, syarat batas dan kondisi awal  $U(x, t)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}, \\ U(0, t) &= 0, \quad U(L, t) = 0, \\ U(x, 0) &= f(x) - \phi(x), \quad U_t(x, 0) = 0.\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa dibandingkan dengan modifikasi salah satu kondisi awal, persamaan ini sama dengan persamaan yang sudah kita selesaikan sebelumnya. Sehingga kita dapat menuliskan solusinya dengan cepat

$$\begin{aligned}U(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x, \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \left[ f(x') - \frac{g}{2a^2} (x'^2 - Lx') \right] \sin \frac{n\pi}{L} x' dx' .\end{aligned}$$

Mengikuti hal ini perpindahan senar, termasuk efek gaya beratnya, diberikan oleh:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{g}{2a^2} (x^2 - Lx) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{L} \int_0^L \left[ f(x) - \frac{g}{2a^2} (x^2 - Lx) \right] \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right\} \cos \frac{n\pi a}{L} t \sin \frac{n\pi}{L} x.\end{aligned}$$

### Getaran Terpaksa dan Resonansi

Sekarang anggap bahwa senar tetap pada ujungnya dipengaruhi gaya luar per satuan panjang periodik  $F(t) = F_1 \cos \omega t$ . Dalam kasus ini, senar akan memenuhi persamaan diferensial parsial tak homogen

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F_0 \cos \omega t = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (5.34)$$

dengan  $F_0 = F_1/\rho$ . Syarat batasnya akan sama dengan

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

Jika senar mula-mula diam pada kesetimbangan ketika gaya luar mulai bekerja, maka perpindahan  $u(x, t)$  harus juga memenuhi syarat batas

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Karena gaya luar sinusoidal murni, hal ini relatif mudah untuk menemukan sebuah solusi yang memenuhi persamaan diferensial dan syarat batas. Sama seperti menyelesaikan persamaan diferensial biasa, kita tahu solusi khusus haruslah beresilasi dengan  $\cos \omega t$ . Sehingga, marilah kita mengambil solusi uji

$$v(x, t) = X(x) \cos \omega t.$$

Menggantikan  $u(x, t)$  dengan  $v(x, t)$  pada (5.34), kita mempunyai

$$a^2 X''(x) \cos \omega t + F_0 \cos \omega t = -\omega^2 X(x) \cos \omega t$$

atau

$$X''(x) = -\frac{\omega^2}{a^2} X(x) - \frac{F_0}{a^2},$$

yang memberikan solusi

$$X(x) = A \cos \frac{\omega x}{a} + B \sin \frac{\omega x}{a} - \frac{F_0}{\omega^2}.$$

Syarat batas mengharuskan

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Sehingga

$$X(0) = A - \frac{F_0}{\omega^2} = 0, \quad A = \frac{F_0}{\omega^2}.$$

Selanjutnya

$$X(L) = \frac{F_0}{\omega^2} \cos \frac{\omega L}{a} + B \sin \frac{\omega L}{a} - \frac{F_0}{\omega^2} = 0$$

atau

$$B = \frac{F_0}{\omega^2} \frac{(1 - \cos \frac{\omega L}{a})}{\sin \frac{\omega L}{a}},$$

kecuali untuk  $\omega = n\pi a/L$  dengan  $n$  bilangan genap, pada kasus  $B = 0$ . Secara umum

$$X(x) = \frac{F_0}{\omega^2} \cos \frac{\omega x}{a} + \frac{F_0}{\omega^2} \frac{(1 - \cos \frac{\omega L}{a})}{\sin \frac{\omega L}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} - \frac{F_0}{\omega^2}, \quad (5.35)$$

$$v(x, t) = X(x) \cos \omega t.$$

Tetapi solusi ini tidak memenuhi kondisi awal. Sehingga kita kembali pada metode pemisahan solusi menjadi dua bagian

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t).$$

Dalam suku  $v$  dan  $U$ , persamaan asal dan syarat batas maupun kondisi awalnya menjadi

$$a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + F_0 \cos \omega t = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2},$$

$$u(0, t) = v(0, t) + U(0, t) = 0,$$

$$u(L, t) = v(L, t) + U(L, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = v(x, 0) + U(x, 0) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = v_t(x, 0) + U_t(x, 0) = 0.$$

Karena

$$a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + F_0 \cos \omega t = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2},$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0,$$

dan

$$v(x, 0) = X(x), \quad v_t(x, 0) = -\omega X(x) \sin 0 = 0.$$

Sehingga

$$a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2},$$

$$U(0, t) = 0, \quad U(L, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = -X(x), \quad U_t(x, 0) = 0.$$

Ini adalah persamaan diferensial homogen yang kita selesaikan sebelumnya

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{2}{L} \int_0^L X(x') \sin \frac{n\pi}{L} x' dx' \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi a}{L} t. \quad (5.36)$$

Sehingga solusinya  $u(x, t)$  diberikan oleh

$$u(x, t) = X(x) \cos \omega t + U(x, t)$$

dengan  $X(x)$  diberikan oleh (5.35) dan  $U(x, t)$  diberikan oleh (5.36).

Solusi ini berlaku untuk semua  $\omega$ . Tetapi, jika  $\omega$  mendekati  $\omega_m = m\pi a/L$  dengan bilangan ganjil  $m$ , maka  $X(x)$  pada (5.35) menuju tak hingga, sehingga resonansi terjadi. Tetapi jika  $\omega = m\pi a/L$  dengan  $m$  bilangan genap maka

$$X(x) = \frac{F_0}{\omega^2} \cos \frac{m\pi x}{L} - \frac{F_0}{\omega^2}$$

dan resonansi tidak muncul dalam kasus ini.

### 5.1.6 Solusi D'Alembert Persamaan Gelombang

Dengan menggunakan separasi variabel, kita telah menyelesaikan persoalan senar yang bergetar pertama dengan mencari nilai eigen dan fungsi eigen yang disebabkan oleh syarat batas. Dalam langkah berikutnya, kita menggunakan kondisi awal untuk menentukan konstanta dalam deret Fourier dari solusinya. Sekarang kita akan memperkenalkan sebuah metode yang merupakan kebalikannya. Pertama kita akan menyelesaikan persoalan kondisi awal dan kemudian mencari solusi untuk memenuhi syarat batas.

Marilah kita selesaikan persoalan kondisi awal berikut:

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } & \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \\ \text{S. B. : } & u(x, 0) = f(x); \quad u_t(x, 0) = g(x), \end{aligned}$$

untuk  $0 < t < \infty$  dan  $-\infty < x < \infty$ . Solusi umumnya dapat diperoleh dengan mengganti variabel

$$\begin{aligned} \zeta &= x + at \\ \eta &= x - at. \end{aligned}$$

Menurut aturan rantai

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} = a \frac{\partial}{\partial \zeta} - a \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

maka persamaan diferensialnya menjadi

$$\left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u = \frac{1}{a^2} \left( a \frac{\partial}{\partial \zeta} - a \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( a \frac{\partial}{\partial \zeta} - a \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u$$

atau

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) u = \left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) u.$$

Jelaslah

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \eta} u = 0.$$

Persamaan baru ini dapat diselesaikan dengan mudah dengan dua buah integrasi langsung. Dengan mengintegrasikan terhadap  $\zeta$  memberikan fungsi  $A(\eta)$   $\eta$  sebarang, yaitu

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u = A(\eta),$$

karena

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} u \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta} A(\eta) = 0.$$

Integrasi kedua terhadap  $\eta$  memberikan

$$u = \int A(\eta) d\eta + G(\zeta),$$

dengan  $G(\zeta)$  sebuah fungsi  $\zeta$  sebarang. Karena  $A(\eta)$  sebarang, kita dapat menuliskan  $F(\eta)$  pada tempat  $\int A(\eta) d\eta$ . Sehingga

$$u(\zeta, \eta) = F(\eta) + G(\zeta).$$

Dengan substitusi kembali pada variabel asalnya, kita mempunyai

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at). \quad (5.37)$$

Sehingga solusi umum persamaan gelombang adalah jumlah dua buah gelombang bergerak sebarang, yang masing-masing bergerak dalam arah berlawanan dengan kecepatan  $a$ .

Mudah untuk melihat bahwa (5.37) merupakan solusi persamaan gelombang. Kita dapat menggunakan aturan rantai

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{dF(x - at)}{d(x - at)} \frac{\partial(x - at)}{\partial t} + \frac{dG(x + at)}{d(x + at)} \frac{\partial(x + at)}{\partial t} \\ &= -aF'(x - at) + aG'(x + at), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= -a \frac{dF'(x - at)}{d(x - at)} \frac{\partial(x - at)}{\partial t} + a \frac{dG'(x + at)}{d(x + at)} \frac{\partial(x + at)}{\partial t} \\ &= a^2 F''(x - at) + a^2 G''(x + at). \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, kita peroleh

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = F''(x - at) + G''(x + at).$$

Jelaslah bahwa persamaan diferensial

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

terpenuhi.

Sekarang jika kita masukkan kondisi awal

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = g(x),$$

kita mempunyai

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = f(x), \quad (5.38)$$

$$u_t(x, 0) = -aF'(x) + aG'(x) = g(x). \quad (5.39)$$

Dengan mengintegrasikan (5.39) dari titik tetap sebarang, katakanlah dari 0 sampai  $x$ , memberikan

$$-aF(x) + aG(x) + aF(0) - aG(0) = \int_0^x g(x') dx'$$

atau

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{a^2} \int_0^x g(x') dx' - F(0) + G(0). \quad (5.40)$$

Dengan menyelesaikan  $F(x)$  dan  $G(x)$  dari (5.38) dan (5.40), kita mempunyai

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x g(x') dx' + \frac{1}{2}[F(0) - G(0)], \quad (5.41)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x g(x') dx' - \frac{1}{2}[F(0) - G(0)]. \quad (5.42)$$

Jika kita mengganti argumen  $x$  dengan  $x - at$  pada kedua ruas (5.41), kita dapat menuliskan

$$F(x - at) = \frac{1}{2}f(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^x g(x') dx' + \frac{1}{2}[F(0) - G(0)].$$

Dengan cara yang sama, jika kita mengganti argumen  $x$  dengan  $x + at$  pada kedua ruas (5.42), kita mempunyai

$$G(x + at) = \frac{1}{2}f(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^x g(x') dx' - \frac{1}{2}[F(0) - G(0)].$$

Sehingga

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x - at) + G(x + at) = \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} g(x') dx' - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} g(x') dx'. \end{aligned}$$

Dengan membalik batas atas dan bawah pada integral terakhir dan mengkombinasikannya dengan persamaan di atas, kita memperoleh

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(x') dx'. \quad (5.43)$$

Ini adalah solusi untuk  $-\infty < x < \infty$  tanpa syarat batas.

Sekarang anggap senar memiliki panjang berhingga dari 0 ke  $L$  dan dua ujungnya tetap, sehingga kita memiliki syarat batas sebagai berikut:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

Pada kasus ini,  $f(x)$  dan  $g(x)$  dalam selang  $0 \leq x \leq L$ . Kita ingin mencari solusi yang memenuhi syarat tambahan.

Pertama, jika  $u(0, t) = 0$ , menurut (5.43)

$$u(0, t) = \frac{1}{2}[f(-at) + f(at)] + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} g(x') dx' = 0.$$

Karena  $f(x)$  dan  $g(x)$  dua buah fungsi yang tak berhubungan, untuk memenuhi syarat ini kita harus mempunyai

$$f(-at) + f(at) = 0, \quad (5.44)$$

$$\int_{-at}^{+at} g(x') dx' = 0. \quad (5.45)$$

Jelas dari (5.44) bahwa

$$f(x) = -f(-x).$$

Sehingga  $f(x)$  haruslah merupakan fungsi ganjil. Dengan kata lain  $f(x)$  haruslah antisimetrik jika kita perluas pada  $x$  negatif.

Integral pada (5.45) dapat kita tuliskan sebagai

$$\int_{-at}^0 g(x') dx' + \int_0^{at} g(x) dx = 0.$$

Dengan mengganti variabel  $x' = -x$  pada integral pertama, kita bisa menuliskannya sebagai

$$\int_{-at}^0 g(x') dx' = \int_0^{at} g(-x) dx$$

Untuk

$$\int_0^{at} g(-x) dx' + \int_0^{at} g(x) dx = 0,$$

kita harus memiliki

$$g(-x) = -g(x).$$

Sehingga  $g(x)$  juga merupakan fungsi ganjil.

Dengan cara yang sama, untuk memenuhi syarat batas

$$u(L, t) = \frac{1}{2}[f(L - at) + f(L + at)] + \frac{1}{2a} \int_{L-at}^{L+at} g(x') dx' = 0,$$

kita mengharuskan

$$f(L - at) + f(L + at) = 0, \tag{5.46}$$

$$\int_{L-at}^{L+at} g(x') dx' = 0. \tag{5.47}$$

Maka

$$f(L - ct) = -f(L + ct).$$

Karena  $f(x)$  merupakan fungsi ganjil

$$f(L - ct) = -f(-L + ct)$$

sehingga

$$f(-L + ct) = f(L + ct).$$

Mengikuti hal ini

$$f(-L + ct + 2L) = f(L + ct) = f(-L + ct).$$

Hal ini menunjukkan bahwa  $f(x)$  sebuah fungsi periodik berperiode  $2L$ .



Sekarang (5.47) dapat dituliskan sebagai

$$\int_{L-at}^L g(x') dx' + \int_L^{L+at} g(x') dx' = 0.$$

Dengan mengganti variabel  $x' = L - x$  pada integral pertama, persamaannya menjadi

$$\int_{L-at}^L g(x') dx' = \int_0^{ct} g(L - x) dx.$$

Ganti variabel  $x'$  dengan  $L + x$  pada integral kedua, kita dapat menuliskan

$$\int_L^{L+at} g(x') dx' = \int_0^{ct} g(L + x) dx.$$

Jadi, untuk

$$\int_0^{ct} g(L - x) dx + \int_0^{ct} g(L + x) dx = 0,$$

kita harus mempunyai

$$g(L - x) = -g(L + x).$$

Karena  $g(L - x)$  fungsi ganjil, maka

$$g(L - x) = -g(-L + x).$$

Sehingga

$$g(-L + x) = g(L + x).$$

Mengikuti hal ini

$$g(-L + x + 2L) = g(L + x) = g(-L + x)$$

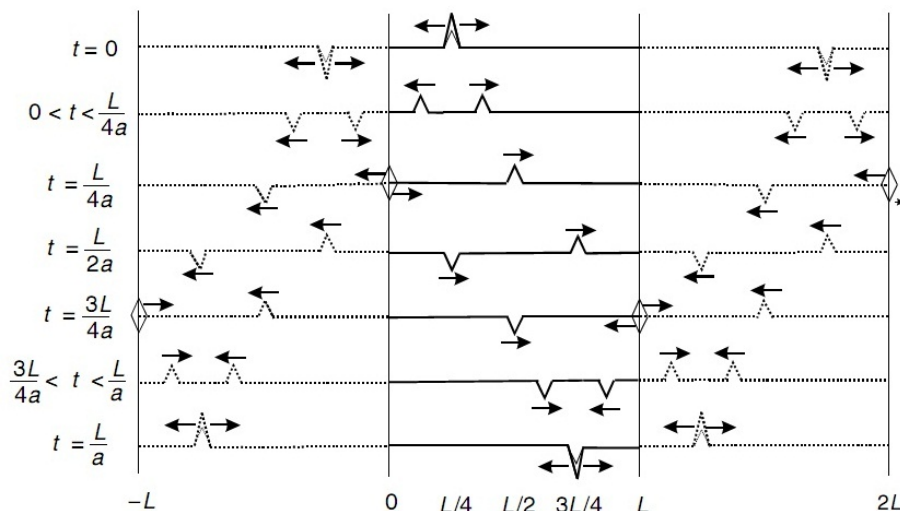
Sehingga  $g(x)$  haruslah juga fungsi periodik berperiode  $2L$ .

Sehingga, jika kita mendefinisikan  $f^*(x)$  dan  $g^*(x)$  sebagai fungsi ganjil periodik berperiode  $2L$ , yang definisinya pada  $0 \leq x \leq L$  adalah  $g(x)$  dan  $g(x)$ , maka solusi persoalan diberikan oleh

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x - at) + f^*(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g^*(\tau) d\tau, \quad (5.48)$$

yang sama dengan (5.32).

Hal ini dikenal sebagai solusi D'Alembert. Matematikawan berkebangsaan Perancis Jean le Rond D'Alembert (1717–1783) yang pertama menemukannya sekitar tahun 1750an. Metode ini sangat elegan tetapi sayangnya terbatas pada solusi persamaan jenis ini. Metode separasi variabel, seperti yang sudah kita lihat, juga bisa memberikan solusi yang sama, adalah lebih umum. Kita sebaiknya menggunakan metode ini (separasi variabel) untuk menyelesaikan jenis lain dari persamaan diferensial parsial.



Gambar 5.9: Sebuah pulsa segitiga pada  $x = L/4$  yang berubah pada waktu pada sebuah senar sepanjang  $L$  yang ujungnya tetap.

**Contoh 5.1.3.** Sebuah senar sepanjang  $L$  dengan tegangan  $T$  dan rapat massa  $\rho$ , kedua ujungnya tetap, mula-mula diberikan perpindahan pulsa segitiga kecil pada  $x = L/4$ , ditunjukkan pada Gambar 5.9, kemudian dilepaskan dari keadaan diam. Tentukan gerak yang diakibatkannya.

**Solusi 5.1.3.** Anggap pulsa segitiga awal adalah  $f(x)$ , perpindahan yang diakibatkannya adalah

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f^*(x - at) + f^*(x + at)]$$

dengan  $f^*$  sama dengan  $f(x)$  pada selang  $0 \leq x \leq L$ , di luar selang ini  $f^*$  adalah ekstensi antisimetrik periodik  $f(x)$  berperiode  $2L$ . Ekstensi ini ditunjukkan pada Gambar 5.9 sebagai garis putus-putus. Perpindahan sebenarnya dari senar ditunjukkan pada Gambar 5.9 sebagai garis gelap tebal dalam ruang “fisik” antara  $0$  dan  $L$ . Tetapi, setelah  $t > L/4a$ , apa yang terjadi dalam ruang fisik adalah hasil dari beberapa pulsa titik-titik bergerak dari ruang “matematik” ke dalam ruang “fisik”. Dengan kata lain, panjang senar berhingga  $L$  dapat dianggap sebagai sebuah segmen dari garis yang panjangnya tak hingga. Pulsa bergerak dalam garis tak hingga. Apa yang terjadi pada segmen antara  $0$  dan  $L$  adalah perpindahan senar yang bisa kita lihat. Bagian lain dari garis panjang tak hingga ini hanya konstruksi matematik yang kita gunakan untuk memprediksi apa yang akan terjadi pada senar riil.

Sesaat setelah pulsa dilepaskan, pulsa menjadi dua bagian yang sama dan bergerak pada arah yang berlawanan dengan kecepatan  $a$  yang sama dengan  $\sqrt{T/\rho}$ . Gerak ini ditunjukkan pada garis kedua Gambar 5.9. Pada  $t = L/4a$ , pulsa sebelah kiri mencapai titik ujung pada  $x = 0$ . Secara perlahan-lahan pulsa ini akan hilang seperti yang

ditunjukkan garis ketiga pada gambar. Kemudian sebuah pulsa identik akan muncul kembali tetapi naik turun. Pada selang waktu  $L/4a < t < 3L/4a$  terdapat dua buah pulsa yang terpisah sejauh  $L/2$ , satu ke atas dan satu ke bawah, keduanya bergerak ke kanan seperti yang ditunjukkan pada garis keempat. Pada  $t = 3L/4a$ , pulsa kanan mencapai titik ujung pada  $x = L$  dan perlahan-lahan hilang. Hal ini ditunjukkan pada garis kelima. Sesaat setelah sebuah pulsa identik muncul kembali, dan bergerak ke kiri. Dalam selang waktu  $3L/4a < t < L/a$ , dua buah pulsa, keduanya naik turun, bergerak saling mendekat. Hal ini ditunjukkan garis keenam. Akhir dari setengah siklus pertama adalah pada  $t = L/a$ . Pada saat tersebut, pulsa mula-mula (original) muncul naik turun pada  $x = 3L/4$ . Hal ini ditunjukkan pada garis terakhir Gambar 5.9. Setelah itu gerak akan berulang dalam arah berlawanan sampai  $t = 2L/a$ . Hal ini adalah akhir dari siklus pertama dan senar akan kembali pada bentuk semula. Peristiwa ini adalah fakta yang terkenal dan dengan mudah diperiksa kebenarannya.

**Contoh 5.1.4.** Ketika sebuah kawat piano dipukul dengan palu tipis pada  $x_0$ , sebuah kecepatan terlokalisasi diberikan pada titik tersebut. Pada saat tersebut, kawat tetap diam, tetapi akan mulai bergetar setelahnya. Jelaskan gerakannya dengan asumsi  $a = \sqrt{T/\rho}$  dan  $0 < x_0 < L/4$ .

**Solusi 5.1.4.** Untuk mencari perpindahan kawat, kita harus mencari solusi persoalan syarat batas dari senar bergetar dengan kondisi awal sebagai berikut

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{dan} \quad u_t(x, 0) = \delta(x - x_0),$$

dengan  $\delta(x - x_0)$  adalah fungsi delta. Menurut (5.48)

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta^*(x' - x_0) dx',$$

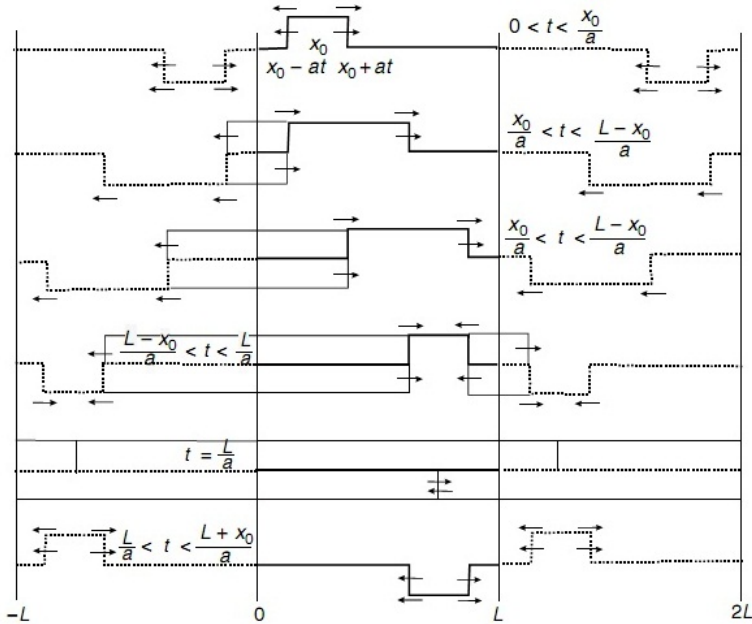
dengan  $\delta^*(x - x_0)$  adalah fungsi bilangan ganjil dengan periode  $2L$ , yang definisinya antara 0 dan  $L$  adalah fungsi delta  $\delta(x - x_0)$ . Dengan definisi fungsi delta

$$\int_{x-at}^{x+at} \delta(x' - x_0) dx' = \begin{cases} 1 & \text{jika } x - at < x_0 < x + at \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Dengan menambahkan  $at$  pada dua ruas, kita melihat syarat  $x - at < x_0$  ekuivalen dengan  $x < x_0 + at$ . Serupa dengan ini,  $x_0 < x + at$  ekuivalen dengan  $x_0 - at < x$ . Ini di antara  $x_0 - at$  dan  $x_0 + at$ , integralnya sama dengan 1, di luar selang ini, sama dengan nol.

Hasil ini bisa didapatkan dengan menggunakan

$$\delta(s - x_0) = \frac{d}{dx} U(x - x_0),$$



Gambar 5.10: Gerak kawat sepanjang  $L$  setelah diberikan kecepatan terlokalisasi pada  $x_0$ .

dengan  $U(x - x_0)$  adalah fungsi tangga, dan

$$\begin{aligned} \int_{x-at}^{x+at} \delta(x' - x_0) dx' &= U(x + at - x_0) - U(x - at - x_0) \\ &= U(x - (x_0 - at)) - U(x - (x_0 + at)). \end{aligned}$$

Cara ini memberikan hasil yang sama. Ini berarti sesaat setelah kawat dipukul, sebuah pulsa persegi berpusat pada  $x_0$  yang tingginya  $1/2a$  akan muncul seperti pada Gambar 5.10.

Perpindahan kawat sebenarnya antara  $0$  dan  $L$  (yang kita namakan sebagai ruang “fisik”) ditunjukkan sebagai garis tebal gelap pada Gambar 5.10. Citra karena ekstensi antisimetrik dan periodik pada  $-L < x < 0$  dan  $0 < x < 2L$  (yang merupakan bagian ruang “matematik”) ditunjukkan sebagai garis putus-putus pada gambar. Pulsa persegi akan terus membesar dengan laju konstan pada garis tak hingga tanpa batas. Sesaat setelah itu, beberapa citra akan datang dari ruang matematik ke dalam ruang fisik. Pulsa tersebut akan menghilangkan bagian pulsa persegi yang membesar dalam ruang fisik untuk memberikan perpindahan aktual dari kawat. Sebagai hasilnya, gerak kawat adalah sebagai berikut.

Pertama lebar pulsa persegi akan membesar dengan laju konstan yang ditunjukkan garis pertama Gambar 5.10. Pada  $t = x_0/a$ , sisi sebelah kiri pulsa persegi ini mencapai titik ujung pada  $x = 0$ . Setelah itu akan dipantulkan kembali dan bergerak ke kanan.

Pada selang waktu  $x_0/a < t < (L - x_0)/a$ , sebuah pulsa persegi dengan lebar konstan  $2x_0$  bergerak ke kanan dengan kecepatan  $a$ . Gerak ini ditunjukkan pada garis kedua dan ketiga pada Gambar 5.10. Pada  $t = (L - x_0)/a$ , sisi kanan pulsa persegi mencapai titik ujung pada  $x = L$  dan dipantulkan kembali. Lebar pulsa persegi mulai mengecil seperti garis keempat Gambar 5.10. Pada  $t = L/a$ , pulsa hilang. Apa yang terjadi adalah dua buah pulsa persegi negatif telah bergerak dari ruang matematika ke dalam ruang fisik sehingga saling bersentuhan. Sebagai konsekuensi, pulsa tersebut menghilangkan pulsa persegi positif. Ini ditunjukkan pada garis kelima. Sesaat setelah itu, dua buah pulsa persegi negatif overlap (saling melingkupi) dan mengkompensasi pulsa persegi positif yang hasilnya sebuah pulsa persegi lain muncul naik turun. Hal ini ditunjukkan pada garis terakhir Gambar 5.10. Setelah itu gerak akan berulang dengan urutan yang terbalik. Akhir siklus ini adalah pada  $t = 2L/a$ . Pada saat ini, pulsa akan hilang, tetapi sesaat setelahnya pulsa muncul kembali dan mengulang gerak.

## 5.2 Persamaan Gelombang Dua Dimensi

### 5.2.1 Persamaan Pembangkit Getaran Membran

Sebuah membran yang bergetar seperti tutup gendang (drumhead) adalah versi dua dimensi dari senar yang bergetar. Kita mengasumsikan bahwa membran tersebut diregangkan seragam di bawah sebuah tegangan per satuan panjang  $T$ . Yaitu, pada tiap titik membran tegangan per satuan panjang sepanjang garis lurus sebarang melalui titik tersebut, orientasi garisnya bebas, tegak lurus dengan garis tersebut sebesar  $T$ .

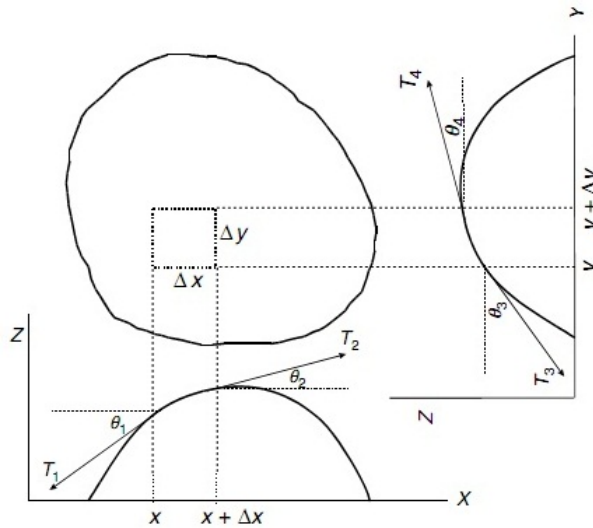
Mari kita perhatikan getaran membran seperti itu; kita harus menganggap bahwa rapat massa per satuan luas  $\rho$  konstan. Jika posisi kesetimbangan diambil sebagai bidang  $xy$ , maka kita berkonsentrasi dengan perpindahan  $z(x, y, t)$  tegak lurus bidang ini. Perhatikan sebuah elemen persegi dengan sisi  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  yang ditunjukkan Gambar 5.11. Kita kerjakan seperti sebelumnya. Kita mengasumsikan berat elemen tersebut diabaikan dibandingkan dengan gaya tegang. Dengan menggunakan hukum kedua Newton  $\Delta x \Delta y$ , kita mempunyai

$$T_2 \Delta y \sin \theta_2 - T_1 \Delta y \sin \theta_1 + T_4 \Delta x \sin \theta_4 - T_3 \Delta x \sin \theta_3 = \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (5.49)$$

Sekarang tidak ada gerak ke arah  $-x$  dan  $y$ , sehingga

$$T_2 \cos \theta_2 = T_1 \cos \theta_1, \quad T_4 \cos \theta_4 = T_3 \cos \theta_3 \quad (5.50)$$

Kita mengasumsikan kemiringan  $\partial z / \partial x$  dan  $\partial z / \partial y$  kecil dan seragam sepanjang domain, sehingga komponen horizontal pada (5.50) dapat dianggap sebagai tegangan



Gambar 5.11: Sebuah membran di bawah tegangan seragam.

membran  $T$ . Karena tegangannya seragam, maka

$$T_2 \cos \theta_2 = T_1 \cos \theta_1 = T_4 \cos \theta_4 = T_3 \cos \theta_3 = T.$$

Membagi kedua ruas (5.49) dengan ekspresi yang sesuai untuk  $T$ , kita peroleh

$$\Delta y \tan \theta_2 - \Delta y \tan \theta_1 + \Delta x \tan \theta_4 - \Delta x \tan \theta_3 = \frac{1}{T} \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

atau

$$\Delta y \left( \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_x \right) + \Delta x \left( \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y+\Delta y} - \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_y \right) = \frac{1}{T} \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Pada limit  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ , persamaan terakhir bisa kita tuliskan

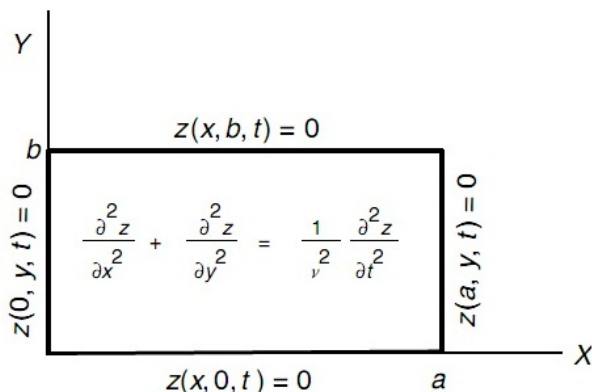
$$\Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Delta x + \Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Delta y = \frac{1}{T} \rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Mengikuti hal ini

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

dengan

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$



Gambar 5.12: Sebuah membran persegi yang bergetar.

### 5.2.2 Getaran Membran Persegi

Marilah kita perhatikan getaran membran pada Gambar 5.12.

Perpindahan membran  $z(x, y, t)$  keluar bidang  $xy$  diberikan oleh solusi persoalan berikut:

$$\text{Pers.Dif. : } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

$$\text{Syarat Batas : } z(0, y, t) = 0 \quad z(a, y, t) = 0,$$

$$z(x, 0, t) = 0 \quad z(x, b, t) = 0,$$

$$\text{Kondisi Awal : } z(x, y, 0) = f(x, y), \quad z_t(x, y, 0) = g(x, y).$$

Kita akan menggunakan metode separasi variabel lagi,

$$z(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Persamaan diferensial bisa dituliskan sebagai

$$X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t) = \frac{1}{v^2} X(x)Y(y)T''(t)$$

Bagi dengan  $X(x)Y(y)T(t)$ , kita memiliki

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Ruas kiri merupakan fungsi dari  $x$  dan  $y$ , dan ruas kanan adalah fungsi dari  $t$ . Karena  $x$ ,  $y$ ,  $t$  adalah variabel bebas, kedua ruas haruslah sama dengan konstanta yang sama

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} &= \lambda, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= \lambda. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Kita dapat memisahkan kebergantungan pada  $x$  dan  $y$  dengan menuliskan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda - \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Ruas kiri adalah fungsi dari  $x$  dan ruas kanan adalah fungsi dari  $y$ , sehingga kedua ruas haruslah sama dengan konstanta yang sama. Konstantanya haruslah berupa bilangan negatif untuk alasan yang sama dengan konstanta separasi negatif pada persoalan senar yang bergetar. Jika tidak seperti ini syarat batas  $x$  tidak akan terpenuhi. Sehingga kita menuliskan

$$\begin{aligned}\lambda - \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= -\alpha^2, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\alpha^2.\end{aligned}$$

Maka,

$$X''(x) = -\alpha^2 X(x), \quad (5.52)$$

$$Y''(y) = (\lambda + \alpha^2)Y(y).$$

Karena  $\lambda$  adalah konstanta yang belum ditentukan, kita dapat mengkombinasikannya dengan  $\alpha^2$  sebagai konstanta yang lain. Untuk memenuhi syarat batas lagi dalam  $y$ , konstanta tersebut haruslah bilangan negatif, sehingga kita menuliskan

$$\lambda + \alpha^2 = -\beta^2 \quad (5.53)$$

dan

$$Y''(y) = -\beta^2 Y(y). \quad (5.54)$$

Syarat batas  $X(x)$  dan  $Y(y)$  adalah

$$X(0) = X(a) = 0; \quad Y(0) = Y(b) = 0.$$

Solusi (5.52) dan (5.54), bersama dengan syarat batas adalah

$$\begin{aligned}X(x) &= \sin \alpha x, & \alpha &= \frac{n\pi}{a}, & n &= 1, 2, 3, \dots \\ Y(y) &= \sin \beta y, & \beta &= \frac{m\pi}{b}, & m &= 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Untuk menekankan fakta bahwa untuk tiap bilangan bulat  $n$ , terdapat solusi fungsi eigen terpisah, kita menulis

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x.$$

Dengan cara yang sama, untuk tiap  $m$ , terdapat  $Y_m(y)$

$$Y_m(y) = \sin \frac{m\pi}{b} y.$$



Mengikuti (5.53) bahwa dari tiap pasang  $n$  dan  $m$ , terdapat sebuah konstanta  $\lambda$

$$\lambda_{nm} = - \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right].$$

Jelaslah  $\lambda_{nm}$  bergantung pada dua buah bilangan bulat  $n$  dan  $m$ . Untuk tiap  $\lambda_{nm}$ , terdapat sebuah persamaan bergantung waktu seperti yang terlihat pada (5.51)

$$T''_{nm}(t) = \lambda_{nm}v^2T_{nm}(t).$$

Sehingga

$$T_{nm}(t) = a_{nm} \cos \omega_{nm}(t) + b_{nm} \sin \omega_{nm}(t),$$

dengan

$$\omega_{nm} = \sqrt{-\lambda_{nm}v^2} = \left[ \left( \frac{n}{a} \right)^2 + \left( \frac{m}{b} \right)^2 \right]^{1/2} \pi v.$$

Jadi untuk tiap pasang  $n$  dan  $m$ , kita mempunyai sebuah solusi

$$z_{nm}(x, y, t) = X_n(x)Y_m(t)T_{nm}(t).$$

Kita dapat menganggap ini sebagai mode normal  $(n, m)$ . Solusi lengkap persoalan membran persegi bergetar dapat dinyatakan sebagai superposisi mode-mode normal ini.

$$\begin{aligned} z(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} z_{nm}(x, y, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm} \cos \omega_{nm}t + b_{nm} \sin \omega_{nm}t) \sin \frac{n\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{b}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Koefisien  $a_{nm}$  dan  $b_{nm}$  ditentukan oleh kondisi awal. Dengan menggunakan kondisi, pada  $t = 0$ ,  $z(x, y, 0) = f(x, y)$ , kita mempunyai

$$z(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} = f(x, y).$$

Hal ini dikenal sebagai *deret Fourier ganda*. Kita akan mengasumsikan  $f(x, y)$  dapat juga dinyatakan dalam deret seperti itu. Jika kita mendefinisikan  $R_m$  sebagai

$$R_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (5.56)$$

maka

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(x) \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Untuk  $x$  yang tetap, ini adalah ekspansi deret Fourier sinus setengah selang  $f(x, y)$  pada  $0 \leq y \leq b$ . Sehingga

$$R_m(x) = \frac{2}{b} \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{b} dy. \quad (5.57)$$

Dengan definisi,  $R_m(x)$  juga diberikan oleh (5.56), yang merupakan ekspansi deret Fourier sinus setengah selang  $R_m(x)$  pada  $0 \leq x \leq a$ . Sehingga

$$a_{nm} = \frac{2}{a} \int_0^a R_m(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Memasukkan  $R_m(x)$  pada (5.57) pada rumus ini, kita peroleh

$$a_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dx dy. \quad (5.58)$$

Ini adalah koefisien Euler umum untuk deret Fourier ganda.

Untuk menentukan  $b_{nm}$ , kita menurunkan (5.55) suku per suku terhadap  $t$ , dengan menggunakan kondisi  $z_t(x, y, 0) = g(x, y)$ , kita peroleh

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{nm} b_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} = g(x, y).$$

Dengan cara yang sama sebelum ini, kita peroleh

$$b_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dx dy. \quad (5.59)$$

Jika kondisi awalnya

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y) = 0,$$

maka  $b_{nm} = 0$  dan

$$z(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \cos \omega_{nm} t \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

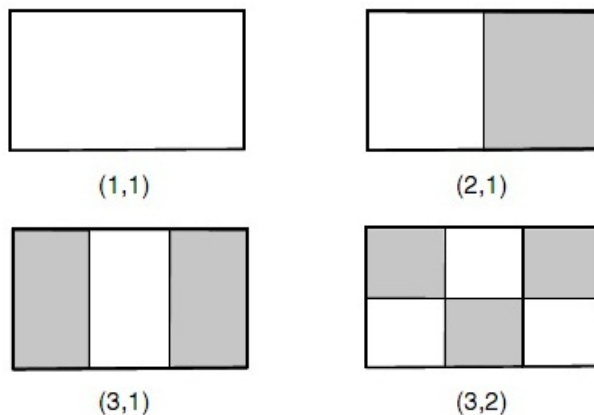
dengan  $a_{nm}$  diberikan oleh (5.58).

Secara umum, karena

$$a_{nm} \cos \omega_{nm} t + b_{nm} \sin \omega_{nm} t = c_{nm} \cos(\omega_{nm} t + \delta_{nm}),$$

kita dapat menuliskan mode normal  $(n, m)$  sebagai

$$z_{nm}(x, y, t) = c_{nm} \cos(\omega_{nm} t + \delta_{nm}) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (5.60)$$



Gambar 5.13: Garis nodal dan perpindahan mode normal membran persegi  $z_{11}$ ,  $z_{21}$ ,  $z_{31}$ ,  $z_{32}$ .

Frekuensinya adalah

$$\nu_{nm} = \frac{\omega_{nm}}{2\pi} = \left[ \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right]^{1/2} \frac{\pi v}{2\pi} = \left[ \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \frac{T}{4\rho} \right]^{1/2}. \quad (5.61)$$

Getaran dasar adalah mode (1,1), dengan frekuensi

$$\nu_{1,1} = \left[ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{T}{4\rho} \right]^{1/2}.$$

Nada atas pada (5.61) berhubungan dengan frekuensi dasar tidak dengan cara numerik yang sederhana, tidak seperti senar yang bergetar dengan nada atas (harmonik) yang semuanya merupakan perkalian sederhana bilangan bulat dengan nada dasar. Untuk beberapa alasan, telinga kita mendengar suara lebih enak jika nada atas berhubungan sederhana dengan nada dasar. Sehingga, suara dari membran persegi yang bergetar kurang begitu “musikal” untuk telinga dibandingkan dengan senar yang bergetar.

Menurut (5.61), frekuensi getaran bergantung pada dua buah bilangan bulat  $m$  dan  $n$ . Sebagai hasilnya, hal ini mungkin terjadi terdapat beberapa mode yang berbeda memiliki frekuensi yang sama. Sebagai contoh, jika  $a = 3b$ , maka mode (3,3) dan (9,1) memiliki frekuensi yang sama. Ketika dua buah atau lebih mode memiliki frekuensi yang sama, kita menyebutnya berdegenerasi. Kombinasi sebarang mode berdegenerasi ini memberikan getaran lain dengan frekuensi yang sama.

Dalam mode  $(m, n)$  dari (5.60) terdapat garis nodal pada  $x = 0, a/n, 2a/n, \dots, a$  dan  $y = 0, b/m, 2b/m, \dots, b$ . Pada sisi berlawanan dari garis nodal sebarang perpindahan memiliki arah sebarang. Beberapa mode normal ditunjukkan pada Gambar 5.13 dengan bagian berbayangan dan tanpa bayangan bergerak ke arah berlawanan.

### 5.3 Persamaan Gelombang Tiga Dimensi

Banyak sekali kuantitas fisika memenuhi persamaan gelombang tiga dimensi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Sebagai contoh, dalam elektrodinamika kita belajar bahwa medan listrik  $\mathbf{E}$ , medan magnet  $\mathbf{B}$ , potensial skalar  $\phi$  dan potensial vektor  $\mathbf{A}$ , semuanya 10 kuantitas, memenuhi persamaan ini.

Mengikuti separasi variabel

$$u(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t),$$

kita peroleh empat buah persamaan diferensial biasa

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -l^2, & \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= -m^2, & \frac{Z''(z)}{Z(z)} &= -n^2, \\ \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} &= -\alpha^2, \end{aligned}$$

dengan  $l, m, n, \alpha$  adalah konstanta separasi dan harus memenuhi hubungan

$$l^2 + m^2 + n^2 = \alpha^2.$$

Solusi umum persamaan ini adalah

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos lx + B \sin lx, \\ Y(y) &= C \cos my + D \sin my, \\ Z(z) &= E \cos nz + F \sin nz, \\ T(t) &= G \cos cat + H \sin cat, \end{aligned} \tag{5.62}$$

dengan  $A, B, \dots, H$  adalah konstanta. Karena  $e^{ilx} = \cos lx + i \sin lx$ , himpunan solusi ini dapat dinyatakan dalam bentuk alternatif

$$\begin{aligned} X(x) &= A' \exp(ilx) + B' \exp(-ilx), \\ Y(y) &= C' \exp(ily) + D' \exp(-ily), \\ Z(z) &= E' \exp(ilz) + F' \exp(-ilz), \\ T(t) &= G' \exp(icat) + H' \exp(-icat), \end{aligned} \tag{5.63}$$

dengan  $A', B', \dots, H'$  adalah konstanta yang lain. Dapat dengan mudah diverifikasi dengan substitusi langsung bahwa ekspresi dalam (5.63) adalah solusi persamaan gelombang. Sehingga kita dapat menggunakan (5.63) dan mengasumsikan bahwa kita dapat selalu melihat bagian riil, atau kita bisa dapat menggunakan (5.63) seperti adanya, tanpa melihat bagian riil atau imajiner.

Mungkin bahwa satu (atau dua)  $l_2$ ,  $m_2$ ,  $n_2$  bernilai negatif. Sebagai contoh jika

$$-l^2 + m^2 + n^2 = \alpha^2,$$

maka

$$\begin{aligned} X(x) &= A'' \cos lx + B'' \sin lx, \\ Y(y) &= C'' \cos my + D'' \sin my, \\ Z(z) &= E'' \cos nz + F'' \sin nz, \\ T(t) &= G'' \cos c\alpha t + H'' \sin c\alpha t, \end{aligned} \tag{5.64}$$

dengan  $A''$ ,  $B''$ ,  $\dots$ ,  $H''$  adalah konstanta yang lain.

Bergantung pada sifat geometrik dari persoalan spesifik, salah satu solusi biasanya lebih tepat digunakan dibandingkan lainnya. Lebih dari itu, syarat batas mungkin membatasi  $l$ ,  $m$ ,  $n$  menjadi sebuah nilai diskrit yang dibolehkan.

### 5.3.1 Gelombang Bidang

Marilah kita ambil solusi dari persamaan terpisah

$$\begin{aligned} X(x) &= e^{ilx}, & Y(y) &= e^{imy}, & Z(z) &= e^{inz}, \\ T(t) &= e^{-ic\alpha t}. \end{aligned}$$

Ini memberikan solusi khusus persamaan gelombang

$$u(x, y, z, t) = e^{i(lx + my + nz - c\alpha t)}.$$

Rumus ini memiliki interpretasi fisis. Untuk membuatnya jelas, kita mendefinisikan “bilangan gelombang”  $\mathbf{k}$  sebagai

$$\mathbf{k} = l\hat{\mathbf{i}} + m\hat{\mathbf{j}} + n\hat{\mathbf{k}},$$

dengan  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$ ,  $\hat{\mathbf{k}}$  adalah tiga buah vektor satuan pada sumbu koordinat. Anggap  $\mathbf{r}$  adalah vektor posisi dari titik awal  $O$  ke titik umum  $(x, y, z)$  pada sebuah bidang yang tegak lurus  $\mathbf{k}$  yang ditunjukkan Gambar 5.14. Karena

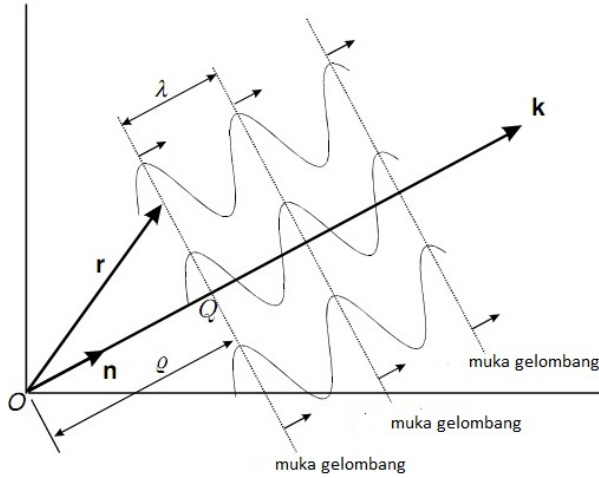
$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}},$$

jadi

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = lx + my + nz.$$

Selanjutnya

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = l^2 + m^2 + n^2 = \alpha^2.$$



Gambar 5.14: Sebuah gelombang bidang merambat dalam arah vektor  $\mathbf{k}$ .

Sehingga  $u(x, y, z, t)$  bisa ditulis sebagai

$$u(x, y, z, t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt)},$$

dengan menggunakan fakta bahwa  $\alpha = k$ . Ini merepresentasikan sebuah gelombang bidang tiga dimensi bergerak dalam arah  $\mathbf{k}$ . Sebuah gelombang bidang adalah gelombang yang gangguannya konstan pada semua titik pada bidang yang tegak lurus arah rambat. Bidang seperti ini sering dinamakan muka gelombang.

Anggap  $\mathbf{n}$  adalah vektor satuan dalam arah  $\mathbf{k}$ , maka

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = k\rho$$

dengan  $\rho$  adalah jarak tegak lurus dari titik asal  $O$  diukur sepanjang vektor  $\mathbf{n}$  ke titik  $Q$  pada garis yang bertemu dengan muka gelombang yang ditunjukkan Gambar 5.14. Sehingga

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt)} = e^{i(k\rho - ckt)} = e^{ik(\rho - ct)}.$$

Jika  $\mathbf{k}$  memiliki arah  $-x$ , ekspresi ini hanyalah  $e^{ik(x-ct)}$ , yang kita anggap sebagai gelombang satu dimensi bergerak dengan kecepatan  $c$ . Selanjutnya,  $k = 2\pi/\lambda$  dan  $kc = \omega$  dengan  $\lambda$  adalah panjang gelombang dan  $\omega$  frekuensi sudut gelombang sinusoidal ini. Maka

$$e^{i(lx+my+nz-cat)} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

merepresentasikan gelombang bidang sinusoidal bergerak ke arah  $\mathbf{k}$ , dengan panjang gelombang  $2\pi/k$  dan frekuensi sudut  $\omega = kc$ .

Karena  $\mathbf{k}$  dapat memiliki arah sebarang dengan magnitudo (besar) yang juga sebarang, persamaan gelombang tiga dimensi dapat memiliki solusi yang berupa gelombang

bidang bergerak dalam segala arah dengan panjang gelombang sebarang. Karena persamaan gelombang adalah linier, kita bisa memiliki banyak sekali gelombang bidang secara bersamaan, bergerak ke segala arah yang berbeda. Sehingga solusi paling umum persamaan gelombang tiga dimensi adalah sebuah superposisi semua jenis gelombang bidang dalam segala arah, yang tidak lain adalah integral Fourier dalam tiga dimensi.

### 5.3.2 Gelombang Partikel dalam Kotak

Sebuah partikel bebas (partikel tanpa gaya yang bekerja padanya) dideskripsikan dalam mekanika kuantum adalah persamaan gelombang yang berbeda, dikenal sebagai persamaan Schrödinger

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 M} \nabla^2 \Psi = i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Psi,$$

dengan  $M$  massa partikel dan  $h$  konstanta Planck. Pembahasan tentang mekanika kuantum di luar buku ini, kita hanya akan membicarakannya sebagai persoalan matematik saja.

Dengan menggunakan separasi variabel, kita mengasumsikan bahwa

$$\Psi(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t),$$

sehingga persamaannya menjadi

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 M} \left( \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} \right) = i \frac{h}{2\pi} \frac{T'}{T}. \quad (5.65)$$

Kedua ruas persamaan haruslah sama dengan sebuah konstanta. Anggap

$$i \frac{h}{2\pi} \frac{T'}{T} = E$$

Jadi

$$T(t) = e^{(2\pi E/ih)t}.$$

Jika kita definisikan  $T(t)$  sebagai suku bergantung waktu fungsi gelombang dan menuliskan

$$e^{(2\pi E/ih)t} = e^{-i\omega t},$$

maka

$$E = h\omega/2\pi = h\nu,$$

yang dianggap sebagai energi partikel, karena menurut aturan Planck bahwa energi sama dengan  $h$  dikalikan frekuensi.

Persamaan diferensial biasa yang terpisah dalam  $x$ ,  $y$ ,  $z$

$$\frac{X''}{X} = l^2, \quad \frac{Y''}{Y} = m^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -n^2, \quad (5.66)$$

dengan  $l$ ,  $m$ ,  $n$  adalah konstanta separasi. Karena (5.65), konstanta ini haruslah memenuhi hubungan

$$E = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 M} (l^2 + m^2 + n^2). \quad (5.67)$$

Anggap bahwa partikel berada pada kotak persegi dengan panjang  $a$  dalam arah  $x$ ,  $b$  dalam arah  $y$  dan  $c$  dalam arah  $z$ . Kenyataan bahwa fungsi gelombang  $\Psi$  harus hilang pada tembok berarti  $\Psi$  haruslah memenuhi syarat batas berikut

$$\Psi(0, y, z, t) = \Psi(a, y, z, t) = 0,$$

$$\Psi(x, 0, z, t) = \Psi(x, b, z, t) = 0,$$

$$\Psi(x, y, 0, t) = \Psi(x, y, c, t) = 0.$$

Agar syarat batas ini terpenuhi, suku ruang fungsi gelombang haruslah berbentuk

$$\Psi(x, y, z, t) = \sin \frac{n_1 \pi}{a} x \sin \frac{n_2 \pi}{b} y \sin \frac{n_3 \pi}{c} z,$$

dengan  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  adalah bilangan bulat bebas 1, 2, 3... Hal ini berarti  $l$ ,  $m$ ,  $n$  pada (5.66) haruslah bernilai

$$l = \frac{n_1 \pi}{a}, \quad m = \frac{n_2 \pi}{b}, \quad n = \frac{n_3 \pi}{c}.$$

Dari (5.67) energinya diberikan oleh

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\hbar^2}{8M} \left[ \left( \frac{n_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{n_2}{b} \right)^2 + \left( \frac{n_3}{c} \right)^2 \right].$$

Sehingga kita melihat energi terkuantisasi, yang kita maksudkan adalah partikel dalam kotak tidak memiliki energi sebarang, energi ini haruslah merupakan salah satu nilai khusus yang dibolehkan berhubungan dengan  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ , tiap mengasumsikan satu dari bilangan bulat 1, 2, 3, ... Jika kita bandingkan dengan kasus klasik hal ini sangatlah kontras.

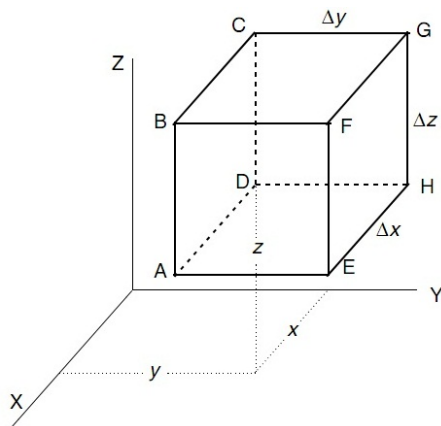
Energi diskrit yang ditemui dalam eksperimen merupakan salah satu alasan dibangunnya mekanika kuantum. Menarik untuk memperhatikan bahwa kuantisasi energi merupakan konsekuensi dari syarat batas pada solusi persamaan Schrödinger.

## 5.4 Persamaan Konduksi Panas

Untuk memperoleh persamaan aliran panas, kita menggunakan hasil eksperimen

- Panas mengalir dalam arah temperatur yang menurun.
- Laju aliran panas melalui sebuah luas sebanding dengan luas dan pada gradien suhu yang normal pada luas. Konstanta kesebandingannya dinamakan dengan konduktivitas termal  $k$ .





Gambar 5.15: Energi panas naik tiap satuan waktu dalam elemen kecil massa sama dengan fluks panas yang mengalir ke dalam elemen ini melalui enam permukaannya.

- Kuantitas panas yang diterima atau dilepas oleh benda ketika suhunya berubah sebanding dengan massa benda dan perubahan suhu. Konstanta kesebandingan dinamakan panas spesifik  $c$ .

Konstanta  $k$ ,  $c$  dan rapat massa per satuan volume/densitas  $\rho$  dari banyak material terdapat pada buku kimia dan fisika.

Anggap suhu adalah  $u(x, y, z, t)$ . Kuantitas panas  $\Delta Q$  yang dibutuhkan agar terjadi perubahan suhu  $\Delta u$  dalam kotak kecil bermassa  $\Delta m$  ditunjukkan pada Gambar 5.15 adalah

$$\Delta Q = c \Delta m \Delta y \Delta z \Delta u. \quad (5.68)$$

Laju aliran panas melalui permukaan ABCD ke dalam kotak adalah

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = -k \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_y \Delta x \Delta z.$$

Perhatikan bahwa kuantitas positif dari  $\partial u / \partial y$  berarti suhu naik dalam arah  $-y$  positif dan aliran panas ke arah  $-y$  negatif, sehingga panas mengalir ke luar kotak, sehingga ada tanda negatif pada persamaan. Subscript  $y$  dalam  $\left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_y$  menyatakan gradien dihitung pada permukaan tegak lurus sumbu  $-y$  dan pada jarak  $y$  satuan dari titik asal. Maka panas yang mengalir ke dalam kotak melalui ABCD dalam selang waktu  $\Delta t$  adalah

$$\Delta Q_1 = -k \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_y \Delta x \Delta z \Delta t.$$

Dengan cara yang sama aliran panas ke dalam kotak melalui permukaan EFGH adalah

$$\Delta Q_2 = k \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t.$$

Mengikuti hal ini

$$\begin{aligned}\Delta Q_1 + \Delta Q_2 &= k \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t - k \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_y \Delta x \Delta z \Delta t \\ &= \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y+\Delta y} - \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_y \right\} \Delta x \Delta z \Delta t \\ &= k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Delta x \Delta z \Delta t.\end{aligned}$$

Dapat ditunjukkan dengan cara yang sama aliran panas ke dalam kotak melalui permukaan atas BFGC dan permukaan bawah AEHD dalam selang waktu  $\Delta t$  diberikan oleh

$$\Delta Q_3 + \Delta Q_4 = k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta z \Delta x \Delta y \Delta t$$

dan melalui permukaan depan dan belakang

$$\Delta Q_5 + \Delta Q_6 = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Sehingga jumlah total panas yang masuk ke dalam kotak melalui enam buah permukaannya adalah

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4 + \Delta Q_5 + \Delta Q_6 \\ &= k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t.\end{aligned}\tag{5.69}$$

Panas ini haruslah bertanggung jawab terhadap kenaikan suhu di dalam kotak, maka  $\Delta Q$  pada (5.69) harus sama dengan  $\Delta Q$  pada (5.68). Jadi

$$k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = c\rho \Delta x \Delta y \Delta z \Delta u$$

atau

$$\frac{k}{c\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Pada limit  $\Delta t \rightarrow 0$ , persamaan di atas menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t},\tag{5.70}$$

dengan

$$\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$$

yang dikenal sebagai difusivitas termal.

Ini adalah persamaan konduksi panas. Menarik untuk memperhatikan bahwa dalam penurunan rumus kita tidak menggunakan syarat batas. Aliran panas dalam

benda dideskripsikan dengan persamaan yang sama apakah permukaannya dijaga dalam suhu tetap, disekat terhadap kehilangan panas, atau dibolehkan mendingin secara bebas dengan konduksi pada medium yang mengelilingi. Secara umum, seperti yang akan kita lihat, peran syarat batas adalah untuk menentukan bentuk solusi persamaan diferensial parsial yang relevan dengan persoalan khusus.

Persamaan ini berbeda dengan persamaan gelombang satu dimensi dalam turunan waktu yang hanya orde pertama, sedangkan dalam persamaan gelombang dalam orde dua.

Persamaan ini dikenal juga sebagai persamaan difusi, karena tidak hanya membangkitkan difusi panas, tetapi juga difusi material, seperti difusi polutan pada air, atau difusi obat pada liver.

## 5.5 Persamaan Difusi Satu Dimensi

Beberapa situasi melibatkan hanya satu koordinat. Sebagai contoh jika permukaan samping dari sebuah batang kecil sepanjang  $L$  dalam arah  $-x$  disekat dan tidak ada panas yang dibangkitkan dalam batang, maka distribusi suhu pada batang ditentukan oleh persamaan panas satu dimensi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Hal ini karena penyekatan menghambat fluks panas dalam arah radial, sehingga suhu hanya akan bergantung sumbu  $-x$  saja.

Persamaan satu dimensi ini juga mendeskripsikan distribusi suhu papan dua dimensi, yang tak hingga dalam arah  $-y$  dan  $-z$  dan terikat pada bidang pada  $x = 0$  dan  $x = L$ . Jika kondisi awal dan syarat batas diketahui, distribusi suhu  $u(x, t)$  di dalam papan dapat dicari.

Dalam subsubbab berikut, kita akan menyelesaikan persoalan satu dimensi dengan beberapa jenis syarat batas.

### 5.5.1 Distribusi Suhu dengan Nilai Tertentu pada Batas

#### Dua Ujung dengan Suhu yang Sama

Sebuah batang panjang memiliki distribusi suhu awal sepanjang sumbunya; batang disekat pada permukaan sampingnya, dan kedua ujung batang dijaga pada suhu sama yang konstan. Sepanjang suhu kedua ujung batang sama, kita dapat mengasumsikan suhunya sama dengan  $0^\circ$ . Jika tidak sama dengan  $0^\circ$ , perubahan sederhana pada skala

dapat membuatnya sama dengan  $0^\circ$  dalam skala yang baru. Anggap panjang batang adalah  $L$  dan distribusi awal suhu  $f(x)$ . Untuk mencari suhu  $u(x, t)$  di semua tempat pada batang beberapa saat kemudian, kita harus menyelesaikan persoalan berikut

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } & \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \\ \text{S. B. : } & u(0, t) = 0; \quad u(L, t) = 0, \\ \text{K. A. : } & u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

Mengikuti prosedur separasi variabel

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

persamaan diferensialnya menjadi

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{\alpha^2} X(x)T'(t).$$

Bagi kedua ruas dengan  $X(x)T(t)$

$$\frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)},$$

kita dapatkan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Persamaan ini terpenuhi jika dan hanya jika kedua ruas sama dengan sebuah konstanta yang sama

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\mu^2, \\ \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} &= -\mu^2. \end{aligned}$$

Solusi umum dari  $X''(x) = -\mu^2 X(x)$  adalah

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x.$$

Karena syarat batas meminta

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0,$$

diperoleh

$$\begin{aligned} A &= 0, \\ &= \frac{n\pi}{L}, \end{aligned}$$

dengan  $n$  bilangan bulat. Untuk tiap  $n$ , solusi bagian ruangnya diberikan oleh

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Berkaitan dengan  $n$  ini, persamaan untuk  $T(t)$  menjadi

$$T'(t) = -\left(\alpha\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t).$$

Sehingga suku yang bergantung waktu diberikan oleh

$$T_n(x) = \exp\left[-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t\right].$$

Maka untuk tiap bilangan bulat  $n$ , terdapat sebuah solusi  $X_n(x)T_n(t)$ . Solusi umumnya adalah kombinasi linier dari solusi individu ini

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left[-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t\right].$$

Kondisi awal meminta

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x).$$

Ini adalah deret Fourier sinus, koefisien  $c_n$  diberikan oleh

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Sehingga solusi lengkap persoalan ini adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{L} \int_0^L f(x') \sin\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) dx' \right\} \\ \times \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left[-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t\right].$$

Solusi ini tentu memiliki arti. Tidak peduli bagaimana suhu awalnya, ketika  $t \rightarrow \infty$  batang (semua tempat) akan bersuhu  $0^\circ$  seperti dua ujungnya.

### Dua Ujung dengan Suhu Berbeda

Sebuah persoalan yang lebih realistik adalah dua ujung batang memiliki suhu yang berbeda. Dalam kasus ini, persoalan kita menjadi

$$\text{P. D. : } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

$$\text{S. B. : } u(0, t) = 0; \quad u(L, t) = K,$$

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = f(x).$$

Untuk menyelesaikan persoalan di atas adalah dengan mengubahnya ke dalam bentuk yang sudah kita selesaikan sebelumnya. Kita dapat melakukannya dengan memisahkan variabel yang bergantung  $u(x, t)$  dengan cara berikut

$$u(x, t) = v(x, t) - \psi(x).$$

Mengikuti hal ini

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - \psi''(x), \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}.\end{aligned}$$

Sekarang jika kita meminta

$$\psi''(x) = 0, \tag{5.71}$$

$$\psi(0) = 0, \psi(L) = -K \tag{5.72}$$

maka

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \\ v(0, t) &= 0, v(L, t) = 0 \\ v(x, 0) &= f(x) + \psi(x).\end{aligned}$$

Jelas kita dapat menyelesaikan  $v(x, t)$  dengan metode yang sama untuk persoalan sebelumnya. Jika kita dapat mencari  $\psi(x, t)$ , maka  $u(x, t)$  bisa diperoleh.

Dari (5.71)

$$\psi(x) = a + bx.$$

Syarat pada (5.72) meminta

$$a = 0 \quad b = -\frac{K}{L}.$$

Jadi

$$\psi(x) = -\frac{K}{L}x.$$

Sehingga

$$\begin{aligned}u(x, t) &= v(x, t) - \psi(x) \\ &= \frac{K}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left[-\left(\frac{\alpha n\pi}{L}\right)^2 t\right],\end{aligned}$$

dengan

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ f(x) - \frac{K}{L}x \right] \sin \frac{n\pi}{L} x dx.$$

Hasil ini memiliki arti, ketika  $t \rightarrow \infty$ , suhu pada batang akan naik linier dari 0 ke  $K$ .

### 5.5.2 Persoalan Melibatkan Batas Tersekat

Fluks panas yang melewati permukaan pada  $x = 0$  dan  $x = L$  sebanding dengan  $\partial u/\partial x$  pada permukaan tersebut. Pemilihan  $\partial u/\partial x = 0$  untuk meyakinkan tidak adanya transfer panas. Sehingga, jika dua ujungnya tersekat, untuk mencari distribusi suhu  $u(x, t)$ , kita harus menyelesaikan persamaan berikut

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } & \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \\ \text{S. B. : } & \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]_{x=L} = 0. \\ \text{K. A. : } & u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

Dengan separasi variabel diperoleh

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\mu^2 X(x), \\ X'(0) &= X'(L) = 0. \end{aligned}$$

Mudah untuk ditunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} X(x) &= \cos \mu x \\ \mu &= \frac{n\pi}{L}, \end{aligned}$$

dengan  $n$  bilangan bulat berawal dari  $n = 0$ .

Fungsi  $T(t)$  tetaplah

$$T(t) = \exp(-\alpha^2 \mu^2 t).$$

Sehingga solusi umumnya dapat dituliskan sebagai

$$u(x, t) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi}{L} x \exp \left[ - \left( \frac{\alpha n \pi}{L} \right)^2 t \right]. \quad (5.73)$$

Kondisi awal memberikan kita deret Fourier cosinus

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi}{L} x = f(x).$$

Jadi

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.74)$$

Maka (5.73) dengan  $c_n$  yang diberikan oleh (5.74) adalah solusi akhir kita.

### Satu Ujung Suhu Tetap dan Ujung Lain Tersekat

Dalam kasus ini, persoalannya menjadi

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } & \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \\ \text{S. B. : } & u(0, t) = 0, \quad \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]_{x=L} = 0. \\ \text{K. A. : } & u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

Dengan separasi variabel

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\mu^2 X(x), \\ X(0) &= 0, \quad X'(L) = 0. \end{aligned} \tag{5.75}$$

dan

$$T'(t) = -\alpha^2 \mu^2 T(t). \tag{5.76}$$

Dari (5.75) kita mempunyai

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x.$$

Syarat  $X(0) = 0$  mengharuskan  $A = 0$ . Sehingga yang tersisa adalah

$$X(x) = B \sin \mu x$$

jadi

$$X'(x) = \mu B \cos \mu x$$

Syarat batas yang lain  $X'(L) = 0$  menjadi

$$X'(L) = \mu B \cos \mu L = 0.$$

Kondisi ini meminta  $\mu L$  adalah setengah bilangan bulat dikalikan  $\pi$ , yaitu

$$\mu = \left( \frac{2n-1}{2} \right) \frac{\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sehingga untuk tiap  $n$ , solusi bagian ruang adalah

$$X_n(x) = \sin \left( \frac{2n-1}{2} \right) \frac{\pi}{L} x$$

dan solusi yang berkaitan dengan persamaan  $T(t)$  adalah

$$T_n(t) = \exp \left[ - \left( \frac{\alpha(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 t \right].$$



Jadi solusi umumnya adalah kombinasi linier dari  $X_n(x)T_n(t)$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \exp \left[ - \left( \frac{\alpha(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 t \right]. \quad (5.77)$$

Dari kondisi awal

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x = f(x),$$

koefisien  $c_n$  dapat ditentukan yaitu

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sehingga (5.77) dengan  $c_n$  pada rumus di atas adalah solusi dari persoalan kita.

### 5.5.3 Pertukaran Panas pada Batas

Jika terdapat perpindahan panas, maka menurut hukum pendinginan Newton, fungsi suhu memenuhi hubungan

$$hu(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0,$$

dengan konstanta  $h$  adalah koefisien transfer panas yang sesuai.

Anggap kita ingin mengetahui suhu  $u(x, t)$  sebuah papan yang awalnya memiliki suhu seragam  $u_0$ . Permukaan papan pada  $x = 0$  dijaga pada suhu 0, pada permukaan  $x = L$ , perpindahan panas terjadi sehingga

$$u_x(L, t) = -hu(L, t).$$

Untuk mencari  $u(x, t)$  kita harus menyelesaikan persoalan berikut

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \text{S. B. : } & u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = -hu(L, t), \\ \text{K. A. : } & u(x, 0) = u_0. \end{aligned}$$

Lagi, kita mengasumsikan variabelnya dapat dipisahkan

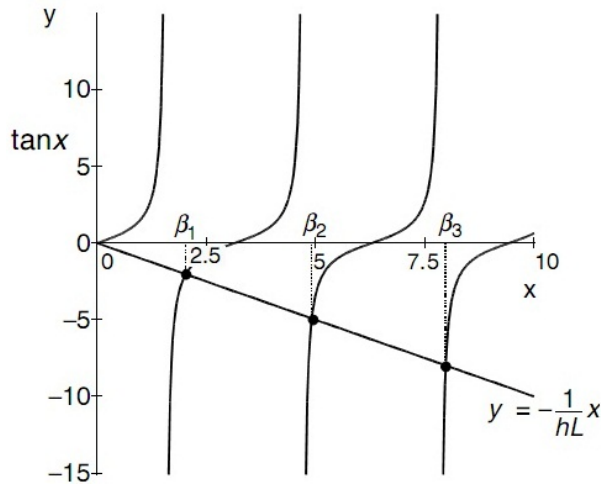
$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

jadi

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

dan

$$T' = -a^2 \lambda^2 T, \quad X'' = -\lambda^2 X.$$



Gambar 5.16: Solusi dari  $\tan \beta = -\beta/hL$  yang merupakan perpotongan  $y = \tan x$  dan  $y = -x/hL$ .

Solusi untuk  $X$  adalah

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Syarat batas  $u(0, t) = 0$  berarti  $X(0) = 0$ . Sehingga

$$X(0) = A = 0.$$

Syarat batas yang lain pada  $x = L$ ,  $u_x(L, t) = -hu(L, t)$ , menjadi

$$X'(L)T(t) = -hX(x)T(t)$$

atau

$$X'(L) = -hX(x).$$

Sehingga

$$B\lambda \cos \lambda L = -hB \sin \lambda L$$

atau

$$\tan \lambda L = -\frac{\lambda}{h}. \quad (5.78)$$

Nilai  $\lambda$  yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen. Anggap  $\lambda L = \beta$ , sehingga

$$\tan \beta = -\frac{\beta}{hL}. \quad (5.79)$$

Solusi persamaan ini adalah titik perpotongan grafik  $y = \tan x$  dan  $y = -x/hL$ , seperti tampak pada Gambar 5.16. Jelas dari gambar bahwa terdapat barisan akar positif  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ . Nilai eigen (5.78), diberikan oleh

$$\lambda_n = \frac{\beta_n}{L}$$

untuk  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dengan kata lain

$$\tan \lambda_n L = -\frac{\lambda_n}{h}. \quad (5.80)$$

Persamaan (5.79) sering muncul dalam aplikasi, solusi untuk beberapa nilai  $hL$  ditabulasikan dalam Table 4.19 of Abramowitz and Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1965).

Fungsi eigen  $X_n$  yang berkaitan dengan nilai eigen  $\lambda_n$  adalah

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x.$$

Menurut teorema Sturm-Liouville, fungsi eigen ini ortogonal. Hal ini bisa dibuktikan secara eksplisit. Anggap

$$I_{nm} = \int_0^L \sin \lambda_n x \sin \lambda_m x dx.$$

Dengan identitas trigonometrik atau dengan mengubahnya dalam bentuk eksponensial, kita dapat membuktikan bahwa integralnya sama dengan

$$I_{nm} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\lambda_n - \lambda_m)L}{(\lambda_n - \lambda_m)} - \frac{\sin(\lambda_n + \lambda_m)L}{(\lambda_n + \lambda_m)} \right]. \quad (5.81)$$

Jika  $\lambda_n \neq \lambda_m$ , maka

$$I_{nm} = \frac{1}{(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)} [\lambda_m \sin \lambda_n L \cos \lambda_m L - \lambda_n \sin \lambda_m L \cos \lambda_n L]$$

Dengan (5.80) yang dapat dituliskan sebagai

$$h \sin \lambda_i L = -\lambda_i \cos \lambda_i L, \quad (5.82)$$

Kita melihat bahwa

$$I_{nm} = \frac{1}{(\lambda_n^2 - \lambda_m^2)} [-h \sin \lambda_n L \sin \lambda_m L + h \sin \lambda_m L \sin \lambda_n L] = 0.$$

Sehingga  $\{\sin \lambda_n x\}$  adalah himpunan ortogonal.

Untuk  $\lambda_n = \lambda_m$ , kita bisa menggunakan aturan L'Hospital pada suku pertama (5.81) atau dengan mengintegrasikannya langsung, hasilnya adalah

$$I_{nn} = \frac{1}{2} \left[ L - \frac{1}{2\lambda_n} \sin 2\lambda_n L \right] = \frac{1}{2} \left[ L - \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n L \cos \lambda_n L \right].$$

Dengan (5.82) lagi

$$I_{nn} = \frac{1}{2} \left[ L + \frac{1}{h} \cos^2 \lambda_n L \right] = \frac{1}{2h} (Lh + \cos^2 \lambda_n L).$$

Berkaitan dengan tiap  $\lambda_n$ , solusi persamaan untuk  $T_n$  adalah

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 a^2 t}.$$

Sehingga solusi umumnya  $u(x, t)$  dapat dinyatakan sebagai

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x.$$

Koefisien  $c_n$  dapat ditentukan dengan kondisi awal  $u(x, 0) = u_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \lambda_n x = u_0.$$

Kalikan kedua ruas dengan  $\sin \lambda_m x$  dan integrasikan dari 0 sampai  $L$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^L \sin \lambda_n x \sin \lambda_m x dx = \int_0^L u_0 \sin \lambda_m x dx,$$

kita mempunyai

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n I_{nm} = c_m I_{mm} = \frac{1}{\lambda_m} (1 - \cos \lambda_m L) u_0.$$

Sehingga

$$c_n = \frac{2hu_0}{Lh + \cos^2 \lambda_n L} \frac{1}{\lambda_n} (1 - \cos \lambda_n L)$$

dan

$$u(x, t) = 2hu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda_n L}{\lambda_n (Lh + \cos^2 \lambda_n L)} e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \sin \lambda_n x,$$

dengan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  adalah akar positif dari

$$\tan \lambda L = -\frac{\lambda}{h}.$$

## 5.6 Persamaan Difusi Dua Dimensi

Anggap sisi-sisi pelat persegi dibatasi oleh garis  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  dan  $y = b$ . Permukaannya disekat sehingga  $\partial u / \partial z = 0$ . Sisi-sisinya dijaga pada suhu 0 dan mula-mula distribusi suhunya adalah  $f(x, y)$ . Kita ingin mencari ekspresi untuk  $u(x, y, t)$ .

Persoalan kita dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \\ (0, y, t) &= 0, \quad u(a, y, t) = 0, \\ (x, 0, t) &= 0, \quad u(x, b, t) = 0, \\ (x, y, 0) &= f(x, y). \end{aligned}$$

Kita mengasumsikan lagi bahwa variabelnya dapat dipisahkan

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t).$$

Sehingga persamaan diferensialnya dapat dituliskan

$$X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t) = \frac{1}{\alpha^2}X(x)Y(y)T'(t).$$

Jika kita bagi dengan  $X(x)Y(y)T(t)$ , kita dapatkan

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)}$$

atau

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Karena ruas kiri adalah fungsi  $x$  saja, dan ruas kanan merupakan fungsi  $t$  dan  $y$ , keduanya bisa sama jika dan hanya jika kedua ruas sama dengan konstanta yang sama

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Untuk alasan yang sama dengan satu dimensi, kita mengantisipasi konstantanya adalah  $-\lambda^2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\lambda^2, \\ \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} &= -\lambda^2. \end{aligned}$$

Persamaan terakhir dapat dituliskan sebagai

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} + \lambda^2.$$

Lagi, kedua ruas harus sama dengan konstanta lain

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \mu^2 = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} + \lambda^2.$$

Mudah untuk dilihat bahwa syarat batas meminta

$$X(0) = X(a) = 0, Y(0) = Y(b) = 0.$$

Dengan syarat ini, persamaan

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x)$$

dapat memiliki solusi hanya jika

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

dan berkaitan dengan tiap  $n$ , solusi  $X_n$  adalah

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a}x.$$

Persamaan untuk  $Y(y)$

$$Y''(y) = -\mu Y(y)$$

memiliki solusi hanya jika

$$\mu = \frac{m\pi}{b}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

dengan

$$Y_m(y) = \sin \frac{m\pi}{b}y.$$

Persamaan untuk  $T(t)$  adalah

$$T'(t) = -(\lambda^2 + \mu^2)\alpha^2 T(t).$$

Untuk tiap himpunan  $(n, m)$ , solusi persamaan ini adalah

$$T_{n,m}(t) = \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{n\pi\alpha}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi\alpha}{b} \right)^2 \right] t \right\}.$$

Kombinasi linier  $X_n(x)Y_m(y)T_{nm}(t)$  adalah solusi paling umum, maka

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin \frac{n\pi}{a}x \sin \frac{m\pi}{b}y \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{n\pi\alpha}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi\alpha}{b} \right)^2 \right] t \right\}. \quad (5.83)$$

Dengan kondisi awal diperoleh

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin \frac{n\pi}{a}x \sin \frac{m\pi}{b}y.$$

Sekarang, jika kita definisikan

$$g_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nm} \sin \frac{n\pi}{a}x, \quad (5.84)$$

kita bisa menuliskan

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x) \sin \frac{m\pi}{b}y.$$

Kita dapat menganggap persamaan ini sebagai deret Fourier sinus dalam  $y$  untuk tiap  $x$  yang tetap, dan koefisien  $g_m(x)$  diberikan oleh

$$g_m(x) = \frac{2}{b} \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{b} dy.$$

Di lain pihak (5.84) adalah deret Fourier sinus dalam  $x$ , koefisien  $c_{nm}$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{2}{a} \int_0^2 g_m(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx \\ &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi y}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} dy dx. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Sehingga solusi persoalan kita adalah (5.83) dengan koefisien  $c_{nm}$  pada (5.85). Persoalan ini adalah contoh lain dari deret Fourier ganda dua dimensi.

## 5.7 Persamaan Laplace

Salah satu persamaan diferensial parsial paling penting dalam fisika adalah persamaan Laplace

$$\nabla^2 u = 0$$

yang diberi nama demikian karena ditemukan matematikawan Perancis Pierre-Simon Laplace (1740–1827). Teori solusi dari persamaan Laplace dinamakan teori potensial. Solusi dari persamaan yang memiliki turunan kedua disebut fungsi harmonik.

Persamaan Laplace bisa diperoleh dengan memilih  $\partial u / \partial t = 0$  dalam persamaan panas. Ini mendeskripsikan distribusi suhu keadaan tetap dalam padatan tanpa adanya sumber atau kehilangan panas.

Persamaan Laplace juga mendeskripsikan potensial listrik dalam daerah yang bebas muatan. Karena medan listrik adalah gradien potensial

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

dan divergensi  $\mathbf{E}$  sama dengan nol dalam ruang bebas, jadi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla V = -\nabla^2 V = 0,$$

potensial  $V$  adalah solusi dari persamaan Laplace. Dengan cara yang sama, potensial medan gravitasi dalam daerah tanpa materi juga memenuhi persamaan Laplace.

Lebih lanjut, persamaan Laplace juga sangat penting dalam hidrodinamika. Persamaan ini berlaku untuk fluida tak kompresibel tanpa sumber, kehilangan dan vortex. Dalam kasus ini, kecepatan diberikan oleh gradien potensial kecepatan yang memenuhi persamaan Laplace.

### 5.7.1 Persamaan Laplace Dua Dimensi

Anggap tiga buah sisi  $x = 0$ ,  $x = a$  dan  $y = 0$  dijaga pada suhu nol

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad (5.86)$$

dan sisi keempat dijaga pada distribusi suhu  $f(x)$

$$u(x, b) = f(x). \quad (5.87)$$

Kita ingin mencari suhu di seluruh pelat setelah distribusi suhu keadaan tetapnya tercapai.

Untuk mencari jawabannya kita harus menentukan solusi persamaan Laplace dua dimensi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

dengan dua buah syarat batas (5.86) dan (5.87).

Kita gunakan lagi metode separasi variabel

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

untuk menuliskan persamaan sebagai

$$X''Y + XY'' = 0.$$

Kita bagi dengan  $u(x, y)$  untuk memperoleh

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Sehingga kedua ruas haruslah sama dengan sebuah konstanta

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2, \quad -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2.$$

Jadi

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\lambda^2 X(x), \\ Y''(y) &= \lambda^2 Y(y). \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa kita memilih konstanta negatif agar  $X(x)$  memenuhi syarat batas. Dengan pilihan ini,  $X(x)$  diberikan oleh

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Syarat batas  $u(0, y) = u(a, y) = 0$  meminta  $X(x)$  adalah salah satu dari

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x,$$

dengan

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Solusi untuk  $Y(y)$  dapat dituliskan dalam  $e^{\lambda y}$  dan  $e^{-\lambda y}$  atau dalam sinus dan cosinus hiperbolik

$$\cosh \lambda y = \frac{1}{2}(e^{\lambda y} + e^{-\lambda y}), \quad \sinh \lambda y = \frac{1}{2}(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}).$$

Dalam persoalan kali ini, akan lebih nyaman jika kita nyatakan dalam fungsi hiperbolik, karena pada  $y = 0$ ,  $\cosh \lambda y = 1$  dan  $\sinh \lambda y = 0$ . Jadi

$$Y(y) = C \cosh \lambda y + D \sin \lambda y$$

dan syarat batas  $u(x, 0) = 0$  mengharuskan  $C$  bernilai nol.

$$Y(0) = C = 0.$$

Sehingga

$$Y_n(y) = \sinh \lambda_n y.$$

Sebuah kombinasi linier dari  $X_n(x)Y_n(y)$  adalah solusi umum

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Untuk memenuhi syarat batas lain  $u(x, b) = f(x)$ , kita harus memiliki

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = f(x).$$

Jelas bahwa  $c_n \sinh(n\pi b/a)$  adalah koefisien ekspansi deret sinus dari  $f(x)$ . Jadi

$$c_n \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Sehingga distribusi suhu pada keadaan tetapnya diberikan oleh

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{L} \int_0^L f(x') \sin \frac{n\pi x'}{a} dx' \right) \left[ \sinh \frac{n\pi b}{a} \right]^{-1} \sinh \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Jelas bahwa solusi untuk persoalan yang lebih umum dengan suhu tak nol sepanjang keempat buah sisinya bisa diperoleh dengan mencari empat buah solusi analog dengan satu yang diperoleh di sini, masing-masing berkaitan dengan persoalan pada suhu nol yang ada pada tiga dari empat buah sisi.

### 5.7.2 Persamaan Laplace Tiga Dimensi

Anggap bahwa suhu pada lima buah permukaan dari sebuah paralelepiped persegi dijaga pada nol derajat

$$u(0, y, z) = u(a, y, z) = u(x, 0, z) = u(x, b, z) = 0, \quad (5.88)$$

$$u(x, y, 0) = 0,$$

dan permukaan keenamnya dijaga pada distribusi suhu

$$u(x, y, d) = f(x, y).$$

Kita ingin mengetahui distribusi suhu tetap pada bagian dalam.

Dalam kasus ini, kita harus menyelesaikan persamaan Laplace tiga dimensi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

dengan syarat batas tertentu.

Dengan asumsi

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z),$$

persamaannya dapat dituliskan sebagai

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}.$$

Karena kedua ruas haruslah sama dengan sebuah konstanta, kita mempunyai

$$\begin{aligned} -\frac{X''}{X} &= \alpha^2 \\ \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} &= \alpha^2. \end{aligned}$$

Mengikuti persamaan kedua

$$\frac{Y''}{Y} = \alpha^2 - \frac{Z''}{Z} = -\beta^2.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} X'' &= -\alpha^2 X, \\ Y'' &= -\beta^2 Y, \\ Z'' &= (\alpha^2 + \beta^2) Z. \end{aligned}$$

Syarat batas homogen (5.88) dipenuhi jika  $X(x)$  dan  $Y(y)$  adalah salah satu fungsi eigen berikut

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sin \alpha_n x, & \alpha_n &= \frac{n\pi}{a}, & n &= 1, 2, 3, \dots, \\ Y_m(y) &= \sin \beta_m y, & \beta_m &= \frac{m\pi}{b}, & m &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Solusi untuk  $Z(z)$  berkaitan dengan  $X_n(x)$  dan  $Y_m(y)$  adalah

$$Z_{nm}(z) = A \cosh \gamma_{nm} z + B \sinh \gamma_{nm} z,$$

dengan

$$\gamma_{nm} = \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Syarat batas  $u(x, y, 0) = 0$  mengharuskan  $Z(0) = 0$

$$Z_{nm}(0) = A = 0.$$

Jadi

$$Z_{nm}(z) = \sinh \gamma_{nm} z.$$

Sehingga, untuk tiap himpunan  $(n, m)$  terdapat sebuah solusi

$$u_{nm}(x, y, z) = X_n(x) Y_m(y) Z_{nm} z.$$

Solusi umumnya diberikan oleh kombinasi linier

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \sinh \gamma_{nm} z.$$

Untuk memenuhi syarat batas permukaan atas, kita memiliki

$$u(x, y, d) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \sinh \gamma_{nm} d = f(x, y).$$

Jelaslah  $c_{nm} \sinh \gamma_{nm} d$  adalah koefisien deret Fourier ganda dari  $f(x, y)$ . Jadi

$$c_{nm} \sinh \gamma_{nm} d = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dy dx.$$

Sehingga distribusi suhu tetap di dalam paralelepiped diberikan oleh

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} [\sinh \gamma_{nm} d]^{-1} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sinh \gamma_{nm} z,$$

dengan

$$a_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dy dx,$$

$$\gamma_{nm} = \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

## 5.8 Persamaan Helmholtz

Pendekatan ekuivalen dengan persamaan Laplace pada Subbab 5.7 terdiri dari pencarian pertama sebuah perkalian dalam bentuk

$$u(x, y, z) = F(x, y) Z(z),$$

dengan faktor  $Z(z)$  diperlakukan dengan cara berbeda karena hanya sepanjang sebuah syarat batas  $z = \text{konstan}$  tak homogen diberikan. Proses separasi variabel memberikan

$$\frac{1}{F(x, y)} \left( \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \right) = -\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k^2,$$

dengan  $k^2$  adalah konstanta separasi. Sehingga  $F(x, y)$  adalah solusi dari persamaan berikut

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} + k^2 F(x, y) = 0.$$

Persamaan ini dinamakan persamaan Helmholtz yang dipelajari pertama oleh Hermann von Helmholtz (1821-1894) yang berhubungan dengan akustik.

Sebagian besar persoalan penting dalam teknik dan fisika dapat direduksi dengan menyelesaikan persamaan Helmholtz. Seperti yang sudah kita lihat, jika kita memasukkan kebergantungan waktu  $\exp(i\omega t)$  dalam persamaan gelombang, bagian ruang diberikan oleh persamaan Helmholtz. Dengan cara yang sama, dengan kebergantungan waktu  $\exp(-\lambda t)$ , bagian ruang persamaan panas juga diberikan oleh persamaan Helmholtz.

Sejauh ini kita hanya menggunakan koordinat Cartesian. Keberhasilan dalam menyelesaikan persoalan dalam bab ini karena kenyataan bahwa persamaan Helmholtz dapat dipisahkan dalam koordinat Cartesian dan batas garis lurus dan bidang dapat dengan mudah dideskripsikan dalam koordinat persegi.

Sebenarnya persamaan Helmholtz dapat dipisahkan dalam 11 sistem koordinat lengkung ortogonal yang berbeda. Tetapi, sebagian besar persoalan dalam bidang teknik dan fisika bisa dirumuskan dalam koordinat cartesian, silinder dan bola. Dalam Bab 6 berikut, kita akan mempelajari solusi persamaan Helmholtz dalam koordinat silinder dan bola.

## 5.9 Latihan

1. Tunjukkan bahwa solusi dari

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \\ u(0, t) &= 0; \quad u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x); \quad u_t(x, 0) = g(x) \end{aligned}$$

adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{n\pi v}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi v}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

dengan

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int_0^2 g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

2. Perpindahan transversal  $u(x, t)$  pada sebuah senar/dawai dengan panjang  $L$  yang terbentang antara titik 0 dan  $L$ , dan awalnya berpindah pada posisi  $u(x, 0) = f(x)$  dan dilepaskan dari keadaan diam adalah solusi dari

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$u(0, t) = 0; \quad u(L, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

Tunjukkan bahwa solusinya bisa dinyatakan

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \frac{n\pi}{L}(x - vt) + B_n \sin \frac{n\pi}{L}(x + vt) \right].$$

Nyatakan  $A_n$  dan  $B_n$  dalam kuantitas yang diberikan pada soal.

3. Tunjukkan gerak tiap titik pada senar dari soal sebelumnya adalah periodik dalam  $t$  dengan periode  $2L/v$ .
4. Jika perpindahan awal dari soal sebelumnya adalah  $f(x) = C \sin \frac{3\pi}{L}x$ , carilah  $u(x, t)$ . Berapakah frekuensi getaran?
5. Jika perpindahan awal dari soal sebelumnya adalah  $f(x) = A \sin \frac{\pi}{L}x + B \sin \frac{2\pi}{L}x$ , carilah  $u(x, t)$ .
6. Carilah solusi dari persoalan syarat batas berikut

$$\text{P. D. : } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

$$\text{S. B. : } u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ L - x & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } u(x, t) = \frac{4L^2}{a\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi a}{L} t.$$

7. Carilah  $u(x, t)$  dari soal sebelumnya jika kecepatan awalnya diganti dengan

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{L}{2} - w, \\ h & \frac{L}{2} - w < x < \frac{L}{2} + w, \\ 0 & \frac{L}{2} + w < x < L. \end{cases}$$

Jawab:

$$u(x, t) = \frac{4Lh}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi w}{L} \sin \frac{(2n-1)\pi}{L} x \sin \frac{(2n-1)\pi a}{L} t$$

8. Jika getaran dawai dipengaruhi oleh redaman kental, persamaan pembangkitannya diberikan oleh

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - 2h \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

dengan  $h$  adalah konstanta. Anggap kondisi awal dan syarat batasnya

$$\text{S. B. : } u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Tunjukkan bahwa dengan mengasumsikan  $h < \pi/L$ ,  $u(x, t)$  diberikan oleh

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ht} \left( \cos \frac{k_n}{L} t + \frac{hL}{k_n} \sin \frac{k_n}{L} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

$$\text{dengan } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad k_n = \sqrt{(n\pi)^2 - (hL)^2}.$$

9. Tunjukkan secara eksplisit fungsi berikut

$$(a) (x + at)^2, \quad (b) 2e^{-(x-at)^2}, \quad (c) 5 \sin[3(x - at)] + (x + at).$$

memenuhi persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

10. Tentukan solusi persoalan kondisi awal

$$\text{P. D. : } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{S. B. : } \begin{cases} u(x, 0) = e^{-x^2} \\ u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2} \right].$$

11. Tentukan solusi persoalan kondisi awal

$$\text{P. D. : } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{S. B. : } \begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } u(x, t) = \frac{1}{4} \left[ e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2} \right].$$

12. Sebuah dawai yang diregangkan antara 0 dan  $L$  bergerak karena adanya tiupan pada  $x_0$ . Persoalan ini dapat dimodelkan dengan kenyataan bahwa dawai pada  $x_0$  diberikan kecepatan tertentu pada  $t = 0$ . Carilah perpindahan senar  $u(x, t)$  dengan menyelesaikan persamaan diferensial berikut

$$\text{P. D. : } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\text{S. B. : } u(0, t) = 0; \quad u(L, t) = 0,$$

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = 0; \quad u_t(x, 0) = Lv_0\delta(x - x_0).$$

$$\text{Jawab: } u(x, t) = \frac{2v_0L}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi a}{L} t.$$

13. Jika gaya luar yang bekerja pada dawai yang diregangkan sebanding dengan jarak dari salah satu ujung, maka perpindahan  $u(x, t)$  disebabkan oleh persamaan diferensial

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + Ax = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Jika kondisi awal dan syarat batasnya

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0,$$

Tentukan  $u(x, t)$ .

$$\text{Jawab: } u(x, t) = \frac{A}{6a^2} x(L^2 - x^2) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{n\pi a}{L} t,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ f(x) - \frac{A}{6a^2} x(L^2 - x^2) \right] \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx.$$

14. Tentukan perilaku getaran membran persegi yang dinyatakan oleh

$$\text{P. D. : } \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\text{S. B. : } z(0, y, t) = z(a, y, t) = 0,$$

$$z(x, 0, t) = z(x, b, t) = 0,$$

jika mula-mula berpindah menurut

$$z(x, y, 0) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

dan kemudian dilepaskan dari keadaan diam.

Jawab:  $z(x, y, 0) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \cos \left[ \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^{1/2} \right] v\pi t$

15. Selesaikan persamaan

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

dengan syarat

$$z(0, y, t) = z(a, y, t) = 0,$$

$$z_y(x, 0, t) = z_y(x, b, t) = 0,$$

$$z(x, y, 0) = f(x, y), \quad z_t(x, y, 0) = 0.$$

Jawab:  $z(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \cos \omega_{nm} t \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b}$ , dengan

$$\omega_{nm} = v\pi \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^{1/2}, \quad a_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} dx dy.$$

16. Carilah solusi persoalan konduksi panas

$$\text{P. D. : } \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

$$\text{S. B. : } u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{3} \sin(4\pi x).$$

Jawab:  $u(x, t) = e^{-(2\pi\alpha)^2 t} \sin(2\pi x) + \frac{1}{3} e^{-(4\pi\alpha)^2 t} \sin(4\pi x)$ .

17. Carilah solusi dari soal sebelumnya jika kondisi awalnya dirubah menjadi

$$u(x, 0) = x - x^2, \quad 0 < x < 1.$$

Jawab:  $u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \left[ e^{-(\pi\alpha)^2 t} \sin(\pi x) + \frac{1}{27} e^{-(3\pi\alpha)^2 t} \sin(3\pi x + \dots) \right]$ .

18. Selesaikan persamaan panas tak homogen berikut

$$\text{P. D. : } \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \sin(\pi x)$$

$$\text{S. B. : } u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = \sin(2\pi x).$$

Jawab:  $u(x, t) = \frac{1}{\pi^2} \left( 1 - e^{-(\pi\alpha)^2 t} \right) \sin(\pi x) + e^{-(2\pi\alpha)^2 t} \sin(2\pi x)$ .



19. Selesaikan persoalan berikut dengan  $u(x, t)$  adalah suhu batang sepanjang  $L$  dengan permukaan samping dan salah satu ujungnya tersekat dan ujung lain dijaga pada suhu tetap.

$$\text{P. D. : } \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

$$\text{S. B. : } u_x(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 1,$$

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = 0.$$

$$\text{Jawab: } u(x, t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} e^{-\left[\frac{(2n+1)\alpha\pi}{2L}\right]^2 t} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2L} x.$$

20. Selesaikan persoalan berikut

$$\text{P. D. : } \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

$$\text{S. B. : } u(0, t) = 0, \quad -u_x(1, t) = K,$$

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = 0.$$

$$\text{Jawab: } u(x, t) = 1 - \frac{8K}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} e^{-\left[\frac{(2n+1)\alpha\pi}{2}\right]^2 t} \sin \frac{(2n+1)\pi}{L} x - Kx.$$

21. Asumsikan suhu  $u(x, t)$  dalam batang dengan difusivitas termal  $a^2$  dan panjang  $L$  yang tersekat sempurna, termasuk ujung pada  $x = 0$  dan  $x = L$ , mula-mula diberikan oleh  $u(x, 0) = f(x)$ , distribusi suhu diberikan oleh solusi persoalan berikut

$$\text{P. D. : } \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

$$\text{S. B. : } u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0,$$

$$\text{K. A. : } u(x, 0) = f(x).$$

Nyatakan  $u(x, t)$  dalam deret tak hingga.

$$\text{Jawab: } u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left[\frac{n\alpha\pi}{L}\right]^2 t} \cos \frac{n\pi}{L} x, \text{ dengan}$$

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

22. Keempat permukaan prisma persegi yang panjang dengan difusivitas termal  $\alpha^2$  terikat dengan bidang  $x = 0, x = a, y = 0$  dan  $y = b$  dijaga pada suhu nol. Jika distribusi suhu awal adalah  $f(x, y)$ , turunkan rumus berikut untuk suhu  $u(x, y, t)$  dalam prisma

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} e^{-\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) \pi^2 \alpha^2 t} \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{m\pi y}{b},$$

dengan

$$a_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dx dy.$$

Jika  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , tunjukkan deret Fourier ganda direduksi menjadi perkalian dua buah deret

$$u(x, y, t) = v(x, t)w(y, t)$$

dan perhatikan bahwa  $v$  dan  $w$  merepresentasikan suhu dalam papan dengan permukaan  $0 \leq x \leq a$  bersuhu nol dan  $0 \leq y \leq b$  dengan suhu mula-mula  $g(x)$  dan  $h(y)$ .

23. Misalkan  $u(x, y)$  adalah suhu tetap dalam pelat tipis yang berbentuk garis semi tak hingga. Misalkan transfer panas permukaan berada pada muka sehingga

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - bu(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; y \geq 0.$$

Jika  $u$  terikat ketika  $y \rightarrow \infty$  dan memenuhi kondisi

$$u(0, y) = 0, \quad u_x(1, y) = -hu(1, y), \quad u(x, 0) = 1.$$

Buktikan

$$u(x, y) = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n} e^{-\sqrt{b+\alpha_n^2}y} \sin \alpha_n x,$$

dengan

$$A_n = \frac{1 - \cos \alpha_n}{h + \cos^2 \alpha_n}$$

dan  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  adalah akar positif dari persamaan

$$\tan \alpha = -\frac{\alpha}{h}.$$

*Petunjuk:* Dengan  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , buktikan

$$X_n(x) = \sin \alpha_n x, \quad Y_n(y) = e^{-\sqrt{b+\alpha_n^2}y},$$

$$\int_0^1 \sin^2 \alpha_n x dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\alpha_n}{4\alpha_n} = 2h(h + \cos^2 \alpha_n).$$

24. Carilah solusi persoalan yang terdiri dari

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Ne^{-kx}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

Di sini suku pada ruas kanan merepresentasikan kehilangan panas akibat peluruhan radioaktif pada batang.

Jawab:  $u(x, t) = U(x, t) + \Psi(x)$ ,

$$U(x, t) = \sum_{n=1} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - \Psi(x)] \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right] e^{-(n\pi a/L)^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\Psi(x) = -\frac{N}{a^2 k^2} [e^{-kx} + (1 - e^{-kL})x/L - 1].$$

25. Carilah potensial listrik di dalam pandu gelombang kotak yang panjangnya tak hingga dengan dinding konduktor. Ukuran pandu tersebut  $L$  adalah  $b$ . Salah satu sisi dengan panjang  $L$  dijaga pada potensial konstan  $V_0$ , dan tiga sisi lainnya ditanahkan ( $V = 0$ ).

Petunjuk: jawabannya diberikan oleh persoalan berikut

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

$$V(0, y) = V(L, y) = V(x, 0) = 0,$$

$$v(x, b) = V_0.$$

Jawab:

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1} \frac{1}{2n-1} \left[ \sinh \frac{(2n-1)\pi b}{L} \right]^{-1} \sinh \frac{(2n-1)\pi}{L} y \sin \frac{(2n-1)\pi}{L} x$$

26. Carilah solusi persoalan yang terdiri dari

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq b. \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0,$$

$$u(0, y) = u_0 \quad u(\infty, y) = 0.$$

Di sini  $u(x, y)$  adalah distribusi suhu tetap dalam pelat kotak semi tak hingga dengan lebar  $b$ , suhu pada ujung yang jauh dan sepanjang dua buah sisi panjang tetap  $0^\circ$ , dan suhu pada  $x = 0$  tetap pada suhu konstan  $u_0$ .

Jawab: 
$$u(x, y) = \sum_{n=1} \frac{4u_0}{(2n-1)\pi} e^{-(2n-1)\pi x/b} \sin \frac{2n-1}{b} \pi y.$$

27. Tentukan solusi persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

dalam daerah persegi  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq b$  yang memenuhi syarat

$$u(0, y) = u(L, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x).$$

*Petunjuk:* Buktikan  $u_{n,1} = \sinh \frac{n\pi}{L} y \sin \frac{n\pi}{L} x$  dengan syarat batas:  $u(0, y) = u(L, y) = u(x, 0) = 0$ , dan  $u_{n,2} = \sinh \frac{n\pi}{L} (b - y) \sin \frac{n\pi}{L} x$  dan syarat batas:  $u(0, y) = u(L, y) = u(x, b) = 0$ .  $u_n = u_{n,1} + u_{n,2}$ .

Jawab:  $u(x, y) = \sum_{n=1} \left[ a_n \sinh \frac{n\pi}{L} y \sin \frac{n\pi}{L} x + b_n \sinh \frac{n\pi}{L} (b - y) \sin \frac{n\pi}{L} x \right]$ , dengan

$$a_n = \left[ \sinh \frac{n\pi b}{L} \right]^{-1} \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$b_n = \left[ \sinh \frac{n\pi b}{L} \right]^{-1} \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

## 6

# Persamaan Diferensial Parsial dengan Batas Lengkung

Dalam Bab 5, kita melihat banyak persoalan fisika bisa diformulasikan dalam persamaan diferensial parsial. Solusi persamaan ini harus memenuhi syarat batas tertentu. Kebanyakan persoalan ini melibatkan operator Laplacian. Bergantung pada persoalan yang spesifik, baik persamaan Laplace atau persamaan Helmholtz harus diselesaikan.

Ketika syarat batas adalah garis lurus atau bidang yang saling tegak lurus, sistem koordinat Cartesian sangatlah sesuai. Ketika persamaan diferensial parsial direduksi menjadi persamaan diferensial biasa dengan separasi variabel, kita bisa memperoleh solusi dari persamaan diferensial parsial ini. Nilai eigen dan fungsi eigen yang diperoleh dari syarat batas bisa dengan mudah diperoleh dan solusi persamaan diferensial bisa diperoleh dengan ekspansi Fourier.

Namun, persoalan fisika ada yang melibatkan batas-batas dalam bentuk lingkaran, silinder, dan bola. Dalam kasus ini, jauh lebih mudah untuk menggunakan koordinat polar, silinder, atau bola. Persamaan diferensial parsial yang dinyatakan dalam koordinat ini lebih rumit. Untuk sebagian besar persoalan, suku radial dan sudut bisa dipisahkan, tetapi persamaan diferensial biasa untuk koordinat sudut berbeda dengan untuk koordinat radial. Beberapa dari persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial dengan koefisien variabel yang tidak dapat diselesaikan dengan fungsi dasar. Kita telah memecahkan sebagian besar dari persamaan diferensial biasa dalam Bab 4 dengan fungsi Bessel dan Legendre. Secara umum, solusi untuk persoalan dengan simetri silinder dapat dinyatakan dalam deret Fourier-Bessel, dan untuk persamaan dengan simetri bola, dengan deret Fourier-Legendre. Tetapi syarat batas yang menentukan bagaimana solusi dari persamaan diferensial biasa harus disatukan untuk memecahkan persoalan tertentu. Dua persamaan diferensial parsial identik dengan syarat batas yang sedikit berbeda bisa memberikan hasil yang berbeda sepenuhnya.

Kita tidak mungkin untuk membahas semua jenis persamaan diferensial parsial yang ditemui dalam bidang teknik dan fisika. Dalam bab ini, kita akan membahas terutama persamaan Laplace  $\nabla^2 u = 0$  dan persamaan Helmholtz  $\nabla^2 u + ku = 0$ , Karena keduanya ditemui dalam berbagai jenis persoalan praktis. Kedua persamaan ini terlihat mirip, tetapi solusinya benar-benar berbeda. Sebagai contoh, solusi radial dari persamaan Laplace dalam koordinat bola diberikan oleh  $r$  pangkat bilangan bulat negatif atau positif, sedangkan solusi dari persamaan Helmholtz diberikan oleh fungsi Bessel sferis. Dibandingkan dengan mengikuti prosedur biasa untuk mengklasifikasikan persamaan diferensial parsial dalam jenis hiperbolik, parabolik, dan eliptikal, kita akan menggunakan contoh-contoh yang cukup untuk menggambarkan bagaimana metode yang serupa dapat digunakan untuk memecahkan persamaan ini. Hal ini penting untuk mengetahui karakteristik umum dari berbagai jenis persoalan fisik yang dapat diselesaikan dengan metode ini. Jika tidak maka hal yang rinci mungkin terlihat membingungkan. Pemeriksaan yang seksama dari daftar isi dapat membantu untuk mendapatkan gambaran keseluruhan dari persoalan ini.

## 6.1 Laplacian

Seperti yang sudah kita lihat, operator Laplacian

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

muncul dalam banyak persamaan diferensial parsial yang berbeda dalam fisika matematika. Mengapa jumlah tiga buah turunan kedua telah begitu banyak berhubungan dengan hukum alam? Jawabannya terletak pada kenyataan bahwa Laplacian dari sebuah fungsi adalah perbandingan antara nilai fungsi pada titik dan nilai rata-rata fungsi pada titik-titik di sekitarnya. Hal ini jelas dalam satu dimensi. Jika  $u''(x) = 0$ , maka  $u(x) = mx + b$ . Dapat dengan mudah dibuktikan

$$u(x) = \frac{1}{2}[u(x + \epsilon) + u(x - \epsilon)],$$

merupakan nilai rata-rata dua buah titik yang berdekatan sama dengan nilai pada titik tengah. Selanjutnya, jika  $u''(x) > 0$ , maka kurva  $u(x)$  cekung ke atas, dan nilai rata-rata dua buah titik yang berdekatan lebih besar daripada nilai pada titik tengah. Jika  $u''(x) < 0$ , maka kurva cekung ke bawah, dan nilai rata-rata dua buah titik berdekatan lebih kecil dari nilai pada titik tengah.

Laplacian dapat dianggap sebagai turunan kedua yang digeneralisasi untuk dimensi yang lebih tinggi. Kita akan membuktikan bahwa dalam dua dimensi, jika

- $\nabla^2 u(x, y) = 0$ , maka nilai rata-rata  $u$  pada lingkaran kecil adalah sama dengan nilai  $u$  di pusat lingkaran. Ini adalah apa yang membuat Laplacian sehingga berguna, karena

- $\nabla^2 u(x, y) > 0$ , berarti permukaan cekung ke atas, dan nilai  $u$  di tengah lingkaran kecil kurang dari nilai rata-rata dari  $u$  pada lingkaran, dan
- $\nabla^2 u(x, y) < 0$  berarti permukaan cekung ke bawah, dan  $u(x, y)$  lebih besar dari rata-rata dari  $u$  pada sekitarnya.

Pendapat yang sama juga bisa digunakan untuk  $\nabla^2 u$  dalam tiga dimensi jika kita mengganti lingkaran dengan bola.

Dengan prinsip ini, kita bisa memiliki pemahaman intuitif beberapa dasar persamaan diferensial parsial dalam fisika.

Persamaan gelombang:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u.$$

Jika kita menggunakan persamaan ini untuk menggambarkan getaran membran, maka  $u$  adalah perpindahan (tinggi) dari membran. Persamaan ini mengatakan membran pada suatu titik mengalami percepatan ke atas jika membran pada titik itu berada di bawah rata-rata sekitarnya.

Persamaan difusi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u.$$

Jika kita menggunakan persamaan ini untuk menggambarkan perpindahan panas, maka  $u$  adalah suhu. Persamaan ini mengatakan bahwa suhu pada suatu titik akan meningkat (laju perubahan positif) jika suhu pada titik yang kurang dari rata-rata suhu pada lingkaran di sekitar titik tersebut.

Persamaan Laplace:

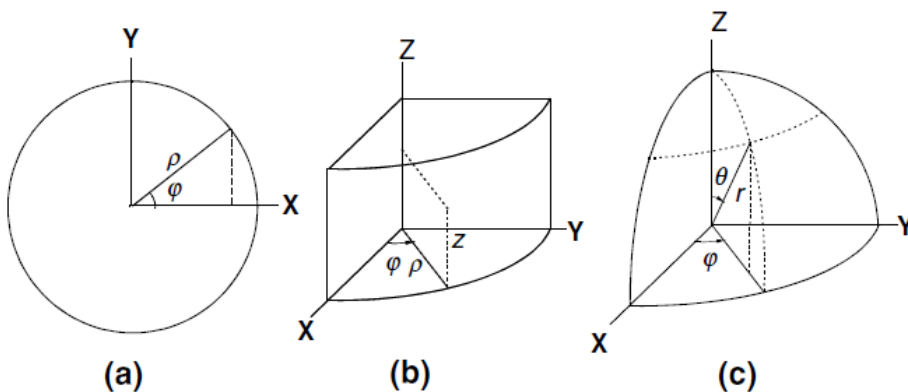
$$\nabla^2 u = 0.$$

Persamaan ini menggambarkan kondisi mantap  $u$ , dengan tingkat perubahan dengan terhadap waktu adalah nol. Sebagai contoh, jika  $u$  adalah suhu, maka persamaan ini mengatakan bahwa suhu tidak akan berubah jika suhu pada suatu titik sama dengan suhu rata-rata titik sekitarnya.

Persamaan Poisson:

$$\nabla^2 u(x, y) = -g(x, y).$$

Jika  $g(x, y)$  adalah positif pada sebuah titik, dan  $u(x, y)$  adalah suhu pada saat itu, maka persamaan ini mengatakan bahwa suhu pada titik yang lebih besar daripada yang sekitarnya. Dengan kata lain, panas yang dihasilkan pada titik itu, dan  $g(x, y)$  adalah sumber panas. Jelas, arti dari Laplacian tidak akan berubah, tidak peduli sistem koordinat apa yang kita pilih untuk mengungkapkannya. Banyak persoalan dalam dua dan tiga dimensi lebih alami dinyatakan dalam koordinat polar, silinder, atau bola koordinat, baik karena syarat batas, atau karena kita ingin untuk menggunakan



Gambar 6.1: (a) Koordinat polar, (b) koordinat silinder, (c) koordinat bola.

sifat simetri dari persoalan yang ditinjau. Koordinat ini ditunjukkan pada Gambar 6.1. Mari kita mengingat rumus dari operator Laplacian di sistem ini.

Dalam koordinat polar:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Dalam koordinat silinder:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dalam koordinat bola:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

## 6.2 Persamaan Laplace Dua Dimensi

Misalkan kita perlu mencari solusi dari persamaan Laplace dua dimensi yang memiliki perilaku ditentukan pada lingkaran. Tentu kita ingin menulis persamaan dalam koordinat polar

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho, \varphi) \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(\rho, \varphi) = 0,$$

sehingga kita bisa mengakomodasi syarat batas dengan memeriksa solusi untuk  $\rho = a$ . Untuk menyelesaikan persamaan dengan separasi variabel, kita mengasumsikan  $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$  dan masukkan dalam persamaan di atas

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0.$$



Bagi dengan  $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$  dan kalikan dengan  $\rho^2$ , kita memiliki

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0$$

atau

$$\frac{1}{R(\rho)} \left( \rho^2 \frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = -\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2}.$$

Karena suku pada ruas kiri adalah fungsi dari  $\rho$  saja, sedangkan suku pada ruas kanan hanya bergantung pada  $\varphi$ , keduanya harus sama dengan sebuah konstanta yang sama. Jadi kita memperoleh dua persamaan diferensial biasa

$$\frac{1}{R(\rho)} \left( \rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) = \lambda, \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -\lambda, \quad (6.2)$$

dengan  $\lambda$  adalah konstanta separasi. Konstanta separasi harus sama dengan  $n^2$  dengan  $n$  bilangan bulat untuk alasan berikut. Karena  $(\rho, \varphi)$  dan  $(\rho, \varphi + 2\pi)$  adalah titik yang sama, untuk mendeskripsikan sistem fisika yang nyata, kita memerlukan  $\Phi(\varphi)$  adalah fungsi periodik dengan periode  $2\pi$ . Artinya,  $\Phi(\varphi)$  harus memenuhi syarat

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Dengan  $\lambda = n^2$ , (6.2) menjadi

$$\frac{d^2 \Phi_n(\varphi)}{d\varphi^2} = -n^2 \Phi_n(\varphi).$$

Hanya jika  $n$  bilangan bulat ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) solusi persamaan ini bisa berupa fungsi periodik

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi. \quad (6.3)$$

Perhatikan bahwa untuk  $n = 0$ , solusi  $\Phi_0(\varphi) = \varphi$  tidaklah periodik, sehingga tidak dibolehkan. Tetapi, solusi lain untuk  $n = 0$ , yakni  $\Phi_0(\varphi) = \text{konstanta}$  yang memenuhi syarat periodik dan dimasukkan dalam (6.3).

Solusi suku radialnya berasal dari (6.1) dengan  $n$  yang sama

$$\rho^2 \frac{d^2 R_n(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_n(\rho)}{d\rho} = n^2 R_n(\rho). \quad (6.4)$$

Ini adalah persamaan diferensial Euler-Cauchy. Metode standarnya adalah dengan memilih

$$\rho = e^x, \quad \text{sehingga} \quad x = \ln \rho \quad \text{dan} \quad \frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{\rho}.$$

Diperoleh

$$\frac{dR_n}{d\rho} = \frac{dR_n}{dx} \frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dR_n}{dx},$$

$$\frac{d^2 R_n(\rho)}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dR_n}{dx} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{dR_n}{dx} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 R_n}{dx^2},$$

jadi (6.4) dapat dituliskan sebagai

$$\rho^2 \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 R_n}{dx^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dR_n}{dx} \right) + \rho \frac{1}{\rho} \frac{dR_n}{dx} - n^2 R_n = 0,$$

atau

$$\frac{d^2 R_n}{dx^2} - n^2 R_n = 0.$$

Jelaslah

$$R_n(x) = \begin{cases} C_n e^{nx} + D_n e^{-nx} & \text{untuk } n \neq 0, \\ C_0 + D_0 x & \text{untuk } n = 0. \end{cases}$$

Jadi dengan  $\rho = e^x$ , kita memiliki

$$R_n(\rho) = \begin{cases} C_n \rho^n + D_n \rho^{-n} & \text{untuk } n \neq 0, \\ C_0 + D_0 \ln \rho & \text{untuk } n = 0. \end{cases}$$

Untuk tiap bilangan bulat  $n$ , solusinya adalah  $u_n(\rho, \varphi) = R_n(\rho)\varphi_n(\varphi)$ . Kombinasi liniernya memberikan solusi umum

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n u_n(\rho, \varphi).$$

Sehingga kita bisa menuliskan solusi umumnya

$$u(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \sin n\varphi], \quad (6.5)$$

di sini kita telah menamai ulang konstanta kombinasi untuk kenyamanan.

Setiap kali kita memecahkan persamaan di daerah yang mengandung titik asal, kita harus memilih  $b_0, b_n$ , dan  $d_n$  nol, karena kita hanya tertarik dalam solusi yang terbatas dan  $\ln \rho$  maupun  $\rho^{-n}$  nilainya menuju tak hingga ketika  $\rho$  mendekati nol.

Demikian pula jika daerah tersebut membesar tak hingga, maka  $a_0, b_0, a_n$  dan  $c_n$  harus dipilih nol, kecuali ada sumber di tak terhingga. Misalnya, medan listrik seragam membentang dari  $-\infty$  sampai  $+\infty$  harus dijelaskan oleh potensial listrik yang tidak hilang di tak terhingga. (Potensial listrik memenuhi persamaan Laplace, gradiennya adalah medan listrik). Dalam kasus ini  $a_1$  atau  $c_1$  mungkin tidak nol, tapi sisa dari,  $a_n, c_n$ , dan  $b_0$  semuanya harus tetap nol.

Contoh-contoh berikut mengilustrasikan bagaimana konstanta ditentukan dengan syarat batas.

**Contoh 6.2.1.** Buktikan bahwa jika suhu  $f(\varphi)$  pada batas piringan sirkular dengan jari-jari  $r_0$  diberikan oleh

$$f(\varphi) = \sum_{n=0} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

sehingga suhu mantap pada titik sebarang pada piringan

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0} (\rho/r_0)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Carilah distribusi suhu mantap pada piringan sirkular berjari-jari  $r_0$ , jika suhu batas setengah lingkaran atas dijaga pada  $100^\circ$  dan batas bawah  $0^\circ$ .

**Solusi 6.2.1.** Fungsi suhu  $u(\rho, \varphi)$  memenuhi persamaan Laplace untuk distribusi mantap. Sehingga kita harus menyelesaikan syarat batas berikut

$$\text{P. D. : } \nabla^2 u(\rho, \varphi) = 0,$$

$$\text{S. B. : } u(r_0, \varphi) = f(\varphi).$$

Karena titik asal ada di dalam pelat, agar solusinya berhingga, kita harus memilih  $b_n$  dan  $d_n$  pada (6.5) nol. Sehingga kita mempunyai

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0} (a_n \rho^n \cos n\varphi + c_n \rho^n \sin n\varphi).$$

Jadi pada  $\rho = r_0$ , kita memiliki

$$u(r_0, \varphi) = \sum_{n=0} (a_n r_0^n \cos n\varphi + c_n r_0^n \sin n\varphi).$$

Tetapi diberikan bahwa

$$u(r_0, \varphi) = f(\varphi) = \sum_{n=0} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Jelaslah

$$a_n = \frac{A_n}{r_0^n}, \quad c_n = \frac{B_n}{r_0^n}.$$

Substitusi pada persamaan untuk  $u(\rho, \varphi)$  kita peroleh hasil yang diinginkan

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0} (\rho/r_0)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Sekarang kita dapat mengekspansikan syarat batas

$$u(r_0, \varphi) = f(\varphi) = \begin{cases} 100, & \text{untuk } 0 < \varphi < \pi, \\ 0, & \text{untuk } \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

ke dalam deret Fourier

$$f(\varphi) = \sum_{n=0} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

dengan koefisien-koefisiennya adalah

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r_0, \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 100 d\varphi = 50,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r_0, \varphi) \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 100 \cos n\varphi d\varphi = 0, \quad n \neq 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r_0, \varphi) \sin n\varphi d\varphi = \frac{100}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin n\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ \frac{200}{n\pi}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}.$$

Jadi distribusi suhu di dalam piringan adalah

$$u(\rho, \varphi) = 50 + \frac{200}{\pi} \sum_{n \text{ ganjil}} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n \sin n\varphi.$$

Perhatikan di sini  $u(\rho, \varphi)$  pada  $\varphi = 0$  dan  $\phi$  adalah 50. Secara umum deret Fourier memberikan nilai rata-rata pada titik-titik diskontinu. Dalam kasus ini 50 adalah nilai rata-rata 0 dan 100.

**Contoh 6.2.2.** Tentukan suhu mantap pada pelat sirkular dalam sektor  $0 \leq \varphi \leq \theta_0$ ,  $0 \leq \rho \leq r_0$  jika suhu sepanjang sisi lurus dijaga nol dan sepanjang sisi lengkung dijaga  $u_0$ .

**Solusi 6.2.2.** Untuk mencari suhu mantap  $u(\rho, \varphi)$ , kita harus menyelesaikan persoalan syarat batas berikut

$$\text{P. D. : } \nabla^2 u(\rho, \varphi) = 0,$$

$$\text{S. B. : } u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, \theta_0) = 0, \quad u(r_0, \varphi) = u_0.$$

Asumsi separasi biasa yang digunakan  $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$  memberikan

$$\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} = \lambda R(\rho),$$

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = -\lambda \Phi(\varphi).$$

Syarat batas sepanjang sisi lurus meminta

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(\theta_0) = 0.$$

Persamaan diferensial dan syarat batas untuk  $\Phi(\varphi)$  membentuk persoalan Sturm-Liouville. Sehingga kita tahu nilai eigen  $\lambda$  positif  $\lambda = \alpha^2$ , dan fungsi eigennya ortogonal. Sehingga

$$\Phi(\varphi) = A \cos \alpha\varphi + B \sin \alpha\varphi.$$

Karena  $\Phi(0) = A = 0$ , syarat batas  $\Phi(\theta_0) = 0$  meminta  $\alpha\theta_0 = 0$ . Jadi

$$\alpha = \frac{n\pi}{\theta_0},$$

dengan  $n$  bilangan bulat tak nol. Sehingga fungsi eigennya adalah

$$\Phi_n(\varphi) = \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \varphi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Perhatikan bahwa  $n = 0$  tidak diperkenankan dalam kasus ini. Persamaan radial untuk  $R_n(\rho)$  adalah

$$\rho^2 \frac{d^2 R_n(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_n(\rho)}{d\rho} = \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 R_n(\rho).$$

Solusi berhingga persamaan ini

$$R_n(\rho) = c_n \rho^{n\pi/\theta_0}.$$

Solusi umumnya adalah

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1} c_n \rho^{n\pi/\theta_0} \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \varphi.$$

Syarat batas  $u(r_0, \varphi) = u_0$  meminta  $c_n$  memenuhi hubungan

$$u_0 = \sum_{n=1} c_n r_0^{n\pi/\theta_0} \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \varphi.$$

Karena  $\left\{ \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \varphi \right\}$  adalah himpunan ortogonal lengkap pada selang  $0 \leq \varphi \leq \theta_0$ ,

$$c_n r_0^{n\pi/\theta_0} = \frac{1}{\int_0^{\theta_0} \sin^2 \frac{n\pi}{\theta_0} \varphi d\varphi} \int_0^{\theta_0} u_0 \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \varphi d\varphi.$$

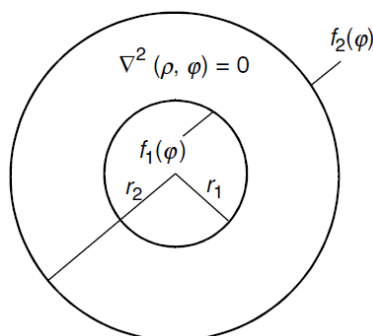
Integral ini dapat dihitung dengan mudah,

$$\int_0^{\theta_0} u_0 \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \varphi d\varphi = \begin{cases} u_0 \frac{2\theta_0}{n\pi} & \text{untuk } n \text{ ganjil,} \\ 0 & \text{untuk } n \text{ genap,} \end{cases}$$

$$\int_0^{\theta_0} \sin^2 \frac{n\pi}{\theta_0} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \theta_0.$$

Sehingga suhu mantap pada sektor tersebut adalah

$$u(\rho, \varphi) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n \text{ ganjil}} \frac{1}{n} \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^{n\pi/\theta_0} \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \varphi.$$



Gambar 6.2: (a) Koordinat polar, (b) koordinat silinder, (b) koordinat bola.

**Contoh 6.2.3.** Anggap bahwa suhu sepanjang lingkaran dalam sebuah cincin dengan jari-jari  $r_1$  dijaga sebesar  $f_1(\varphi)$  dan lingkaran luar berjari-jari  $r_2$  dijaga sebesar  $f_2(\varphi)$  seperti terlihat pada Gambar 6.2. Tentukan suhu mantap pada cincin jika

- (a)  $f_1(\varphi) = 0$ ,  $f_2(\varphi) = \sin \varphi$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ ,  
 (b)  $f_1(\varphi) = 1$ ,  $f_2(\varphi) = 10$ ,  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = e$ .

**Solusi 6.2.3.** Suhu mantap ditentukan oleh syarat batas berikut

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } & \nabla^2 u(\rho, \varphi) = 0, \quad r_1 \leq \rho \leq r_2, \\ \text{S. B. : } & u(r_1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad u(r_2, \varphi) = f_2(\varphi). \end{aligned}$$

Karena daerah yang kita tinjau tidak mengandung titik asal maupun menuju tak hingga, maka semua suku pada (6.5) harus dipertahankan. Sehingga syarat batasnya memiliki bentuk

$$\begin{aligned} f_1(\varphi) &= a_0 + b_0 \ln r_1 \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r_1^n + b_n r_1^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r_1^n + d_n r_1^{-n}) \sin n\varphi], \\ f_2(\varphi) &= a_0 + b_0 \ln r_2 \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n r_2^n + b_n r_2^{-n}) \cos n\varphi + (c_n r_2^n + d_n r_2^{-n}) \sin n\varphi], \end{aligned}$$

Menurut teori deret Fourier

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 \ln r_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi, \\ a_0 + b_0 \ln r_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

dan untuk  $n \neq 0$

$$a_n r_1^n + b_n r_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi,$$

$$a_n r_2^n + b_n r_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi,$$

$$c_n r_1^n + d_n r_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi,$$

$$c_n r_2^n + d_n r_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi.$$

Dari persamaan ini, kita dapat menentukan konstanta  $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n,$  dan  $d_n$ .

(a) Untuk  $f_1(\varphi) = 0, f_2(\varphi) = \sin \varphi, r_1 = 1, r_2 = 2,$  semua integral sama dengan nol kecuali

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = 1.$$

Semua konstanta sama dengan nol kecuali

$$\begin{aligned} c_1 + d_1 &= 0, \\ c_1 2 + d_1 \frac{1}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$c_1 = \frac{2}{3}, \quad d_1 = -\frac{2}{3}.$$

Jadi

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2}{3} \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi.$$

(b) Untuk  $f_1(\varphi) = 1, f_2(\varphi) = 10, r_1 = 1, r_2 = e,$  hanya tidak menghilangkan koefisien-koefisiennya

$$a_0 + b_0 \ln r_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \, d\varphi = 1,$$

$$a_0 + b_0 \ln r_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \, d\varphi = 10.$$

Jadi  $a_0 = 1, b_0 = 10 - a_0 = 9.$  Oleh karena itu

$$u(\rho, \varphi) = 1 + 9 \ln \rho.$$

**Contoh 6.2.4.** Selesaikan persoalan syarat batas berikut

$$\text{P. D. : } \nabla^2 u(\rho, \varphi) = 0,$$

$$\text{S. B. : } u(\rho \rightarrow \infty, \varphi) = E_0 \rho \cos \varphi, \quad u(r_0, \varphi) = 0.$$

(Solusinya berupa potensial listrik yang dihasilkan dengan meletakkan konduktor silinder panjang yang ditanahkan berjari-jari  $r_0$  dengan medan listrik sebelumnya  $-\mathbf{E}_0$  dengan sumbu silinder tegak lurus medan  $\mathbf{E}_0$ ).

**Solusi 6.2.4.** Karena  $\rho^{-n}$  nilainya mendekati nol ketika  $\rho \rightarrow \infty$ , secara asimptotik (6.5) menjadi

$$u(\rho \rightarrow \infty, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \rho^n \cos n\varphi + c_n \rho^n \sin n\varphi].$$

Sehingga syarat  $u(\rho \rightarrow \infty, \varphi) = E_0 \rho \cos \varphi$  meminta  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_n$  dan  $c_n$  nol, kecuali  $a_1 = E_0$ . Yang tersisa dari (6.5) adalah

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \rho^{-n} \cos n\varphi + d_n \rho^{-n} \sin n\varphi] + E_0 \rho \cos \varphi.$$

Pada  $\rho = r_0$ ,  $u(r_0, \varphi = 0)$  menjadi

$$(b_1 r_0^{-1} + E_0 r_0) \cos \varphi + d_1 r_0^{-1} \sin \varphi + \sum_{n=2}^{\infty} [b_n r_0^{-n} \cos n\varphi + d_n r_0^{-n} \sin n\varphi] = 0.$$

Hal ini meminta semua koefisien hilang. Ini berarti semua  $b_n$  dan  $d_n$  nilainya nol kecuali  $b_1$  dan

$$(b_1 r_0^{-1} + E_0 r_0) = 0, \text{ atau } b_1 = -E_0 (r_0)^2.$$

Sehingga solusinya diberikan oleh

$$u(\rho, \varphi) = E_0 \rho \cos \varphi - E_0 r_0^2 \rho^{-1} \cos \varphi = E_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{\rho^2}\right) \rho \cos \varphi. \quad (6.6)$$

### 6.2.1 Rumus Integral Poisson

Marilah kita kembali sejenak pada solusi  $u(\rho, \varphi)$  persamaan Laplace dalam interior piringan sirkular berjari-jari  $r_0$ . Jika syarat batasnya  $u(r_0, \varphi) = f(\varphi)$ , maka

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho/r_0)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

dengan  $A_n$  dan  $B_n$  adalah koefisien-koefisien Fourier dari

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$



Dengan mensubstitusikan rumus koefisien Fourier ini pada  $u(\rho, \varphi)$ , kita mempunyai

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') d\varphi' + \sum_{n=1} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') \cos n\varphi' d\varphi' \right] \cos n\varphi \\ &\quad + \sum_{n=1} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') \sin n\varphi' d\varphi' \right] \sin n\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n [\cos n\varphi' \cos n\varphi + \sin n\varphi' \sin n\varphi] \right\} d\varphi' \end{aligned}$$

Karena

$$\cos n\varphi' \cos n\varphi + \sin n\varphi' \sin n\varphi = \cos n(\varphi' - \varphi) = \operatorname{Re} \left[ e^{in(\varphi' - \varphi)} \right],$$

dengan  $\operatorname{Re}$  adalah suku riil, sehingga

$$\sum_{n=1} \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^n [\cos n\varphi' \cos n\varphi + \sin n\varphi' \sin n\varphi] = \operatorname{Re} \sum_{n=1} \left[ \frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)} \right]^n.$$

Dengan menggunakan fakta bahwa

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \text{ untuk } |z| < 1$$

dan  $\rho/r_0 < 1$ , kita bisa menuliskan

$$\begin{aligned} \sum_{n=1} \left[ \frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)} \right]^n &= \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)}} - 1 = \frac{\frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)}}{1 - \frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)}} \\ &= \frac{\frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)}}{1 - \frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)}} \cdot \frac{1 - \frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)}}{1 - \frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)}} = \frac{\frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)} - \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2}{1 - 2\frac{\rho}{r_0} \cos(\varphi' - \varphi) + \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2} \end{aligned}$$

dan

$$\operatorname{Re} \sum_{n=1} \left[ \frac{\rho}{r_0} e^{i(\varphi' - \varphi)} \right]^n = \frac{(\rho/r_0) \cos(\varphi' - \varphi) - (\rho/r_0)^2}{1 - 2(\rho/r_0) \cos(\varphi' - \varphi) + (\rho/r_0)^2}.$$

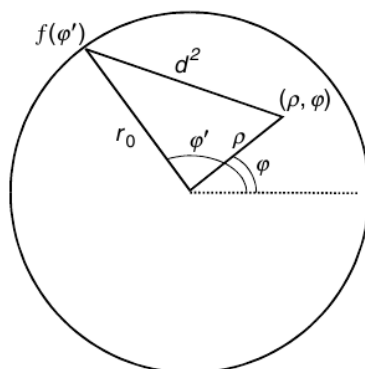
Jadi

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') \left\{ 1 + 2 \frac{(\rho/r_0) \cos(\varphi' - \varphi) - (\rho/r_0)^2}{1 - 2(\rho/r_0) \cos(\varphi' - \varphi) + (\rho/r_0)^2} \right\} d\varphi' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') \left\{ \frac{r_0^2 - \rho^2}{r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(\varphi' - \varphi) + \rho^2} \right\} d\varphi'. \end{aligned}$$

Hasil ini dikenal sebagai rumus integral Poisson.

Berdasarkan hukum cosinus

$$r_0^2 - 2\rho r_0 \cos(\varphi' - \varphi) + \rho^2 = d^2,$$



Gambar 6.3: Rumus integral Poisson

dengan  $d$  adalah jarak diantara  $u(\rho, \varphi)$  dan titik  $(r_0, \varphi)$  pada batas, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6.3.

Maka rumus ini bisa ditulis sebagai

$$u(\rho, \varphi) = \frac{r_0^2 - \rho^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi')}{d^2} d\varphi'.$$

Ini menunjukkan bahwa nilai  $u(\rho, \varphi)$  ada semua titik di dalam lingkaran berjari-jari  $r_0$  adalah jumlah dari nilai-nilai fungsi  $f(\varphi')$  yang diboboti pada keliling lingkaran, dan bobot diberikan oleh  $(r_0^2 - \rho^2)/d^2$ . Jika kita akan meningkatkan nilai  $f(\varphi')$  bahkan pada segmen kecil dari batas, ini akan menghasilkan peningkatan yang sesuai pada nilai  $u$  di setiap titik interior. Hal ini sesuai dengan fakta bahwa sistem fisik yang digambarkan oleh persamaan Laplace dalam keadaan stabil. Peningkatan atau penurunan pada batas membutuhkan daerah interior untuk menyesuaikan diri untuk membawa sistem kembali ke keadaan setimbang.

Di pusat lingkaran,  $\rho = 0$  dan  $r_0 = d$ , rumusnya menjadi

$$u(\text{pusat}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi') d\varphi'.$$

Dengan kata lain nilai rata-rata  $u$  pada lingkaran adalah sama dengan nilai  $u$  di pusat lingkaran. Ini dikenal sebagai sifat nilai rata-rata persamaan Laplace.

Dari sifat ini, kita dapat menyimpulkan fakta bahwa solusi dari persamaan Laplace tidak dapat memiliki maksimum atau minimum lokal di daerah interior. Jika  $u(p)$  adalah maksimum lokal di titik  $P$ , maka harus ada lingkaran kecil di sekitar  $P$ , di setiap tempat padanya nilai  $u$  lebih kecil dari  $u(p)$ . Jelas nilai rata-rata  $u$  pada lingkaran yang tidak mungkin sama dengan  $u(p)$ . Hal ini melanggar sifat nilai rata-rata dari persamaan Laplace. Argumen yang mirip juga akan menunjukkan bahwa tidak ada minimum lokal.

## 6.3 Persamaan Helmholtz Dua-Dimensi dalam Koordinat Polar

Seperti yang sudah kita lihat dalam bab sebelumnya, ketika suku yang bergantung waktu dipisahkan, suku ruang baik persamaan gelombang dan panas diberikan oleh persamaan Helmholtz

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0.$$

Dalam koordinat polar, persamaan Helmholtz menjadi

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho, \varphi) \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(\rho, \varphi) + k^2 u(\rho, \varphi) = 0.$$

Dengan cara yang sama ketika kita menyelesaikan persamaan Laplace, dengan menggunakan asumsi  $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ , kita mendapatkan suku angular memenuhi persamaan

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi_n(\varphi) = -n^2 \Phi_n(\varphi)$$

dan memiliki solusi yang sudah kita kenal

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi,$$

dengan  $n$  adalah bilangan bulat. Persamaan radial

$$\rho^2 \frac{d^2 R_n(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_n(\rho)}{d\rho} + (k^2 \rho^2 - n^2) R_n(\rho) = 0$$

berbeda dengan apa yang kita peroleh dari persamaan Laplace. Solusinya adalah

$$R_n(\rho) = C_n J_n(k\rho) + D_n N_n(k\rho),$$

dengan  $J_n(k\rho)$  dan  $N_n(k\rho)$  merupakan fungsi Bessel dan Neumann orde  $n$ . Ingat bahwa  $N_n(k\rho)$  bernilai  $-\infty$  ketika  $\rho$  mendekati nol. Sehingga agar solusinya berhingga pada titik asal, kita harus menetapkan  $D_n = 0$ . Jadi, untuk sebagian besar aplikasi, solusi dari persamaan Helmholtz diberikan oleh kombinasi linear dari  $u_n(\rho, \varphi)$  dengan

$$u_n(\rho, \varphi) = J_n(k\rho)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (6.7)$$

Apa yang akan kita lihat berikut, kita akan menunjukkan bahwa tidak hanya persamaan gelombang dan persamaan panas dua-dimensi menjadi persamaan Helmholtz ketika suku yang bergantung waktu dipisahkan, tapi juga persamaan Laplace tiga dimensi dalam koordinat silinder mengurangi ke persamaan Helmholtz saat suku yang bergantung  $z$  dipisahkan. Dalam hal ini, konstanta separasi dapat berupa  $+k^2$  atau  $-k^2$ .

### 6.3.1 Persamaan Gelombang Dua-Dimensi dalam Koordinat Polar

Ketika sebuah membran berupa bidang dan dibuat dari bahan yang elastik, getarannya memenuhi persamaan gelombang

$$\nabla^2 z = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t^2} z,$$

dengan  $z$  adalah perpindahan (tinggi membran dari bidang). Untuk kulit gendang sirkular, secara alami kita akan menggunakan koordinat polar.

Anggap membran diletakkan pada rangka tetap sirkular berjari-jari  $c$  pada bidang  $z = 0$ . Mula-mula membran dideformasi dalam bentuk  $z(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi)$  dan dilepaskan dari keadaan diam dari posisi tersebut. Maka untuk mencari perpindahan  $z(\rho, \varphi, t)$ , kita perlu menyelesaikan persoalan berikut

$$\text{P. D. : } \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] z(\rho, \varphi, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t^2} z(\rho, \varphi, t),$$

$$\text{S. B. : } z(c, \varphi, t) = 0,$$

$$\text{K. A. : } z(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi), \quad \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Untuk memisahkan suku bergantung waktu dan suku bergantung ruang dengan asumsi  $z(\rho, \varphi, t) = u(\rho, \varphi)T(t)$ , kita menemukan dua persamaan diferensial biasa

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda$$

dan

$$\frac{1}{u(\rho, \varphi)} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho, \varphi) \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(\rho, \varphi) \right] = \lambda.$$

Untuk alasan yang sama dengan getaran senar, konstanta separasinya kita pilih

$$\lambda = -k^2,$$

sehingga suku bergantung waktu memenuhi persamaan

$$T''(t) = -k^2 a^2 T(t) \tag{6.8}$$

dan suku bergantung ruangnya memenuhi persamaan Helmholtz

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho, \varphi) \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(\rho, \varphi) + k^2 u(\rho, \varphi) = 0$$

dengan(6.7) sebagai solusinya

$$u(\rho, \varphi) = J_n(k\rho)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Agar memenuhi syarat batas  $z(c, \varphi, t) = 0$ , kita harus memiliki  $u(c, \varphi) = 0$ . Hal ini berarti  $k$  tidak dapat berupa konstanta, tetapi harus memenuhi syarat

$$J_n(kc) = 0.$$

Misalkan  $k_{nj}c$  adalah nilai nol ke- $j$  dari fungsi Bessel  $J_n(x)$  orde ke- $n$ , maka  $k$  harus sama dengan salah satu  $k_{nj}$ . Nilai  $k_{nj}$  harus digunakan dalam (6.8), sehingga

$$T(t) = c_1 \cos k_{nj}at + c_2 \sin k_{nj}at.$$

Selanjutnya untuk memenuhi kondisi awal

$$\frac{\partial}{\partial t} z(\rho, \varphi, t) \Big|_{t=0} = u(\rho, \varphi) \frac{dT(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

turunan  $T(t)$  haruslah nol, sehingga  $c_2$  harus dipilih nol. Sehingga untuk tiap  $n$  dan  $j$

$$z_{nj}(\rho, \varphi, t) = J_n(k_{nj}\rho)(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cos(ak_{nj}t).$$

Solusi umumnya, yang merupakan kombinasi linier semua suku, adalah penjumlahan ganda dari semua kemungkinan  $n$  dan  $j$

$$z(\rho, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k_{nj}\rho)(a_{nj} \cos n\varphi + b_{nj} \sin n\varphi) \cos(ak_{nj}t).$$

di sini kita telah mengkonsolidasikan konstanta pada koefisien  $a_{nj}$  dan  $b_{nj}$ .

Koefisien-koefisien ini bisa ditentukan oleh kondisi awal yang lain  $z(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi)$

$$z(\rho, \varphi, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k_{nj}\rho)(a_{nj} \cos n\varphi + b_{nj} \sin n\varphi) = f(\rho, \varphi).$$

Pertama marilah kita definisikan

$$F_n(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} J_n(k_{nj}\rho), \quad (6.9)$$

$$G_n(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} J_n(k_{nj}\rho), \quad (6.10)$$

dan menyatakan  $z(\rho, \varphi, 0)$  dalam suku tersebut.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{F_n(\rho) \cos n\varphi + G_n(\rho) \sin n\varphi\} = f(\rho, \varphi).$$

Dengan menganggap  $\rho$  sebagai sebuah parameter, persamaan ini berbentuk deret Fourier, sehingga  $F_n(\rho)$  dan  $G_n(\rho)$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} F_n(\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad n = 0, \\ G_n(\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Jika kita masukkan kembali pada (6.9) dan (6.10), kita mempunyai

$$\begin{aligned}\sum_{j=1} a_{nj} J_n(k_{nj}\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \\ \sum_{j=1} a_{nj} J_n(k_{nj}\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad n = 0, \\ \sum_{j=1} b_{nj} J_n(k_{nj}\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Untuk tiap  $n$  tetap, deret dianggap sebagai deret Fourier-Bessel. Koefisien-koefisiennya bisa diperoleh dengan mengalikan kedua ruas dengan  $\rho J_n(k_{ni}\rho)$  dan mengintegrasikannya dari 0 ke  $c$

$$\begin{aligned}& \int_0^c \rho J_n(k_{ni}\rho) \sum_{j=1} a_{nj} J_n(k_{nj}\rho) \, d\rho \\ &= \int_0^c \rho J_n(k_{ni}\rho) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \, d\rho, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Karena ortogonalitas fungsi Bessel, semua suku di ruas kiri sama dengan nol kecuali untuk  $j = i$

$$a_{ni} \int_0^c \rho J_n^2(k_{ni}\rho) \, d\rho = \frac{1}{\pi} \int_0^c \int_0^{2\pi} \rho J_n(k_{ni}\rho) f(\rho, \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \, d\rho.$$

Ingat kembali

$$\int_0^c \rho J_n^2(k_{ni}\rho) \, d\rho = \frac{1}{2} c^2 J_{n+1}^2(k_{ni}c),$$

sehingga

$$a_{ni} = \frac{2}{\pi c^2 J_{n+1}^2(k_{ni}c)} \int_0^c \int_0^{2\pi} \rho J_n(k_{ni}\rho) f(\rho, \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \, d\rho, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.11)$$

Untuk  $n = 0$ , kita memiliki

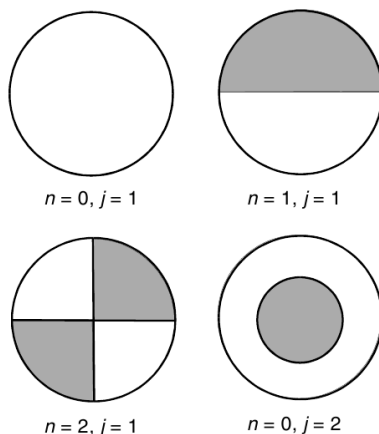
$$a_{0i} = \frac{2}{\pi c^2 J_1^2(k_{0i}c)} \int_0^c \int_0^{2\pi} \rho J_0(k_{0i}\rho) f(\rho, \varphi) \, d\varphi \, d\rho. \quad (6.12)$$

Dengan cara yang sama

$$b_{ni} = \frac{2}{\pi c^2 J_{n+1}^2(k_{ni}c)} \int_0^c \int_0^{2\pi} \rho J_n(k_{ni}\rho) f(\rho, \varphi) \sin n\varphi \, d\varphi \, d\rho, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.13)$$

Sehingga solusinya diberikan oleh

$$z(\rho, \varphi, t) = \sum_{n=0} \sum_{i=1} z_{nj} = \sum_{n=0} \sum_{i=1} J_n(k_{ni}\rho) (a_{ni} \cos n\varphi + b_{ni} \sin n\varphi) \cos(ak_{ni}t) \quad (6.14)$$



Gambar 6.4: Moda normal getaran kulit gendang

dengan koefisien yang diberikan oleh (6.11)-(6.13).

Tiap suku  $z_{nj}(\rho, \varphi, t)$  dikenal sebagai sebuah moda normal. Tiap moda bergetar dalam gerakan harmonik dengan frekuensi  $ak_{nj}/2\pi$ . Jika kondisi awalnya berupa bentuk dalam moda tertentu, maka sistem akan bergetar pada moda tersebut. Sebagai contoh jika

$$z(\rho, \varphi, 0) = f(\rho, \varphi) = AJ_2(k_{21}\rho) \cos 2\varphi,$$

maka semua koefisien dalam (6.14) sama dengan nol kecuali untuk  $a_{21} = A$  dan

$$z(\rho, \varphi, t) = AJ_2(k_{21}\rho) \cos 2\varphi \cos(ak_{21}t).$$

Tiap moda memiliki garis simpul (garis tanpa gerak), yang terdiri dari lingkaran dan garis radial. Gambar 6.4 menggambarkan beberapa moda getaran ini, bagian diarsir bergerak dengan arah berlawanan dengan bagian tak diarsir. Jika kulit gendang bergetar dengan salah satu moda normal, debu yang ada di atas kulit gendang akan berkumpul sepanjang garis simpul, sehingga kita dapat melihatnya. Tidak mudah untuk mendapatkan moda normal murni dengan kondisi awal. Tetapi, jika osilator bergetar dengan frekuensi moda tertentu diletakkan berdekatan, kulit gendang akan bergetar pada frekuensi tersebut dan garis simpul akan jelas terlihat.

Gerak umum getaran kulit gendang adalah superposisi semua moda normal. Jika terdapat garis simpul, biasanya polanya tidak sederhana. Perhatikan bahwa jika pergeseran awal tidak bergantung  $\varphi$ , maka  $f(\rho, \varphi)$  harus digantikan dengan  $f(\rho)$ . Dalam kasus ini, mengikuti (6.11) dan (6.13) bahwa  $a_{ni} = 0$  dan  $b_{ni} = 0$  untuk semua  $n$ , kecuali untuk  $n = 0$ . Untuk  $n = 0$ , (6.12) memberikan

$$a_{0i} = \frac{2}{c^2 J_1^2(k_{0i}c)} \int_0^c \rho J_0(k_{0i}\rho) f(\rho) d\rho.$$

Dalam kasus ini solusinya diberikan oleh

$$z(\rho, \varphi, t) = \sum_{i=1} \left[ \frac{2}{c^2 J_1^2(k_{0i}c)} \int_0^c \rho' J_0(k_{0i}\rho') f(\rho) d\rho' \right] J_0(k_{0i}\rho) \cos(ak_{0i}t). \quad (6.15)$$

Hal ini adalah yang kita harapkan jika syarat batas dan kondisi awal tidak bergantung  $\varphi$ , sehingga tidak terdapat alasan solusi akhirnya bergantung  $\varphi$ . Sehingga dalam kasus ini, kita bisa mulai dengan

$$z = R(\rho)T(t)$$

dan langsung mendapatkan hasil (6.15).

**Contoh 6.3.1.** Carilah frekuensi moda normal pada Gambar 6.4.

**Solusi 6.3.1.** Frekuensi getaran untuk  $nj$  moda normal adalah  $k_{nj}a/2\pi$ . Dari tabel fungsi Bessel

$$J_0(x) = 0 \quad \text{untuk } x = 2.4048, 5.5201, \dots$$

$$J_1(x) = 0 \quad \text{untuk } x = 3.8317, 7.0156, \dots$$

$$J_2(x) = 0 \quad \text{untuk } x = 5.1356, 8.4172, \dots$$

Sehingga untuk moda 01,  $k_{01}c = 2.4048$  dan frekuensi moda ini diberikan oleh

$$\nu_{01} = \frac{k_{01}a}{2\pi} = \frac{2.4048a}{2\pi c}$$

dengan cara yang sama

$$\nu_{11} = \frac{3.8317a}{2\pi c}, \quad \nu_{21} = \frac{5.1356a}{2\pi c}, \quad \nu_{02} = \frac{5.5201a}{2\pi c}.$$

**Contoh 6.3.2.** Jika membran dan rangkanya bergerak sebagai benda tegar dengan kecepatan satuan tegak lurus pada membran dan rangka tiba-tiba dihentikan, maka membran akan mulai bergetar. Getaran dapat dilkan dengan persoalan syarat batas berikut:

$$\text{P. D. : } \nabla^2 z(\rho, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} z(\rho, t),$$

$$\text{S. B. : } z(c, t) = 0,$$

$$\text{K. A. : } z(\rho, 0), \quad \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = 1.$$

Carilah pergeseran  $z(\rho, t)$ .

**Solusi 6.3.2.** Dengan  $z(t) = R(\rho)T(t)$  suku waktunya diberikan oleh

$$T(t) = c_1 \cos kat + c_2 \sin kat$$



dan suku ruangnya

$$R(\rho) = J_0(k\rho).$$

Syarat batas meminta bahwa  $J_0(kc) = 0$ . Sehingga  $k$  haruslah sama dengan salah satu  $k_{0j}$ , dengan  $k_{0j}c$  adalah akar ke- $j$  dari  $J_0(x) = 0$ . Kondisi awal meminta  $T(0) = c_1 = 0$ . Jadi

$$z(\rho, t) = \sum_{j=1} b_j J_0(k_{0j}\rho) \sin k_{0j}at.$$

Sekarang kondisi awal lain meminta

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{j=1} b_j k_{0j} a J_0(k_{0j}\rho) = 1.$$

Kalikan dengan  $\rho J_0(k_{0j}\rho)$  dan mengintegrasikan dari 0 ke  $c$ , kita peroleh

$$b_j k_{0j} a = \frac{2}{c^2 J_1^2(k_{0j}c)} \int_0^c \rho J_0(k_{0j}\rho) d\rho.$$

Ingat kembali

$$\int_0^c x J_0(x) dx = \int_0^c d[x J_1(x)],$$

maka

$$\int_0^c \rho J_0(k_{0j}\rho) d\rho = \frac{1}{k_{0j}} c J_1(k_{0j}c).$$

$$b_j k_{0j} a = \frac{2}{c^2 J_1^2(k_{0j}c)} \frac{1}{k_{0j}} c J_1(k_{0j}c),$$

Jadi

$$b_j = \frac{2}{ack_{0j}^2} \frac{1}{J_1(k_{0j}c)}.$$

Oleh karena itu

$$z(\rho, t) = \frac{2}{ac} \sum_{j=1} \frac{\sin(k_{0j}at)}{k_{0j}^2 J_1(k_{0j}c)} j_0(k_{0j}\rho)$$

adalah perpindahan, dengan  $k_{0j}c$  adalah akar positif dari  $J_0(x) = 0$ .

### 6.3.2 Persamaan Difusi Dua-Dimensi dalam Koordinat Polar

Solusi persamaan difusi

$$\nabla^2 F = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} F$$

yang berbentuk  $F(\rho, \varphi, t) = u(\rho, \varphi)T(t)$  mirip dengan persamaan gelombang. Dalam suku  $u(\rho, \varphi)$  dan  $T(t)$  persamaannya dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{u(\rho, \varphi)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u(\rho, \varphi) = \frac{1}{T(t)} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} T(t).$$

Kedua ruas harus sama dengan konstanta separasi

$$\frac{1}{u(\rho, \varphi)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u(\rho, \varphi) = \lambda,$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} T(t) = \lambda.$$

Konstanta separasi haruslah negatif,  $\lambda = -k^2$ , seperti persamaan gelombang, tetapi untuk alasan yang sedikit berbeda. Jika  $\lambda = +k^2$ , maka  $T(t) = e^{k^2 a^2 t}$ , yang akan menyebabkan suhu naik ketika waktu bertambah tanpa adanya batasan. Secara fisika, hal ini tidak beralasan. (Secara formal kita mengatakan hal ini melanggar hukum kekekalan energi.) Bukan hanya hal ini saja,  $\lambda = k^2$  akan menyebabkan suku ruang gagal memenuhi syarat batas. Kita mungkin saja memiliki  $\lambda = 0$ , yang mengindikasikan sistemnya telah mencapai kesetimbangan. Tetapi, kita harus bisa menyelesaikan persoalan dengan  $\lambda \neq 0$  dan menunjukkan bahwa solusinya menjadi  $\lambda = 0$  ketika  $t \rightarrow \infty$ .

Dengan  $\lambda = -k^2$  dan  $T(t) = e^{-k^2 a^2 t}$  dan suku ruangnya diberikan oleh persamaan Helmholtz. Persamaan ini sama dengan yang diperoleh dari persamaan gelombang, syarat batasnya dapat memberikan perbedaan.

Dalam contoh berikut, kita akan mempelajari konduksi panas dalam sebuah koin. Kelilingnya dijaga pada suhu tetap atau terisolasi.

**Contoh 6.3.3.** Carilah suhu di dalam piringan dengan jari-jari  $c$ , permukaan datarnya dijaga terisolasi. Mula-mula piringan berada dalam suhu  $f(\rho)$ . Sisi luarnya dijaga pada suhu  $100^\circ$  selamanya.

**Solusi 6.3.3** Karena syarat batas dan juga kondisi awal tidak bergantung sudut, maka kita tahu distribusi suhu dalam piringan tidak bergantung sudut. Sehingga suhu pada piringan  $F(\rho, t)$  adalah solusi dari persoalan berikut:

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } \quad \nabla^2 F &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} F, \\ \text{S. B. : } \quad F(c, t) &= 100, \\ \text{K. A. : } \quad F(\rho, 0) &= f(\rho). \end{aligned}$$

Soal ini lebih mudah diselesaikan jika kita membuat perubahan variabel. Misalkan

$$u(\rho, t) = F(\rho, t) - 100.$$

Persamaan diferensial yang mengatur  $u(\rho, t)$  tetap tidak berubah

$$\nabla^2 u(\rho, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} u(\rho, t)$$

tapi syarat batas dan kondisi awal diubah ke dalam

$$u(c, t) = 0, \quad u(\rho, 0) = f(\rho) - 100.$$

Solusinya

$$u(\rho, t) = J_0(k\rho)e^{-k^2 a^2 t}.$$

Agar memenuhi syarat batas  $u(c, t) = 0$ ,  $k$  haruslah sama dengan salah satu  $k_{0j}$ , dengan  $k_{0j}c$  adalah akar ke- $j$  dari  $J_0(x) = 0$ . Sehingga solusi umumnya adalah kombinasi linier berikut:

$$u(\rho, t) = \sum_{j=1} c_j J_0(k_{0j}\rho)e^{-k_{0j}^2 a^2 t}.$$

Karena  $u(\rho, 0) = f(\rho) - 100$ , maka

$$f(\rho) - 100 = u(\rho, 0) = \sum_{j=1} c_j J_0(k_{0j}\rho).$$

Mengikuti hal ini

$$c_j = \frac{2}{c^2 J_1^2(k_{0j}c)} \int_0^c (f(\rho) - 100) J_0(k_{0j}\rho) \rho d\rho.$$

Jadi distribusi suhu pada piringan adalah

$$F(\rho, t) = 100 + \sum_{j=1} A_j J_0(k_{0j}\rho)e^{-k_{0j}^2 a^2 t},$$

$$A_j = \frac{2}{c^2 J_1^2(k_{0j}c)} \int_0^c f(\rho') - 100 J_0(k_{0j}\rho') \rho' d\rho'.$$

Jelaslah, ketika  $t \rightarrow \infty$ , suhu di setiap tempat pada piringan akan sama dengan  $100^\circ$ , seperti seharusnya, tidak bergantung pada suhu awal.

**Contoh 6.3.4.** Ganti syarat batas dari persoalan sebelumnya dengan syarat bahwa sisi piringan diisolasi termal. Carilah distribusi suhu  $u(\rho, t)$  di dalam piringan jika  $u(\rho, 0) = f(\rho)$ .

**Solusi 6.3.4.** Sisi terisolasi berarti tidak terdapat panas yang mengalir ke luar masuk piringan. Karena fluks panas sebanding dengan gradien suhu, sisi terisolasi berkaitan dengan syarat batas

$$\left. \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho, t) \right|_{\rho=c} = 0.$$

Solusi persamaan difusi tetap diberikan oleh

$$u(\rho, t) = J_0(k\rho)e^{-k^2 a^2 t}.$$

Sekarang syarat batas meminta

$$\frac{d}{d\rho} J_0(k\rho) \Big|_{\rho=c} = 0.$$

Ingat kembali

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x).$$

Ini artinya

$$\frac{d}{d\rho} J_0(k\rho) \Big|_{\rho=c} = -kJ_1(kc) = 0.$$

Jadi,  $k$  harus sama dengan salah satu dari  $k_{1j}$ , dengan  $k_{1j}c$  adalah akar ke- $j$  dari  $J_1(x) = 0$ . Maka solusi umumnya adalah

$$u(\rho, t) = \sum_{j=0} c_j J_0(k_{1j}\rho) e^{-k_{1j}^2 a^2 t}.$$

Perhatikan bahwa dalam kasus ini  $k_{10} = 0$  juga merupakan nilai eigen, karena  $J_1(0) = 0$ . Selanjutnya, karena  $J_0(0) = 1$ , kita dapat menuliskan ekspansi ini sebagai

$$u(\rho, t) = c_0 + \sum_{j=1} c_j J_0(k_{1j}\rho) e^{-k_{1j}^2 a^2 t}.$$

Dengan kondisi awal  $u(\rho, 0) = f(\rho)$ , kita memiliki

$$f(\rho) = c_0 + \sum_{j=1} c_j J_0(k_{1j}\rho). \quad (6.16)$$

Koefisien  $c_j$  dapat ditentukan dengan hubungan ortogonalitas fungsi Bessel

$$\int_0^c \rho J_0(k_{1j}\rho) J_0(k_{1i}\rho) d\rho = \delta_{ij} \beta_{0j}^2,$$

dengan  $\beta_{0j}^2$  diberikan oleh

$$\beta_{0j}^2 = \frac{1}{2} c^2 J_0^2(k_{1j}c),$$

Selanjutnya

$$\int_0^c \rho J_0(k_{1j}\rho) d\rho = \frac{c}{k_{1j}} J_1(k_{1j}c) = 0,$$

karena  $k_{1j}c$  adalah salah satu akar dari  $J_1(x) = 0$ . Dengan mengalikan (6.16) dengan  $\rho$  dan mengintegrasikan dari 0 ke  $c$ , kita memiliki

$$\int_0^c \rho f(\rho) d\rho = \int_0^c \rho c_0 d\rho = \frac{1}{2} c^2 c_0$$

atau

$$c_0 = \frac{2}{c^2} \int_0^c \rho f(\rho) d\rho.$$

Kalikan (6.16) dengan  $\rho J_0(k_{1i}\rho)$  dan integralkan dari 0 sampai  $c$ ,

$$c_i = \frac{1}{\beta_{0i}^2} \int_0^c \rho J_0(k_{1i}\rho) f(\rho) d\rho.$$

Maka, distribusi suhu pada piringan adalah

$$u(\rho, t) = \frac{2}{c^2} \int_0^c \rho f(\rho) d\rho + \sum_{j=1} B_j J_0(k_{1j} \rho) e^{-k_{1j}^2 a^2 t},$$

$$B_j = \frac{2}{c^2 J_0^2(k_{1j} c)} \int_0^c \rho' J_0(k_{1j} \rho') f(\rho') d\rho'.$$

### 6.3.3 Persamaan Laplace dalam Koordinat Silinder

Persamaan Laplace tiga-dimensi  $\nabla^2 V = 0$  dalam koordinat silinder

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] V(\rho, \varphi, z) = 0.$$

Dengan  $V(\rho, \varphi, z) = u(\rho, \varphi)Z(z)$ , persamaan ini dapat dituliskan sebagai

$$\frac{1}{u(\rho, \varphi)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u(\rho, \varphi) = -\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z).$$

Kedua ruas harus sama dengan konstanta separasi,

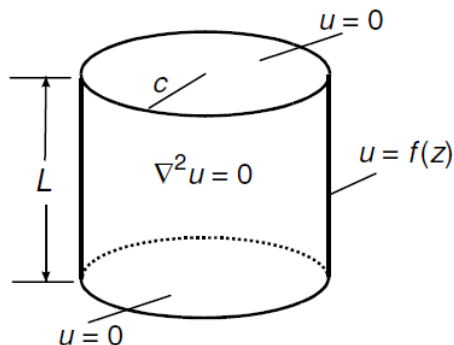
$$\frac{1}{u(\rho, \varphi)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u(\rho, \varphi) = \lambda,$$

$$-\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = \lambda.$$

Terlihat bahwa setelah  $Z(z)$  dipisahkan, persamaan yang tersisa untuk  $u(\rho, \varphi)$  berupa persamaan Helmholtz dalam koordinat polar. Sebenarnya, persamaannya benar-benar sama dengan yang didapatkan dari persamaan difusi atau persamaan gelombang. Tetapi terdapat sedikit perbedaan. Perbedaannya adalah pada kasus ini, konstanta separasi  $\lambda$  dapat berupa  $+k^2$  atau  $-k^2$ , bergantung pada syarat batas. Dalam contoh berikut, kita akan mengilustrasikan dengan syarat batas tertentu kita harus menggunakan  $+k^2$ , sedangkan dalam syarat batas yang lain kita perlu menggunakan  $-k^2$ . Secara umum, baik  $+k^2$  maupun  $-k^2$  diperlukan.

**Contoh 6.3.5.** Perhatikan sebuah silinder padat sirkular dengan jari-jari  $c$  dan panjang  $L$ . Suhu pada dasar silinder dijaga pada  $0^\circ$  sedangkan suhu pada sisi miringnya diberikan oleh fungsi  $f(z)$ , seperti pada Gambar 6.5. Carilah distribusi suhu mantap di dalam silinder.

**Solusi 6.3.5.** Suhu mantap  $u$  memenuhi persamaan Laplace  $\nabla^2 u = 0$ . Selanjutnya



Gambar 6.5: Persamaan Laplace dalam silinder sirkular. Dengan syarat batas ini, solusinya diberikan oleh sebuah deret hasil perkalian fungsi trigonometrik dan fungsi Bessel termodifikasi.

karena syarat batas tidak bergantung sudut, maka solusinya juga tidak akan mengandung fungsi  $\varphi$ . Sehingga yang harus kita lakukan adalah menyelesaikan persoalan syarat batas berikut:

$$\text{P. D. : } \nabla^2 u(\rho, z) = 0,$$

$$\text{S. B. : } u(\rho, 0) = u(\rho, L) = 0, \quad u(c, z) = f(z).$$

Dengan  $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ ,

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] R(\rho) = \lambda R(\rho)$$

dan

$$\frac{d^2}{dz^2} Z(z) = -\lambda Z(z).$$

Syarat batas  $u(\rho, 0) = R(\rho)Z(0) = 0$  menjadi  $Z(0) = 0$ . Dengan cara yang sama  $Z(L) = 0$ . Persamaan  $Z$  dan syarat batasnya mengingatkan kita pada persoalan konduksi panas satu dimensi dengan kedua ujungnya pada  $0^\circ$ . Syarat batas ini dapat terpenuhi jika solusinya berupa fungsi sinus dan cosinus. Dengan konstanta separasi  $\lambda$  dipilih sebagai  $+k^2$

$$Z(z) = c_1 \cos kz + c_2 \sin kz.$$

Persamaan untuk  $R$  dapat dituliskan sebagai

$$\left( \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - k^2 \rho^2 \right) R(\rho) = 0.$$

Solusinya adalah

$$R(\rho) = c_3 I_0(k\rho) + c_4 K_0(k\rho),$$

dengan  $I_0$  dan  $K_0$  adalah fungsi Bessel termodifikasi jenis pertama dan kedua orde ke 0. Karena  $K_0$  divergen ketika  $\rho \rightarrow 0$ , untuk menjaga suhu berhingga pada sumbu silinder,

$c_4$  haruslah dipilih nol. Syarat  $Z(0) = 0$  meminta  $c_1 = 0$ . Syarat  $Z(L) = 0$  meminta  $k$  adalah salah satu  $k_n$ , dengan  $k_n = n\pi/L$  dengan  $n$  bilangan bulat ( $n = 1, 2, \dots$ ). Sehingga solusi umumnya berbentuk

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1} A_n I_0 \left( \frac{n\pi}{L} \rho \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} z \right).$$

Koefisien  $a_n$  ditentukan oleh syarat batas yang lain  $u(c, z) = f(z)$ ,

$$f(z) = \sum_{n=1} A_n I_0 \left( \frac{n\pi}{L} c \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} z \right).$$

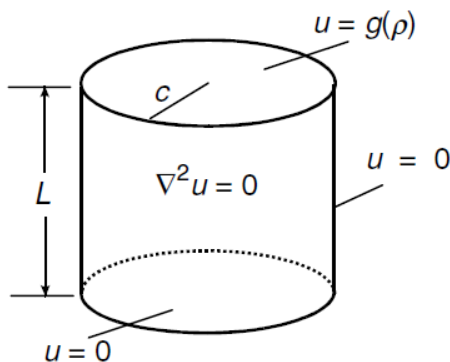
Hal ini adalah deret Fourier sinus. Diperoleh

$$A_n I_0 \left( \frac{n\pi}{L} c \right) = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \sin \left( \frac{n\pi}{L} z \right) dz.$$

Jadi distribusi suhunya adalah

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1} \left[ \frac{1}{I_0 \left( \frac{n\pi}{L} c \right)} \frac{2}{L} \int_0^L f(z') \sin \left( \frac{n\pi}{L} z' \right) dz' \right] I_0 \left( \frac{n\pi}{L} \rho \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} z \right).$$

**Contoh 6.3.6.** Selesaikan persoalan sebelumnya dengan syarat batas diganti dengan kedua sisi permukaan lengkung dan dasar dijaga pada  $0^\circ$  dan permukaan atas diberikan oleh  $g(\rho)$ , seperti pada Gambar 6.6.



Gambar 6.6: Persamaan Laplace dalam silinder sirkuler. Dengan syarat batas ini, solusinya diberikan oleh perkalian fungsi hiperbolik dan fungsi Bessel.

**Solusi 6.3.6.** Sekarang, kita harus menyelesaikan

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } & \nabla^2 u(\rho, z) = 0, \\ \text{S. B. : } & u(c, z) = 0, \quad u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, L) = g(\rho). \end{aligned}$$

Dengan  $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$  kita memiliki

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] R(\rho) = \lambda R(\rho)$$

dan

$$\frac{d^2}{dz^2} Z(z) = -\lambda Z(z).$$

Syarat batas  $u(c, z) = R(c)Z(z) = 0$  meminta  $R(c) = 0$ .

Jika  $\lambda = +k^2$ , seperti pada contoh terakhir

$$R(\rho) = I_0(k\rho).$$

Karena  $I_0$  fungsi yang naik secara monotonik dan tidak pernah sama dengan nol, pilihan ini tidak mungkin memenuhi syarat batas.

Jika  $\lambda = 0$ , persamaan  $R$  menjadi persamaan diferensial Euler-Cauchy, solusinya adalah

$$R(\rho) = c_1 + c_2 \ln \rho.$$

Agar suhunya berhingga pada sumbu silinder, kita harus memilih  $c_2 = 0$ . Untuk membuat  $R(c) = 0$ ,  $c_1$  harus juga nol. Sehingga kita tidak akan memperoleh solusi untuk  $\lambda = 0$ .

Akhirnya, jika  $\lambda = -k^2$ , persamaan  $R$  menjadi

$$\left( \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + k^2 \rho^2 \right) R(\rho) = 0,$$

dan solusi yang berhingga pada sumbu silinder diberikan oleh fungsi Bessel orde nol.

$$R(\rho) = J_0(k\rho).$$

Untuk memenuhi syarat batas  $R(c) = 0$ ,  $k$  haruslah sama dengan  $k_{0j}$ , dengan  $k_{0j}c$  adalah akar ke- $j$  dari  $J_0(x) = 0$ .

Persamaan untuk  $Z$  adalah

$$\frac{d^2}{dz^2} Z(z) = k_{0j}^2 Z(z).$$

Solusi persamaan ini adalah

$$Z(z) = c_3 \cosh k_{0j}z + c_4 \sinh k_{0j}z.$$

Syarat  $u(\rho, 0) = R(\rho)Z(0) = 0$  meminta  $Z(0) = 0$ , sehingga  $c_3$  haruslah nol. Jadi solusi umumnya berbentuk

$$u(\rho, z) = \sum_{j=1} A_j J_0(k_{0j}\rho) \sinh k_{0j}z.$$



Koefisien-koefisien  $A_j$  dapat ditentukan oleh kondisi  $u(\rho, L) = g(\rho)$ ,

$$g(\rho) = \sum_{j=1} A_j J_0(k_{0j}\rho) \sinh k_{0j}L.$$

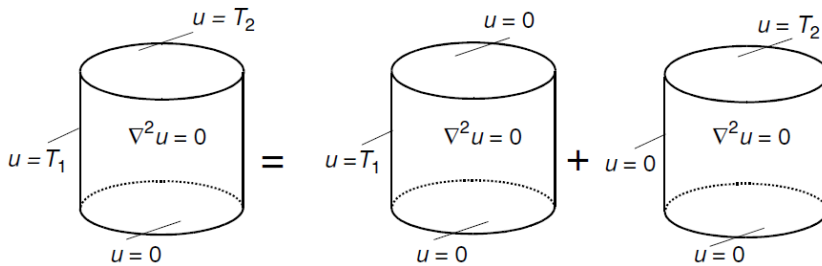
Diperoleh

$$A_j \sinh k_{0j}L = \frac{2}{c^2 J_1^2(k_{0j}c)} \int_0^c g(\rho) J_0(k_{0j}\rho) \rho d\rho.$$

Jadi distribusi suhunya diberikan oleh

$$u(\rho, z) = \sum_{j=1} \left[ \frac{2}{c^2 J_1^2(k_{0j}c) \sinh k_{0j}L} \int_0^c g(\rho') J_0(k_{0j}\rho') \rho' d\rho' \right] J_0(k_{0j}\rho) \sinh k_{0j}z.$$

**Contoh 6.3.7.** Carilah suhu mantap  $u(\rho, z)$  dalam silinder pada contoh sebelumnya, dengan syarat batas:  $u(\rho, 0) = 0$ ,  $u(c, z) = T_1$ ,  $u(\rho, L) = T_2$  dengan  $T_1$  dan  $T_2$  dua buah konstanta.



Gambar 6.7: Prinsip superposisi. Persoalan pada sisi kiri dapat dipecah sebagai penjumlahan dua buah persoalan pada sisi kanan.

**Solusi 6.3.7.** Persoalan ini dapat diselesaikan dengan menggunakan prinsip superposisi dan hasil dari contoh sebelumnya. Persoalan ditunjukkan pada bagian kiri Gambar 6.7. Kita memisahkan menjadi dua bagian pada sisi kanan Gambar 6.7. Anggap kita telah menyelesaikan dua buah persoalan berikut

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } & \nabla^2 u_1(\rho, z) = 0, \\ \text{S. B. : } & u_1(\rho, 0) = 0, \quad u_1(\rho, L) = 0, \quad u_1(c, z) = T_1. \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \text{P. D. : } & \nabla^2 u_2(\rho, z) = 0, \\ \text{S. B. : } & u_2(\rho, 0) = 0, \quad u_2(\rho, L) = T_2, \quad u_2(c, z) = 0. \end{aligned}$$

Jelaslah solusi yang diinginkan

$$u(\rho, z) = u_1(\rho, z) + u_2(\rho, z),$$

Karena

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(\rho, z) &= \nabla^2 u_1(\rho, z) + \nabla^2 u_2(\rho, z), \\ u(\rho, 0) &= u_1(\rho, 0) + u_2(\rho, 0) = 0, \\ u(\rho, L) &= u_1(\rho, L) + u_2(\rho, L) = T_2, \\ u(c, z) &= u_1(c, z) + u_2(c, z) = T_1.\end{aligned}$$

Dari hasil contoh sebelumnya

$$u_1(\rho, z) = \sum_{n=1} \left[ \frac{1}{I_0\left(\frac{n\pi}{L}c\right)} \frac{2}{L} \int_0^L T_1 \sin \frac{n\pi}{L} z' dz' \right] I_0\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right)$$

dan

$$u_2(\rho, z) = \sum_{j=1} \left[ \frac{2}{c^2 J_1^2(k_{0j}c) \sinh k_{0j}L} \int_0^c T_2 J_0(k_{0j}\rho') \rho' d\rho' \right] J_0(k_{0j}\rho) \sinh k_{0j}z.$$

Karena

$$\frac{2}{L} \int_0^L T_1 \sin \frac{n\pi}{L} z' dz' = \begin{cases} \frac{4T_1}{n\pi} & n = \text{ganjil} \\ 0 & n = \text{genap} \end{cases}$$

dan

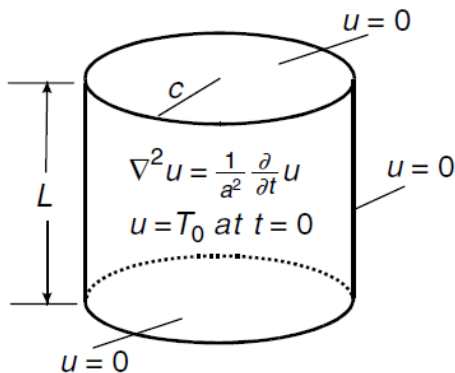
$$\int_0^c T_2 J_0(k_{0j}\rho') \rho' d\rho' = T_2 \frac{c}{k_{0j}} J_1(k_{0j}c),$$

maka solusinya diberikan oleh

$$\begin{aligned}u(\rho, z) &= \frac{4T_1}{\pi} \sum_{n=\text{ganjil}} \frac{1}{n} \frac{1}{I_0\left(\frac{n\pi}{L}c\right)} I_0\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) \\ &+ \frac{2T_2}{c} \sum_{j=1} \frac{1}{k_{0j} J_1(k_{0j}c) \sinh k_{0j}L} J_0(k_{0j}\rho) \sinh k_{0j}z.\end{aligned}$$

### 6.3.4 Persamaan Helmholtz dalam Koordinat Silinder

Generalisasi metode di atas untuk persamaan Helmholtz dalam koordinat silinder sangat mudah. Namun, penting untuk menghargai perbedaan antara memecahkan persamaan Laplace dan memecahkan persamaan Helmholtz sebagai suatu persoalan nilai eigen. Untuk persamaan Helmholtz, syarat batas homogen dapat digunakan (fungsi tersebut dapat hilang pada semua permukaan batas), sedangkan satu-satunya solusi dari persamaan Laplace memenuhi syarat batas homogen adalah solusi trivial bahwa fungsi ini identik dengan nol di setiap titik. Hal ini diilustrasikan dengan contoh berikut.



Gambar 6.8: Persamaan difusi dalam sebuah silinder. Syarat batas homogen dapat digunakan untuk persamaan Helmholtz.

**Contoh 6.3.8.** Tinjau silinder padat sirkular berjari-jari  $c$  dan panjangnya  $L$ , permukaan yang dijaga pada  $0^\circ$  selamanya. Awalnya silinder memiliki suhu  $T_0$  seragam, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6.8. Tentukan distribusi temperatur di dalam silinder sebagai fungsi waktu.

**Solusi 6.3.8.** Anggap  $u$  adalah suhu. Ini memenuhi persamaan difusi, yang dalam koordinat silinder berbentuk

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u(\rho, z, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} u(\rho, z, t),$$

di sini kita telah mengambil keuntungan persoalan ini tanpa kebergantungan sudut karena simetri sumbu. Syarat batas dan kondisi awalnya

$$\begin{aligned} u(c, z, t) = u(\rho, 0, t) = u(\rho, L, t) &= 0, \\ u(\rho, z, 0) &= T_0. \end{aligned}$$

Dengan  $u(\rho, z, t) = R(\rho)Z(z)T(t)$ , persamaan ini pertama dipisahkan dalam dua persamaan

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(\rho)Z(z)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] R(\rho)Z(z) &= -k^2 \\ \frac{1}{T(t)} \frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} T(t) &= -k^2. \end{aligned}$$

Konstanta separasinya haruslah berupa bilangan negatif  $-k^2$ , karena suhunya harus memiliki bentuk  $\exp(-k^2 a^2 t)$ . Persamaan diferensial untuk suku ruang diberikan oleh persamaan Helmholtz dalam koordinat silinder tanpa kebergantungan sudut. Kita dapat menuliskannya sebagai:

$$\frac{1}{R(\rho)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] R(\rho) + \frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = -k^2$$

Kita dapat memilih

$$\frac{1}{R(\rho)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right] R(\rho) = -k_1^2,$$

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) = -k_2^2,$$

sehingga  $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ . Untuk memenuhi syarat batas  $Z(0) = Z(L) = 0$ ,  $k_2$  haruslah  $k_2 = n\pi/L$ , sehingga

$$Z(z) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Solusi untuk  $R(\rho)$  adalah fungsi Bessel orde ke-nol

$$R(\rho) = J_0(k_1\rho).$$

Agar memenuhi syarat  $R(c) = 0$ ,  $k_1$  haruslah salah satu  $k_{0j}$  dengan  $k_{0j}c$  adalah akar ke- $j$  dari  $J_0(x) = 0$ . Jadi

$$k^2 = k_{0j}^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

dan

$$u(\rho, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} J_0(k_{0j}\rho) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) e^{-[k_{0j}^2 + (n\pi/L)^2]a^2 t}.$$

Kondisi awal sedemikian rupa sehingga

$$u(\rho, z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} J_0(k_{0j}\rho) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) = T_0.$$

Diperoleh

$$a_{nj} = \frac{4}{c^2 J_1^2(k_{0j}c)L} \int_0^c \int_0^L T_0 \rho J_0(k_{0j}\rho) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) dz d\rho.$$

Karena

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) dz = \begin{cases} \frac{2L}{n\pi} & n \text{ ganjil} \\ 0 & n \text{ genap} \end{cases}$$

$$\int_0^c \rho J_0(k_{0j}\rho) d\rho = \frac{c}{k_{0j}} J_1(k_{0j}c),$$

Jadi

$$u(\rho, z, t) = \frac{8}{\pi c} \sum_{n=\text{ganjil}}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{nk_{0j} J_1(k_{0j}c)} J_0(k_{0j}\rho) \sin\left(\frac{n\pi}{L}z\right) e^{-[k_{0j}^2 + (n\pi/L)^2]a^2 t}.$$

seperti yang diharapkan  $u(\rho, z, t) \rightarrow 0$  untuk  $t \rightarrow \infty$  pada semua titik.

## 6.4 Laplacian Tiga-Dimensi dalam Koordinat Bola

### 6.4.1 Persamaan Laplace dalam Koordinat Bola

Persamaan Laplace  $\nabla^2 F = 0$  ditulis dalam koordinat bola berbentuk

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] F(r, \theta, \varphi) = 0.$$

Dengan menggunakan asumsi  $F(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , kita dapat mengalikan persamaan ini dengan  $r^2/F$  dan mendapatkan

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) + \frac{1}{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 0$$

atau

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) = - \frac{1}{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Theta(\theta)\Phi(\varphi).$$

Ruas kiri adalah fungsi dari  $r$  dan ruas kanan adalah fungsi dari  $\theta$  dan  $\varphi$ . Karena  $r, \theta, \varphi$  adalah variabel bebas, maka satunya dapat sama dengan yang lainnya, jika dan hanya jika semua ruas sama dengan konstanta yang sama. Yaitu

$$\frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) = \lambda, \quad (6.17)$$

$$- \frac{1}{\Theta(\theta)\Phi(\varphi)} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Theta(\theta)\Phi(\varphi) = \lambda. \quad (6.18)$$

Mengalikan (6.18) dengan  $\sin^2 \theta$ , kita mempunyai

$$- \frac{1}{\Theta(\theta)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta(\theta) - \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi(\varphi) = \lambda \sin^2 \theta.$$

Jika kita susun ulang

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta(\theta) + \lambda \sin^2 \theta = - \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi(\varphi)$$

kedua ruas haruslah sama dengan konstanta lain yang sama

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta(\theta)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta(\theta) + \lambda \sin^2 \theta &= \mu, \\ - \frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi(\varphi) &= \mu. \end{aligned} \quad (6.19)$$

**Suku  $\Phi(\varphi)$  dari Persamaan Laplace**

Persamaan terakhir untuk  $\Phi(\varphi)$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi(\varphi) = -\mu \Phi(\varphi).$$

Sehingga  $\Phi(\varphi)$  diberikan oleh

$$\Phi(\varphi) = \exp[\pm i\sqrt{\mu}\varphi]$$

atau nilai riilnya yang ekuivalen

$$\Phi(\varphi) = c_1 \cos \sqrt{\mu}\varphi + c_2 \sin \sqrt{\mu}\varphi.$$

Tetapi ketika  $\varphi$  dinaikkan sebesar  $2\pi$ , kita kembali pada titik yang sama. Sehingga

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

yang berarti

$$\exp[\pm i\sqrt{\mu}(\varphi + 2\pi)] = \exp[\pm i\sqrt{\mu}\varphi]$$

Hal ini meminta bahwa  $\sqrt{\mu}$  merupakan bilangan bulat,  $\sqrt{\mu} = m(m = 0, 1, 2, \dots)$ .

Dengan kata lain

$$\mu = m^2$$

dan

$$\Phi(\varphi) = \exp[\pm im\varphi].$$

**Suku  $\Theta(\theta)$  Persamaan Laplace**

Dengan  $\mu = m^2$ , (6.19) menjadi

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta(\theta) + \lambda \sin^2 \theta = m^2$$

atau

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \Theta(\theta) + \left[ \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta(\theta) = 0. \quad (6.20)$$

Dengan perubahan variabel

$$x = \cos \theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - x^2,$$

dan misalkan  $\Theta(\theta) = y(x)$ , maka (6.20) menjadi

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{d}{dx} y(x) \right] + \left[ \lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y(x) = 0. \quad (6.21)$$

Seperti yang sudah kita diskusikan, solusi persamaan ini akan divergen pada  $x = \pm 1$ , kecuali  $\lambda$  sama dengan  $l(l+1)$ , dengan  $l$  adalah bilangan bulat ( $l = 0, 1, 2, \dots$ ). Dengan kata lain, agar solusinya secara fisis diterima, konstanta separasi  $\lambda$ , sebagai sebuah nilai eigen, haruslah

$$\lambda = l(l+1)$$

Dengan  $\lambda$  ini persamaan

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} y(x) \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y(x) = 0$$

dikenal sebagai persamaan Legendre terasosiasi. Sebuah syarat tambahan untuk persamaan ini agar diperoleh solusi yang diterima adalah  $m$  haruslah berada pada  $-l \leq m \leq l$ . Jika syarat ini terpenuhi, solusi persamaan ini dikenal sebagai polinomial Legendre terasosiasi

$$y(x) = P_l^{|m|}(x).$$

Polinomial Legendre terasosiasi berhubungan dengan (diturunkan dari) polinomial Legendre  $P_l(x)$ , yang merupakan solusi untuk  $m = 0$ . Persamaan

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d}{dx} y(x) \right] + l(l+1)y(x) = 0$$

dikenal sebagai persamaan Legendre. Solusinya dinamakan sebagai polinomial Legendre  $P_l(x)$ . Sehingga suku  $\Theta(\theta)$  persamaan Laplace diberikan oleh

$$\Theta(\theta) = P_l^{|m|}(\cos \theta).$$

Sehingga bersama dengan  $\varphi(\varphi) = e^{im\varphi}$ , solusi suku angular persamaan Laplace dalam koordinat bola dapat dinyatakan dengan fungsi harmonik bola  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ .

### Suku Radial $R(r)$ dari Persamaan Laplace

Suku radial persamaan Laplace diberikan oleh (6.17). Dengan  $\lambda = l(l+1)$ , persamaan ini menjadi

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R(r) + 2r \frac{d}{dr} R(r) = l(l+1)R(r). \quad (6.22)$$

Persamaan seperti ini dikenal sebagai persamaan Euler-Cauchy dan dapat diselesaikan dengan mengganti variabel

$$r = e^t, \quad t = \ln r, \quad \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= \frac{dR}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dR}{dt}, \\ \frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{dR}{dt} \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \frac{dR}{dt} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left[ \frac{dR}{dt} \right] \frac{dt}{dr} = -\frac{1}{r^2} \frac{dR}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 R}{dt^2}. \end{aligned}$$

Maka

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + 2r \frac{d}{dr} R = \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt}.$$

Sehingga (6.22) menjadi

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt} = l(l+1)R.$$

Ini adalah persamaan diferensial dengan koefisien konstan. Cara standar untuk menyelesaikannya adalah dengan memilih

$$R(t) = e^{mt},$$

sehingga

$$\frac{dR}{dt} = me^{mt}, \quad \frac{d^2 R}{dt^2} = m^2 e^{mt}.$$

Maka  $m$  dapat ditentukan dari

$$m^2 + m = l(l+1)$$

atau

$$(m-l)(m+l+1) = 0.$$

Jelaslah

$$m = \begin{cases} l, \\ -l-1. \end{cases}$$

Jadi

$$R(r) = \begin{cases} e^{lt} = e^{l \ln r} = r^l, \\ e^{-(l+1)t} = e^{-(l+1) \ln r} = \frac{1}{r^{l+1}} \end{cases}$$

Jadi, solusi umum persamaan Laplace diberikan oleh

$$F(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left( a_{lm} r^l + b_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{\pm m \varphi}.$$

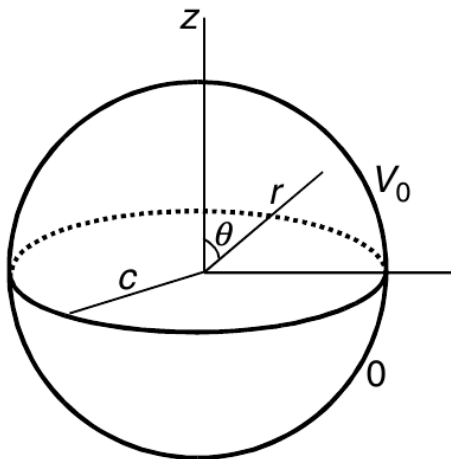
Jika persoalannya tidak bergantung  $\varphi$  ( $m = 0$ , hal yang umum), solusinya menjadi

$$F(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + b_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Koefisien-koefisien  $a_{lm}$  dan  $b_{lm}$  ditentukan oleh syarat batas.

**Contoh 6.4.1** Sebuah bola konduktor berongga berjari-jari  $c$  dibagi menjadi dua pada ekuator dengan strip isolasi tipis. Bagian atas bola diberikan muatan  $V_0$  dan bagian bawah dijaga pada potensial nol, seperti pada Gambar 6.9. Carilah potensial di dalam





Gambar 6.9: Bola konduktor berongga

dan di luar bola.

**Solusi 6.4.1** Potensial listrik  $V$  yang memenuhi persamaan Laplace dan persoalannya bersimetri sumbu, sehingga bentuk umum potensialnya adalah

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + b_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Syarat batasnya adalah

$$V(c, \theta) = \begin{cases} V_0 & \text{untuk } 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ 0 & \text{untuk } \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases}$$

Di dalam bola (untuk  $r < c$ ) kita menginginkan solusinya berhingga pada titik asal sehingga  $b_l = 0$  untuk semua  $l$ . Dengan memasukkan syarat batas pada  $r = c$ , kita memiliki

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l c^l P_l(\cos \theta) = V(c, \theta).$$

Kita bisa menentukan koefisien  $a_l$  dengan ortogonalitas polinomial Legendre. Kita kalikan kedua ruas persamaan ini dengan  $P_n(\cos \theta) \sin \theta$  dan mengintegrasikannya dari  $\theta = 0$  sampai  $\pi$ ,

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_l c^l \int_{\theta=0}^{\pi} P_l(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} V(c, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Karena

$$\int_{\theta=0}^{\pi} P_l(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 P_l(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nl},$$

maka

$$a_n c^n \frac{2}{2n+1} = \int_{\theta=0}^{\pi} V(c, \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = V_0 \int_{\theta=0}^{\pi/2} P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta.$$

Dengan mengubah  $n$  menjadi  $l$  dan  $\cos \theta$  menjadi  $x$ , kita melihat  $a_l$  diberikan oleh

$$a_l = \frac{1}{c^l} \frac{2l+1}{2} V_0 \int_0^1 P_l(x) dx.$$

Oleh karena itu

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{2l+1}{2} V_0 \int_0^1 P_l(x) dx \right) \left( \frac{r}{c} \right)^l P_l(\cos \theta).$$

Karena polinomial Legendre orde rendah relatif sederhana, beberapa koefisien dapat dengan mudah dihitung

$$a_0 = \frac{1}{2} V_0, \quad a_1 = \frac{3}{4c} V_0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{7}{16c^3} V_0, \dots$$

Jadi

$$V(r, \theta) = \frac{1}{2} V_0 + \frac{3}{4} V_0 \frac{r}{c} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{16} \left( \frac{r}{c} \right)^3 P_3(\cos \theta) + \dots$$

Untuk persoalan ini, koefisien umum  $a_l$  dapat dinyatakan dalam rumus tertutup. Kadang, hal ini cukup penting. Sebagai contoh, jika kita menginginkan komputer untuk menjumlahkan potensial dengan akurasi yang tinggi, maka sebaiknya kita memiliki rumus analitiknya. Ingat kembali

$$\int_0^1 P_l(x) dx = \frac{1}{2l+1} [P_{l-1}(0) - P_{l+1}(0)]$$

dan  $P_{l-1}(0) = P_{l+1}(0) = 0$  jika  $l$  adalah bilangan genap (jadi  $l-1$  dan  $l+1$  adalah ganjil). Sehingga  $a_l = 0$  untuk semua bilangan genap kecuali  $a_0$ , yang sama dengan  $V_0/2$ . Maka,  $V(r, \theta)$  dapat dituliskan sebagai

$$V(r, \theta) = \frac{1}{2} V_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} r^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta),$$

dengan

$$a_{2n+1} = \frac{1}{c^{2n+1}} \frac{4n+3}{2} V_0 \int_0^1 P_{2n+1}(x) dx.$$

Sekarang, karena

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x) dx = \frac{1}{4n+3} [P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)]$$

dan sudah ditunjukkan bahwa

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2},$$

maka

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx = \frac{1}{4n+3} \left[ (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{4n+3}{2n+2} \right]. \quad (6.23)$$

Oleh karena itu  $V(r, \theta)$  di dalam bola diberikan oleh

$$V(r, \theta) = \frac{V_0}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{4n+3}{2n+2} \right] \left( \frac{r}{c} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta) \right\}.$$

Di luar bola (untuk  $r > c$ ), kita menginginkan potensialnya berhingga ketika  $r \rightarrow \infty$ . Sehingga kita harus memilih  $a_l$  dalam rumus umum untuk semua  $l$ . Dalam kasus ini, dengan memasukkan syarat batas pada  $r = c$ , kita mempunyai

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{c^{l+1}} P_l(\cos \theta) = V(c, \theta).$$

Mengikuti argumen yang sama seperti sebelumnya, kita peroleh

$$b_l \frac{1}{c^{l+1}} = \frac{2l+1}{2} V_0 \int_0^1 P_l(x) dx.$$

Jadi  $V(r, \theta)$  di luar bola diberikan oleh

$$V(r, \theta) = \frac{V_0}{2} \frac{c}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{4n+3}{2n+2} \right] \left( \frac{c}{r} \right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta) \right\}.$$

Perlu diperhatikan di sini, solusi di dalam ( $r < c$ ) dan di luar bola ( $r > c$ ) sama ketika  $r = c$ .

**Contoh 6.4.2.** Potensial Listrik sebuah Cincin Bermuatan. Carilah potensial listrik untuk sebarang titik yang diakibatkan oleh muatan total  $Q$  yang terdistribusi seragam pada cincin berjari-jari  $c$ .

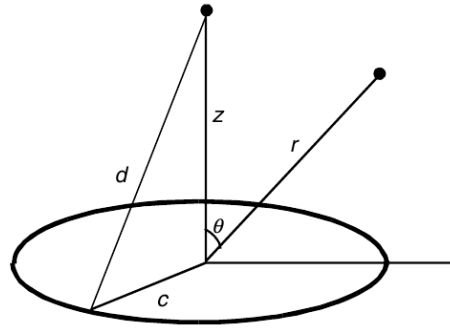
**Solusi 6.4.2.** Dari fisika dasar kita telah belajar bahwa potensial listrik  $V$  pada sebuah titik medan  $P$  yang diakibatkan muatan  $Q$  adalah

$$V = \frac{Q}{d},$$

dengan  $d$  adalah jarak antara titik medan  $P$  dan muatan. Jadi pada titik  $P$  pada sumbu- $z$  pada sebuah jarak  $z$  di atas bidang (lihat Gambar 6.10), potensial listriknya diberikan oleh

$$V = \frac{Q}{(z^2 + c^2)^{1/2}},$$

Karena semua titik berada pada jarak yang sama  $(z^2 + c^2)^{1/2}$  dari titik medan  $P$ .



Gambar 6.10: Potensial listrik oleh sebuah cincin bermuatan.

Untuk menghitung potensial pada titik sebarang di luar sumbu  $-z$  akan cukup sulit jika kita mencoba menjumlahkan potensial yang diakibatkan oleh muatan pada cincin. Tetapi, kita dapat mencari potensial dengan menggunakan fakta bahwa potensial  $V(r, \theta)$  memenuhi persamaan Laplace dan direduksi menjadi  $V(z, 0)$  ketika  $r = z$  dan  $\theta = 0$ . Pertama jika  $r > z$ , karena kita mensyaratkan  $V(r, \theta)$  berhingga ketika  $r \rightarrow \infty$ , semua solusi  $a_l$  persamaan Laplace harus dipilih nol, yang tersisa adalah

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

Selanjutnya untuk  $r = z$  dan  $\theta = 0$

$$V(z, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{z^{l+1}} P_l(1) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{z^{l+1}}, \quad (6.24)$$

karena  $P_l(1) = 1$ . Tetapi untuk  $r > c$

$$V(z, 0) = \frac{Q}{(z^2 + c^2)^{1/2}} = \frac{Q}{z} \left[ 1 + \left( \frac{c}{z} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

dan

$$\left[ 1 + \left( \frac{c}{z} \right)^2 \right]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{c}{z} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{c}{z} \right)^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \left( \frac{c}{z} \right)^{2k},$$

dengan koefisien-koefisien binomial adalah

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{\left[ -\frac{1}{2} \right] \left[ -\frac{1}{2} - 1 \right] \dots \left[ -\frac{1}{2} - (k-1) \right]}{k!} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k k!} \\ &= (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1) (2k)(2k-2) \dots 2}{2^k k! (2k)(2k-2) \dots 2} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2}. \end{aligned}$$

Jadi

$$V(z, 0) = \frac{Q}{z} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \right] \left( \frac{c}{z} \right)^{2k} \right\}.$$

Membandingkan dengan (6.24), kita lihat bahwa  $b_l = 0$  untuk semua  $l$  ganjil. Maka (6.24) dapat dituliskan sebagai

$$V(z, 0) = \frac{1}{z} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_{2l}}{z^{2l}}$$

dan

$$b_{2l} = Q(-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} c^{2l}.$$

Sekarang kita menyimpulkan potensial  $V(r, \theta)$  untuk  $r > c$  haruslah

$$V(r, \theta) = \frac{Q}{r} \left\{ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \left(\frac{c}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos \theta) \right\}.$$

Hal ini demikian karena fungsi tanpa konstanta sebarang memenuhi persamaan Laplace dan mereduksi menjadi jawaban yang tepat pada sumbu- $z$ . Teorema keunikan (*uniqueness theorem*) menyatakan hanya terdapat sebuah fungsi seperti itu.

Potensial untuk  $r < c$  dapat diperoleh dengan cara yang mirip. Karena simetri sumbu dan persyaratan bahwa potensial harus berhingga pada  $r = 0$ , solusi persamaan Laplace harus memiliki bentuk

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \theta).$$

Untuk  $r = z$ ,  $\theta = 0$ , solusi ini menjadi

$$V(z, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l P_l(1) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l.$$

Perbandingan rumus ini dengan

$$\begin{aligned} V(z, 0) &= \frac{Q}{(z^2 + c^2)^{1/2}} = \frac{Q}{c} \left[ 1 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{Q}{c} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \right] \left(\frac{z}{c}\right)^{2k} \right\}, \quad \text{untuk } z < c \end{aligned}$$

jelas menunjukkan

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{Q}{c}, \quad a_{2l+1} = 0, \\ a_{2l} &= \frac{Q}{c_{2l+1}} (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} c^{2l}. \end{aligned}$$

Sehingga potensial  $r < c$  diberikan oleh

$$V(r, \theta) = \frac{Q}{c} \left\{ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \left(\frac{r}{c}\right)^{2l} P_{2l}(\cos \theta) \right\}.$$

**Contoh 6.4.3.** Bola konduktor dalam medan listrik seragam. Bola konduktor ditanahkan berjari-jari  $r_0$  diletakkan pada medan listrik seragam sebelumnya  $\mathbf{E}_0$ . Carilah potensial listrik di luar bola.

**Solusi 6.4.3.** Medan listrik  $\mathbf{E}$  dihubungkan dengan potensial  $V$  oleh  $-\nabla V = \mathbf{E}$ . Sehingga medan seragam, diambil dalam arah  $-z$ , mempunyai potensial listrik

$$V = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta,$$

karena

$$-\nabla(-E_0 z) = \mathbf{k} E_0 \frac{\partial}{\partial z} z = \mathbf{E}_0.$$

Potensial ini memenuhi persamaan Laplace  $\nabla^2 V = 0$ , seperti seharusnya potensial ketika terdapat bola. Kita memilih koordinat bola  $(r, \theta, \varphi)$  karena bentuk konduktor yang sferis. Lebih dari itu, dengan sumbu  $-z$  positif dipilih dalam arah medan, persoalan ini jelaslah bersimetri sumbu. Sehingga solusi umum persamaan Laplace diberikan oleh

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + b_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (6.25)$$

Karena medan listrik mula-mula yang tak terganggu adalah  $\mathbf{k} E_0$ , kita mensyaratkan, sebagai syarat batas

$$V(r \rightarrow \infty) = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta).$$

Pada  $r$  yang besar, (6.25) menjadi

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \theta),$$

karena  $1/r^{l+1} \rightarrow 0$  ketika  $r \rightarrow \infty$ . Dua buah persamaan terakhir menunjukkan

$$a_1 = -E_0 \quad \text{dan} \quad a_l = 0, \quad l \neq 1.$$

Syarat batas yang lain meminta  $V(r_0, \theta) = 0$ , karena bola ditanahkan. Yaitu

$$V(r_0, \theta) = -E_0 r_0 P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{r_0^{l+1}} P_l(\cos \theta) = 0.$$

Jelaslah

$$b_1 = E_0 r_0^3 \quad \text{dan} \quad b_l = 0, \quad l \neq 1.$$

Sehingga potensialnya diberikan oleh

$$V(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta \left[ 1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right]. \quad (6.26)$$

Solusinya mirip dengan (6.6), yang mendeskripsikan potensial yang dihasilkan oleh silinder konduktor yang diletakkan pada medan seragam. Satu-satunya perbedaan adalah  $(r_0/r)^3$  digantikan dengan  $(r_0/\rho)^2$ .

**Contoh 6.4.4.** Bola dalam sebuah aliran seragam. Untuk sebuah fluida tak kompresibel, kecepatan  $v$  dari aliran dapat diturunkan dari potensial kecepatan  $U$ , sehingga  $\mathbf{v} = \nabla U$ , dengan  $U$  memenuhi persamaan Laplace  $\nabla^2 U = 0$ . Sebuah bola berjari-jari  $r_0$  diletakkan dalam aliran seragam tersebut, carilah potensial kecepatan.

**Solusi 6.4.4.** Pada jarak tak hingga dari bola, alirannya seragam. Anggap kecepatan  $v$  memiliki arah  $-z$ .

$$U(r \rightarrow \infty) = vz = vr \cos \theta = vr P_1(\cos \theta).$$

Kecepatan normal pada permukaan bola haruslah nol

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial r} \right]_{r=r_0} = 0.$$

Solusi kita diberikan lagi oleh

$$U(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l + b_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Untuk memenuhi syarat batas asimptotik

$$U(r \rightarrow \infty) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \theta) = vr P_1(\cos \theta).$$

kita harus memiliki

$$a_1 = v \quad \text{dan} \quad a_l = 0, \quad l \neq 1.$$

Jadi

$$U(r, \theta) = vr P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

Sekarang

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} &= v P_1(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{(l+1)}{r^{l+2}} P_l(\cos \theta), \\ \left[ \frac{\partial U}{\partial r} \right]_{r=r_0} &= v P_1(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{(l+1)}{r_0^{l+2}} P_l(\cos \theta) = 0. \end{aligned}$$

Jelaslah

$$b_1 = \frac{1}{2} vr_0^3 \quad \text{dan} \quad b_l = 0, \quad l \neq 1.$$

Jadi

$$U(r, \theta) = v \cos \theta \left[ r + \frac{r_0^3}{2r^2} \right]. \quad (6.27)$$

Hasil ini mirip dengan (6.26) tetapi tidak identik. Perhatikan bahwa komponen tangensial medan listrik adalah nol pada permukaan bola, sedangkan komponen kecepatan aliran pada permukaan bola nol.

### 6.4.2 Persamaan Helmholtz dalam Koordinat Bola

Dalam koordinat bola, persamaan Helmholtz memiliki bentuk

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right] F(r, \theta, \varphi) = 0.$$

Dengan  $F(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + k^2 r^2 \right] R = -\frac{1}{\Theta\Phi} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \Theta\Phi.$$

Kedua ruas persamaan ini harus sama dengan konstanta separasi yang sama. Terlihat bahwa suku angular dari solusi  $\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$  identik dengan solusi persamaan Laplace. Sehingga konstanta separasinya haruslah  $l(l+1)$ . Sehingga persamaan radialnya berbentuk

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R(r) + 2r \frac{d}{dr} R(r) + [k^2 r^2 - l(l+1)] R(r) = 0.$$

Dengan perubahan variabel  $x = kr$ , persamaan ini menjadi persamaan Bessel sferis. Jadi solusi persamaan ini adalah fungsi Bessel dan Neumann sferis  $j_l(kr)$  dan  $n_l(kr)$ . Contoh berikut adalah ilustrasi penggunaan solusi ini.

**Contoh 6.4.5.** Sebuah partikel yang bermassa  $m$  terletak dalam sebuah bola yang berjari-jari  $R$ . Partikel digambarkan oleh fungsi gelombang yang memenuhi persamaan gelombang Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r, \theta, z) = E\psi(r, \theta, z)$$

dan syaratnya fungsi gelombang  $\psi$  berhingga dan mendekati nol pada permukaan bola. Tentukan energi terendah yang diizinkan.

**Solusi 6.4.5.** Persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk persamaan Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$$

dengan

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E.$$

Suku radial  $R_l(r)$  dari solusi  $\psi = R_l(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$  diberikan oleh

$$R_l(r) = a_l j_l(kr) + b_l n_l(kr).$$

Karena fungsinya harus berhingga, kita memilih  $b_l = 0$  karena fungsi Neumann sferis divergen pada  $r \rightarrow 0$ . Untuk fungsi yang menuju nol pada permukaan bola,  $kR$



haruslah salah satu akar dari  $j_l(x) = 0$ . Untuk energi terendah,  $kR$  haruslah nol pertama dari  $j_0(x)$ . Karena

$$j_0(x) = \frac{1}{x} \sin x$$

nilai nolnya pada  $x = n\pi$ ,  $n$  bilangan bulat. Jadi  $k = n\pi/R$ . Sehingga energinya adalah

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2$$

dengan energi minimum untuk  $n = 1$ ,

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2m} = \left( \frac{\pi}{R} \right)^2.$$

### 6.4.3 Persamaan Gelombang dalam Koordinat Bola

Pada Bab 5, kita mengetahui bahwa salah satu solusi dari fungsi gelombang adalah

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u$$

adalah gelombang bidang

$$u(x, t) = e^{i(kx - kat)} = e^{i(kx - \omega t)},$$

dengan panjang gelombangnya  $2\pi/k$  dan frekuensi sudut  $\omega = ka$ . Ini adalah gelombang bidang karena muka gelombangnya adalah bidang yang tegak lurus dengan sumbu- $x$ . Bidang ini bergerak dari kiri ke kanan dengan kecepatan  $a$ .

Dengan menyatakan persamaan gelombang dalam koordinat bola, kita dapat mempelajari gelombang bola, muka gelombangnya adalah sebuah bola.

Pertama asumsikan bahwa gelombang bola hanya bergantung pada jarak radial  $r$ . Pada suku ini persamaan gelombang dapat dituliskan sebagai

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] u(r, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r, t).$$

Kalikan kedua ruas dengan  $r$ ,

$$\left[ r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \right] u(r, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [ru(r, t)].$$

Karena

$$\left[ r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \right] u(r, t) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} [ru(r, t)],$$

dapat kita tuliskan persamaan gelombang tiga dimensi sebagai

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} [ru(r, t)] = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [ru(r, t)].$$

Jelas bahwa  $ru(r, t)$  mempunyai peran yang sama dengan  $u(x, t)$  dalam persamaan dimensi satu dimensi. Sehingga salah satu solusinya dapat dituliskan sebagai

$$ru(r, t) = e^{i(kr - \omega t)}$$

atau

$$u(r, t) = \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)}.$$

Kita dapat menginterpretasi solusi ini sebagai gelombang bola ke luar dengan panjang gelombang  $2\pi/k$  dan sebuah frekuensi sudut  $\omega$ . Perhatikan bahwa amplitudonya berkurang dengan faktor  $1/r$ , ketika  $r$  membesar. Hal ini memang sudah seharusnya, karena luas muka gelombang membesar dengan faktor  $r^2$ . Sehingga intensitas gelombang (energi tiap satuan luas yang sebanding dengan  $|u|^2$ ) dijumlahkan terhadap muka gelombang adalah sebuah konstanta.

Secara umum, gelombang bola juga bergantung pada  $\theta$  dan  $\varphi$ . Kebergantungan sudut ditentukan oleh syarat batas atau pada bagaimana gelombang ini dibangkitkan.

Solusi terpisah persamaan gelombang adalah perkalian suku bergantung waktu dan suku bergantung ruang. Suku bergantung waktu sama dengan persamaan gelombang satu dan dua dimensi yaitu

$$T(t) = e^{ikat}, \quad e^{-ikat}$$

atau ekuivalen dengan bagian riilnya. Kemudian  $e^{-ikat}$  dapat dituliskan sebagai  $e^{-i\omega t}$ , dengan  $\omega$  adalah frekuensi sudut.

Suku ruangnya diberikan oleh persamaan Helmholtz. Dalam koordinat bola, solusinya diberikan oleh

$$F_{lm}(r, \theta, \varphi) = [a_{lm}j_l(kr) + b_{lm}n_l(kr)] Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Jika kita mencari gelombang bola yang ke luar pada  $r$  yang besar, maka kita harus mengkombinasikan fungsi Bessel sferis  $j_l(kr)$  dan fungsi Neumann sferis  $n_l(kr)$  ke dalam fungsi Hankel sferis jenis pertama  $h^{(1)}_l(kr)$ . Yaitu,  $b_{lm}$  harus sama dengan  $ia_{lm}$ . Ingat ketika  $x \rightarrow \infty$

$$h_l^{(1)}(x) \rightarrow \frac{1}{x} e^{i[x - (l+1)\pi/2]}.$$

Dengan cara ini, secara asimptotik  $u(r, \theta, \varphi, t) = F(r, \theta, \varphi)T(t)$  akan berbentuk

$$u_{lm}(r, \theta, \varphi, t) \rightarrow \frac{1}{kr} e^{i(kr \pm \omega t)} Y_l^m(\theta, \varphi),$$

Tanda minus ( $-\omega t$ ) adalah untuk gelombang bola ke luar dan tanda positif ( $+\omega t$ ) untuk gelombang bola ke dalam. Sehingga, gelombang bola ke luar adalah kombinasi linier dari komponen-komponen ini.

$$u(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} h_l^{(1)}(kr) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}.$$

**Contoh 6.4.6.** Gelombang akustik  $u(\mathbf{r}, t)$ , memenuhi persamaan gelombang

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u$$

diemisikan dari antena sferis. Pada  $r = r_0$ , persamaan ini memenuhi syarat batas

$$u = \begin{cases} V_0 e^{-i\omega t} & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ -V_0 e^{-i\omega t} & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

Carilah solusi persamaan gelombang ke luar.

**Solusi 6.4.6.** Pertama konstanta separasi  $k$  harus sama dengan

$$k = \frac{\omega}{a}.$$

Selanjutnya kita perhatikan bahwa syarat batasnya bersimetri sumbu, kita hanya perlu memperhatikan solusi untuk  $m = 0$ . Maka

$$u(r, \theta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l h_l^{(1)}(kr) P_l(\cos \theta) e^{-i\omega t}.$$

Pada  $r = r_0$

$$u(r_0, \theta, 0) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l h_l^{(1)}(kr_0) P_l(\cos \theta) = \begin{cases} V_0 & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ -V_0 & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

Ini adalah deret Fourier-Legendre, koefisien-koefisiennya adalah

$$\begin{aligned} a_l h_l^{(1)}(kr_0) &= \frac{2l+1}{2} V_0 \left[ \int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] \\ &= \begin{cases} 0 & l \text{ genap}, \\ (2l+1)V_0 \int_0^1 P_l(x) dx & l \text{ ganjil}. \end{cases} \end{aligned}$$

Jadi  $l$  haruslah ganjil dan dapat dituliskan sebagai  $l = 2n + 1$  dengan  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Sehingga

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} h_{2n+1}^{(1)}(kr) P_{2n+1}(\cos \theta) e^{-i\omega t}$$

dengan

$$a_{2n+1} = \frac{4n+3}{h_{2n}^{(1)}(kr_0)} V_0 \int_0^1 P_{2n+1}(x) dx.$$

Dengan (6.23)

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x) dx = \frac{1}{4n+3} \left[ (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{4n+3}{2n+2} \right],$$

gelombang akustik ke luar diberikan oleh

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n V_0 \frac{1}{h_{2n+1}^{(1)}(kr_0)} h_{2n+1}^{(1)}(kr) P_{2n+1}(\cos \theta) e^{-i\omega t},$$

$$A_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{4n+3}{2n+2}.$$

## 6.5 Persamaan Poisson

Persamaan Poisson adalah persamaan parsial diferensial parsial tak homogen. Yang paling sering kita jumpai mungkin adalah

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})$$

dengan  $V(r)$  adalah potensial elektrostatik dan  $\rho(\mathbf{r})$  adalah rapat muatan listrik. Ini adalah persamaan medan. Meskipun potensial pada titik  $\mathbf{r}$  yang disebabkan oleh muatan di setiap titik, namun  $\nabla^2 V(\mathbf{r})$ , secara ajaib terkait, melalui persamaan Poisson, hanya rapat muatan pada titik yang sama  $\mathbf{r}$ . Penemuan persamaan medan seperti ini adalah salah satu prestasi analisis terbesar. Di tempat tanpa muatan, persamaan tereduksi menjadi persamaan Laplace,  $\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0$ .

Dalam fisika dasar, kita belajar bahwa potensial elektrostatik karena muatan seragam didistribusikan pada bola adalah sama seperti jika semua muatan itu terkonsentrasi di pusat, memberikan titik potensial dihitung di luar bola. Pada contoh berikut, kita akan menggambarkan bagaimana persoalan dipecahkan dalam konteks teori persamaan diferensial parsial.

**Contoh 6.5.1.** Tentukan potensial elektrostatik  $V$  yang memenuhi persamaan diferensial

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\rho_0, & r < r_0, \\ 0, & r > r_0 \end{cases}$$

dan syarat batas

$$V \rightarrow 0, \text{ ketika } r \rightarrow \infty,$$

dan  $V$  berhingga di setiap tempat.

**Solusi 6.5.1.** Pertama kita melihat bahwa persamaan Poisson adalah persamaan diferensial orde dua. Istilah tak homogen, meskipun tak kontinu, yang berhingga di tiap tempat, sehingga solusi dan turunan pertama harus kontinu. Selanjutnya,

kita mencatat bahwa persoalan ini adalah bersimetri bola, yang solusinya tidak akan memiliki ketergantungan sudut. Jadi untuk  $r < r_0$ ,

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} V(r) \right] = -\varrho_0,$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$r^2 \frac{d}{dr} V(r) + 2r \frac{d}{dr} V(r) = -\varrho_0 r^2.$$

Persamaan ini adalah persamaan Euler - Cauchy. Dengan substitusi  $r = \exp(t)$ , ini bisa diubah ke dalam persamaan tak homogen dengan koefisien konstan,

$$\frac{d^2}{dt^2} V(t) + \frac{d}{dt} V(t) = -\varrho_0 e^{2t}.$$

Solusi dari persamaan ini adalah

$$V(t) = c_1 + c_2 e^{-t} - \frac{1}{6} \varrho_0 e^{2t}.$$

Jadi

$$V(r) = c_1 + c_2 \frac{1}{r} - \frac{1}{6} \varrho_0 r^2.$$

Karena syarat  $V(r)$  harus berhingga pada  $r = 0$ ,  $c_2$  harus bernilai nol. Maka, untuk  $r < r_0$ ,

$$V(r) = c_1 - \frac{1}{6} \varrho_0 r^2 = V_{\text{in}}(r).$$

Untuk  $r > r_0$  solusi persamaan Laplace tidak bergantung pada sudut (bergantung pada  $P_0(\cos \theta) = 1$ )

$$V(r) = a_0 + b_0 \frac{1}{r}.$$

Koefisien  $a_0$  harus bernilai nol untuk membuat  $V(r) \rightarrow 0$  ketika  $r \rightarrow \infty$ . Jadi untuk  $r > r_0$ ,

$$V(r) = b_0 \frac{1}{r} = V_{\text{out}}(r).$$

Pada  $r = r_0$ ,

$$V_{\text{in}}(r_0) = V_{\text{out}}(r_0), \quad \left. \frac{dV_{\text{in}}(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{dV_{\text{out}}(r)}{dr} \right|_{r=r_0}$$

Jadi

$$c_1 - \frac{1}{6} \varrho_0 r_0^2 = b_0 \frac{1}{r_0}, \quad -\frac{1}{3} \varrho_0 r_0 = -b_0 \frac{1}{r_0^2}.$$

Maka

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{r} \left( \frac{1}{3} \varrho_0 r_0^3 \right) & \text{untuk } r > r_0, \\ \frac{1}{2} \varrho_0 \left( r_0^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) & \text{untuk } r < r_0. \end{cases}$$

Tidak mengherankan, jika hasil ini sesuai dengan apa yang kita dapatkan dengan hukum Gauss dari fisika dasar. Sebagai contoh potensial yang dihasilkan oleh muatan titik  $Q$  pada titik asal adalah

$$V(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r}.$$

Solusi untuk  $r > r_0$  dapat ditulis

$$V(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \left( \varrho_0 \frac{4\pi}{3} r_0^3 \right).$$

Karena  $4\pi r_0^3/3$  adalah volum bola, kita dapat melihat hasil ini sama jika semua muatan diletakkan di pusat.

### 6.5.1 Persamaan Poisson dan Fungsi Green

Pendekatan fungsi Green untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa dapat diperluas untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial.

Fungsi Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  untuk persamaan Poisson didefinisikan sebagai

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (6.28)$$

dengan  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  adalah fungsi delta tiga dimensi. Dalam listrik statik, fungsi Green adalah potensial pada  $\mathbf{r}$  yang disebabkan oleh sebuah muatan titik dari kuat satuan pada  $\mathbf{r}'$ . Dalam suku fungsi Green, solusi persamaan Poisson

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r}) \quad (6.29)$$

yang dapat dinyatakan sebagai

$$u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') d^3\tau',$$

dengan integral volum diambil pada keseluruhan ruang. Dapat dengan mudah ditunjukkan  $u(\mathbf{r})$  memenuhi persamaan Poisson

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(\mathbf{r}) &= \nabla^2 \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') d^3\tau' = \iiint_V \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') d^3\tau' \\ &= \iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') d^3\tau' = \varrho(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Kita dapat membawa  $\nabla^2$  ke dalam integral karena  $\nabla^2$  bekerja pada  $\mathbf{r}$  dan integrasi dilakukan terhadap  $\mathbf{r}'$ . Secara fisik, (6.29) adalah pernyataan prinsip superposisi, potensial keseluruhan adalah jumlah potensial individu yang disebabkan oleh muatan di semua titik.

Sekarang marilah kita mencari  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  memenuhi (6.28) dan syarat asimptotik (batas)  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow 0$  ketika  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ . Karena persoalannya bersimetri bola terhadap  $\mathbf{r}'$ , marilah kita perhatikan sebuah bola yang berpusat pada  $\mathbf{r}'$ . Dengan mengintegrasikan (6.28) terhadap bola ini, dengan definisi fungsi delta, kita peroleh

$$\iiint_V \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\tau = \iiint_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\tau = 1 \quad (6.30)$$

Tetapi,

$$\iiint_V \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\tau = \iiint_V \nabla \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\tau$$

dan menurut teorema divergensi

$$\iiint_V \nabla \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3\tau = \iint_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dS,$$

dengan  $S$  adalah permukaan bola dan  $\mathbf{n}$  adalah normal pada permukaan. Perhatikan bahwa pada permukaan integral,  $\mathbf{r}$  adalah pada permukaan bola dan  $\mathbf{r}'$  berada pada pusat bola. Karena adanya simetri terhadap  $\mathbf{r}'$ , kita mengharapkan bahwa  $G$  bernilai sama di setiap tempat pada permukaan bola yakni

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = G(r),$$

dengan  $r$  adalah jari-jari bola. Maka

$$\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} = \nabla G(r) \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial r} G(r)$$

dan

$$\iint_S \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} G(r).$$

Bandingkan dengan (6.30), kita peroleh

$$4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} G(r) = 1 \text{ atau } \frac{\partial}{\partial r} G(r) = \frac{1}{4\pi r^2}.$$

Integralkan rumus ini, kita dapatkan

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi r} + C.$$

Karena kita meminta  $G(r) \rightarrow 0$  ketika  $r \rightarrow \infty$ , konstanta  $C$  haruslah nol. Sehingga fungsi Greennya diberikan oleh

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Fungsi Green ini kadang dikatakan sebagai solusi dasar untuk membedakan dengan fungsi Green yang lain yang memenuhi syarat batas tambahan. Sebelum kita membicarakannya, kita akan menggunakan fungsi Green untuk menyelesaikan persoalan pada contoh sebelumnya.

**Contoh 6.5.2.** Selesaikan persoalan pada contoh sebelumnya dengan metode fungsi Green.

**Solusi 6.5.2.** Misalkan  $u(\mathbf{r})$  adalah solusi persamaan Poisson  $\nabla^2 u(\mathbf{r}) = \varrho(\mathbf{r})$ , sehingga

$$u(\mathbf{r}) = \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varrho(\mathbf{r}') d^3\tau'. \quad (6.31)$$

Karena

$$\varrho(\mathbf{r}') = \begin{cases} -\varrho_0 & \text{jika } r' < r_0 \\ 0 & \text{jika } r' > r_0 \end{cases},$$

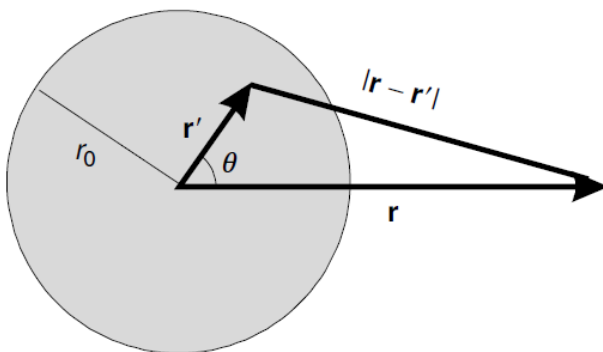
dan

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

persoalan ini jelas bersimetri bola. Jadi  $u(\mathbf{r})$  hanya merupakan fungsi  $r$

$$u(r) = 2\pi \int_0^{r_0} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varrho_0 r'^2 \sin \theta \, d\theta dr',$$

dengan  $r, r'$  dan  $\theta$  didefinisikan pada gambar berikut



Dengan menggunakan hukum cosinus dan fungsi pembangkit polinomial Legendre, kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \frac{1}{(r^2 - 2rr' \cos \theta r'^2)^{1/2}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \theta) & \text{untuk } r > r' \\ \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos \theta) & \text{untuk } r < r' \end{cases}. \end{aligned}$$

Jika  $r > r_0$ , jelaslah  $r > r'$ , dan  $u(r)$  dapat dinyatakan sebagai

$$u(r) = \frac{1}{2} \varrho_0 \int_0^{r_0} \int_0^\pi \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \theta) r'^2 \sin \theta \, d\theta dr'.$$

Dengan  $P_0(\cos \theta) = 1$  dan ortogonalitas polinomial Legendre, kita dapat menghitung integrasi terhadap  $\theta$

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \int_0^\pi P_0(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{l0}.$$

Jadi untuk  $r > r_0$ ,

$$u(r) = \frac{1}{2} \varrho_0 \int_0^{r_0} \frac{1}{r} 2r'^2 dr' = \frac{1}{r} \varrho_0 \frac{1}{3} r_0^3.$$



Untuk  $r < r_0$ , integrasi  $r'$  dapat dibagi menjadi dua bagian, pertama dari 0 ke  $r$ , kemudian dari  $r$  ke  $r_0$ . Yaitu

$$u(r) = u_1(r) + u_2(r),$$

dengan

$$u_1(r) = 2\pi \int_0^r \int_0^\pi \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \varrho_0 r'^2 \sin \theta \, d\theta dr',$$

$$u_2(r) = 2\pi \int_r^{r_0} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \varrho_0 r'^2 \sin \theta \, d\theta dr'.$$

Untuk  $u_1(r)$ ,  $r > r'$  maka

$$u_1(r) = \frac{1}{2} \varrho_0 \int_0^r \frac{1}{r} 2r'^2 dr' = \frac{1}{r} \varrho_0 \frac{1}{3} r^3 = \frac{1}{r} \varrho_0 r^2.$$

Untuk  $u_2(r)$ ,  $r < r'$

$$u_2(r) = \frac{1}{2} \varrho_0 \int_r^{r_0} \int_0^\pi \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^l P_l(\cos \theta) r'^2 \sin \theta \, d\theta dr'$$

$$= \varrho_0 \int_r^{r_0} r' dr' = \frac{1}{2} \varrho_0 (r_0^2 - r^2).$$

Jadi untuk  $r < r_0$

$$u(r) = \frac{1}{3} \varrho_0 r^2 + \frac{1}{2} \varrho_0 (r_0^2 - r^2) = \frac{1}{2} \varrho_0 r_0^2 - \frac{1}{6} \varrho_0 r^2.$$

## 6.5.2 Fungsi Green dengan Syarat Batas

Fungsi Green yang diturunkan pada subbab terakhir (solusi dasar) membuat kita bisa memperoleh solusi persamaan Poisson  $u(\mathbf{r})$  yang nilainya menuju nol pada tak hingga. Biasanya solusi persamaan Poisson diharuskan untuk memenuhi syarat batas tambahan atau syarat batas yang lain. Sebagai contoh, anggap kita memiliki sebuah distribusi muatan listrik di dekat bola konduktor. Potensial elektrostatik, sebagai tambahan untuk memenuhi persamaan Poisson, harus hilang pada permukaan bola. Jika kita dapat mencari sebuah fungsi Green yang juga memenuhi syarat batas ini, kita masih bisa tetap menggunakan integral (6.31) untuk mencari potensial.

Jadi, kita ingin mencari  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  yang memenuhi persamaan  $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  dan pada waktu yang sama hilang pada batas tertentu. Secara umum, sulit untuk mencari fungsi tersebut secara langsung. Tetapi, kita perhatikan jika  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  memenuhi persamaan Laplace  $\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ , maka

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (6.32)$$

memenuhi persamaan yang mendefinisikan fungsi Green

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla^2 \left[ -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] + \nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \nabla^2 \left[ -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Kita bisa saja mengatur konstanta pada solusi persamaan Laplace  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  sehingga (6.32) sama dengan nol pada batas. Untuk batas dengan geometri sederhana, seperti bidang, bola, silinder sirkular, hal ini dapat dilakukan. Kita akan mengilustrasikan dalam contoh berikut.

**Contoh 6.5.3.** Carilah fungsi Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  untuk menyelesaikan persamaan Poisson di luar bola berjari-jari  $R$  yang ditanahkan yang pusatnya di titik awal.

**Solusi 6.5.3.** Kita ingin mencari  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  dalam bentuk

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

dengan  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  memenuhi persamaan Laplace

$$\nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0,$$

dengan  $\nabla^2$  bekerja pada  $\mathbf{r}$  (bukan pada  $\mathbf{r}'$ ). Dengan  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \theta)$  dan  $\mathbf{r}'$  berada pada sumbu  $-z$ .  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  diberikan oleh

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} \left( a_l r^l b_l \frac{1}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta).$$

Karena  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  diharuskan menuju nol ketika  $r \rightarrow \infty$ , semua  $a_l$  haruslah bernilai nol. Jadi

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

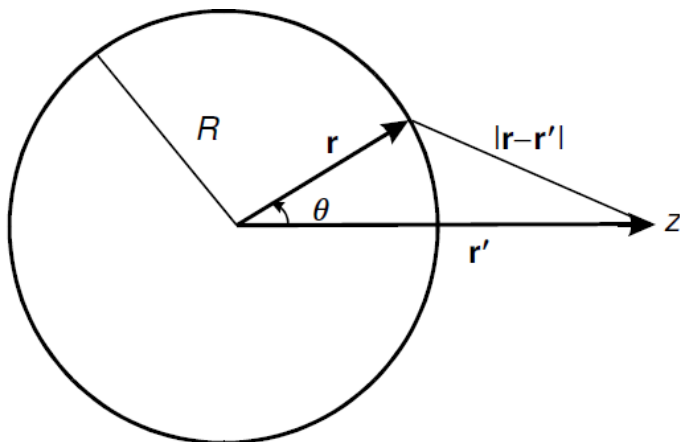
Jika  $\mathbf{r}$  adalah titik pada permukaan bola (atau sebagai vektor radial dari pusat ke sebuah titik pada permukaan bola, misalnya  $|\mathbf{r}| = r = R$ ), maka

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r=R} = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta),$$

dengan  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  dan  $\theta$  ditunjukkan Gambar 6.11.

Dengan konfigurasi ini

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(R^2 - 2Rr' \cos \theta + r'^2)^{1/2}} \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r'} \right)^l P_l(\cos \theta).$$



Gambar 6.11: Konfigurasi  $\mathbf{r}, \mathbf{r}$  dan  $\theta$  fungsi Green. Ketika  $\mathbf{r}$  berada pada titik pada permukaan bola, maka  $|\mathbf{r}| = R$ .

Syarat  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{r=R} = 0$  meminta

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r'}\right)^l P_l(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \frac{1}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) = 0.$$

Jelaslah

$$\frac{1}{4\pi} \frac{R^l}{r'^{l+1}} = \frac{b_l}{R^{l+1}}$$

atau

$$b_l = \frac{R^{2l+1}}{4\pi r'^{l+1}}.$$

Jadi

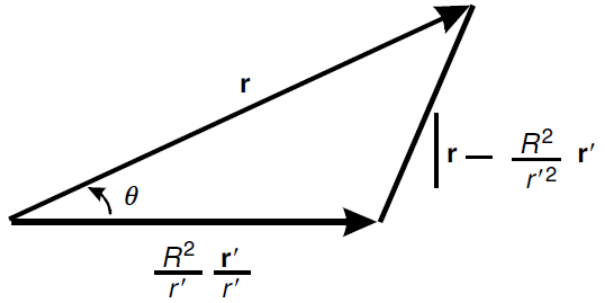
$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^{2l+1}}{r'^{l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

Menarik untuk menulis rumus terakhir sebagai

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^{2l+1}}{r'^{l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) &= \frac{R}{r'r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{r'r}\right)^l P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{R}{r'r} \frac{1}{\left[1 - 2\frac{R^2}{r'r} \cos \theta + \left(\frac{R^2}{r'r}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{R}{r'} \frac{1}{\left[r^2 - 2r\frac{R^2}{r'} \cos \theta + \left(\frac{R^2}{r'}\right)^2\right]^{1/2}}. \end{aligned}$$

Dengan bantuan gambar berikut dan hukum cosinus

$$\left[r^2 - 2r\frac{R^2}{r'} \cos \theta + \left(\frac{R^2}{r'}\right)^2\right]^{1/2} = \left|\mathbf{r} - \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}'\right|.$$



Sehingga fungsi Green sebagai akibat adanya bola yang ditanahkan diberikan oleh

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - (R^2/r'^2)\mathbf{r}'|}.$$

Fungsi Green seperti ini kadang dinamakan fungsi Dirichlet-Green. (Ketika nilai solusi pada batas dispesifikasi, dinamakan syarat batas Dirichlet.)

**Contoh 6.5.4.** Carilah potensial listrik di luar bola konduktor berjari-jari  $R$  yang ditanahkan. Potensial diakibatkan oleh muatan titik  $q$  yang terletak pada jarak  $a$  dari pusat bola dan  $a > R$ .

**Solusi 6.5.4.** Potensial diberikan oleh solusi persamaan Poisson

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -\varrho(\mathbf{r})$$

dengan syarat batas

$$u(\mathbf{r})|_{r=R} = 0.$$

Misalkan garis yang menghubungkan pusat bola dan muatan berhimpit sumbu- $z$  dan  $\mathbf{k}$  adalah vektor satuan dalam arah  $z$ , seperti tampak pada Gambar 6.12. Sehingga distribusi muatan dapat dinyatakan sebagai

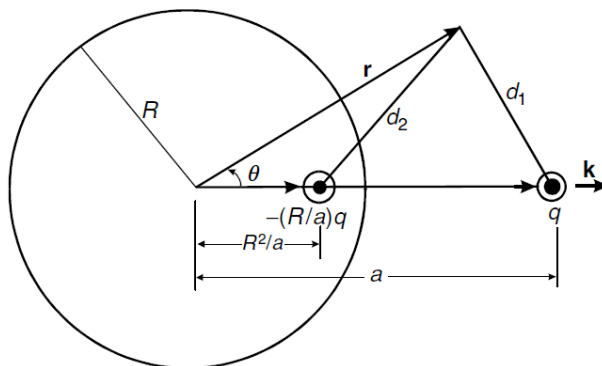
$$\varrho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - a\mathbf{k}).$$

Dalam suku fungsi Dirichlet Green, potensial diberikan oleh

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= -\iiint \varrho(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d^3\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint q\delta(\mathbf{r} - a\mathbf{k}) \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - (R^2/r'^2)\mathbf{r}'|} \right] d^3\tau'. \end{aligned}$$

Efek fungsi delta adalah mengganti  $\mathbf{r}'$  dengan  $a\mathbf{k}$  dan  $r'$  dengan  $a$  pada fungsi Green. Jadi

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{q}{|\mathbf{r} - a\mathbf{k}|} - \frac{(R/a)q}{|\mathbf{r} - (R^2/a)\mathbf{k}|} \right] = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{d_1} - \frac{1}{4\pi} \frac{(R/a)q}{d_2} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{q}{[r^2 - 2ra \cos \theta + a^2]^{1/2}} - \frac{(R/a)q}{[r^2 - 2r(R^2/a) \cos \theta + (R^2/a)^2]^{1/2}} \right]. \end{aligned}$$



Gambar 6.12: Metode bayangan. Sebuah muatan titik  $q$  diletakkan pada jarak  $a$  dari pusat bola yang ditanahkan berjari-jari  $R$ . Vektor satuan  $\mathbf{k}$  adalah arah dari garis yang menghubungkan pusat dengan muatan.

Suku pertama adalah potensial Coloumb karena muatan titik. Suku kedua disebabkan karena adanya bola. Menarik untuk memperhatikan bahwa jika kita mengganti bola dengan muatan  $(R/a)q$  yang diletakkan pada  $(R^2/a)\mathbf{k}$ , kita akan mendapatkan potensial yang sama untuk  $r > R$ . Hal ini ditunjukkan pada Gambar 6.12. Sebenarnya, hal ini biasa dilakukan dalam teori elektromagnetik. Ini dikenal sebagai “metode bayangan”.

## 6.6 Latihan

1. Carilah distribusi suhu mantap pada sebuah sektor piringan sirkular dengan jari-jari 10 dan sudut  $\pi/4$  jika suhu sepanjang jari-jari dijaga pada  $0^\circ$  dan  $100^\circ$  sepanjang sisi lengkung.

$$\text{Jawab: } u = \frac{400}{\pi} \sum_{n \text{ ganjil}} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{10}\right)^{4n} \sin 4n\varphi.$$

2. Carilah distribusi suhu mantap pada cincin sirkular dengan jari-jari dalam 1 dan jari-jari luar 2 jika lingkaran dalam dijaga pada suhu  $0^\circ$  dan lingkaran luar setengah kelilingnya dijaga pada suhu  $0^\circ$  dan setengah kelilingnya pada suhu  $100^\circ$ .

$$\text{Jawab: } u = \frac{50 \ln \rho}{\ln 2} + \frac{200}{\pi} \sum_{n \text{ ganjil}} \frac{1}{n} \frac{\rho^n - \rho^{-n}}{(2^n - 2^{-n})} \sin n\varphi.$$

3. Carilah solusi persoalan syarat batas berikut di dalam cincin lingkaran

$$\nabla^2 u(\rho, \varphi) = 0, \quad 1 \leq \rho \leq 2,$$

$$u(1, \varphi) = \sin \varphi, \quad u(2, \varphi) = \sin \varphi.$$

Jawab:  $u = \left(\frac{1}{3}\rho + \frac{2}{3}\frac{1}{\rho}\right) \sin \varphi.$

4. Sebuah partikel bermassa  $m$  terletak pada sebuah kotak siku-siku silinder sirkular berjari-jari  $R$  dan tingginya  $H$ . Partikel tersebut dideskripsikan dengan fungsi gelombang yang memenuhi persamaan Schrödinger

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi(r,\theta,z) = E\psi(r,\theta,z)$$

dan syarat bahwa fungsi gelombang menuju nol pada permukaan kotak. Carilah energi terendah yang diijinkan.

Jawab:  $E_{\min} = \frac{\hbar}{2m} \left[ \left(\frac{2.4048}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \right].$

5. Sebuah membran diregangkan pada rangka sirkular pada  $r = c$ . Perpindahan  $z(r, \theta, t)$  memenuhi persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 z$$

dan syarat batas

$$z(c, \theta, t) = 0.$$

Jika perpindahan awal membran adalah

$$z(r, \theta, 0) = f(r),$$

Tunjukkan bahwa  $z$  tidak memiliki kebergantungan terhadap  $\theta$  dan

$$z(r, \theta, t) = \frac{2}{c^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j r) \cos \lambda_j at}{[J_1(\lambda_j c)]^2} \int_0^c r J_0(\lambda_j r) f(r) dr,$$

dengan  $\lambda_j$  adalah akar dari  $J_0(\lambda c) = 0$ .

6. Dalam soal sebelumnya, jika

$$z(r, \theta, 0) = AJ_0(\lambda_k r),$$

dengan  $\lambda_k$  adalah akar dari  $J_0(\lambda c) = 0$ , tunjukkan bahwa

$$z(r, \theta, t) = AJ_0(\lambda_k r) \cos(\lambda_k at).$$

Buktikan bahwa perpindahan ini periodik dalam waktu, sehingga membran memberikan nada musikal.

7. Perhatikan sebuah silinder sirkular padat dengan jari-jari  $c$  dan panjang  $L$ . Carilah distribusi suhu mantap di dalam silinder jika suhu pada kedua permukaan lengkung dan permukaan atas dijaga pada  $0^\circ$  dan permukaan bawah diberikan

oleh fungsi  $g(\rho)$ .

Jawab:  $u(\rho, z) = \sum_{g=1} A_g J_0(k_{0g}\rho) \sinh k_{0g}(L - z)$ , dengan

$$A_j = \frac{2}{c^2 J_1^2(k_{0j}c) \sinh k_{0j}L} \int_0^c g(\rho') J_0(k_{0j}\rho') \rho' d\rho'.$$

8. Kita mulai dengan persamaan konduksi panas

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

turunkan rumus berikut untuk suhu dalam irisan silinder dengan panjang tak hingga bersudut siku-siku dibatasi oleh permukaan  $r = c$  dan bidang  $\theta = 0$  dan  $\theta = \pi/2$ , ketika permukaan ini dijaga pada suhu nol dan suhu awalnya adalah  $f(r, \theta)$

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{nj} J_{2n}(\lambda_{nj}r) \sin 2n\theta e^{-(\lambda_{nj}a)^2 t},$$

dengan  $\lambda_{nj}$  adalah akar positif dari  $J_{2n}(\lambda c) = 0$  dan  $A_{nj}$  diberikan oleh

$$\pi c^2 [J_{2n+1}(\lambda_{nj}c)]^2 A_{nj} = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^c \sin 2n\theta r J_{2n}(\lambda_{nj}r) f(r, \theta) dr d\theta.$$

9. Misalkan  $u(r, t)$  adalah suhu pada piringan tipis lingkaran  $r = 1$  yang sisinya dijaga pada suhu nol dan suhu awalnya 1. Jika terdapat transfer panas permukaan dari permukaan piringan, persamaan panas memiliki bentuk

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - hu, \quad h > 0.$$

Tunjukkan bahwa

$$u(r, t) = 2e^{-ht} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j J_1(\lambda_j)} e^{-\lambda_j^2 t},$$

dengan  $\lambda_j$  adalah akar positif dari  $J_0(\lambda) = 0$ .

10. *Shrunken fitting*. Sepanjang sebuah silinder padat panjang  $r \leq 1$ , mula-mula suhu seragam  $A$ , disesuaikan dengan sebuah silinder panjang berongga  $1 \leq r \leq 2$  dari material yang sama pada suhu  $B$ . Permukaan luarnya  $r = 2$  kemudian dijaga pada suhu  $B$ . Tunjukkan bahwa suhu pada silinder berjari-jari 2 sedemikian rupa yaitu

$$u(r, t) = B + \frac{A - B}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_j)}{\lambda_j [J_1(2\lambda_j)]^2} J_0(\lambda_j r) \exp(-\lambda_j^2 a^2 t),$$

dengan  $\lambda_j$  adalah akar positif dari  $J_0(2\lambda) = 0$  dan  $a^2$  adalah konstanta dalam persamaan konduksi panas.

*Petunjuk*: Misalkan  $u(r, t) = U(r, t) + B$ , carilah persamaan diferensial, syarat batas dan kondisi awal  $U(r, t)$ . Kemudian selesaikan  $U(r, t)$ .

11. Sebuah daerah dua dimensi memiliki bentuk seperempat lingkaran dengan jari-jari  $b$  mula-mula berada pada suhu seragam  $100^\circ$ . Pada  $t = 0$ , suhu di sekitar batas dikurangi menjadi  $0^\circ$  dan dijaga pada suhu tersebut setelahnya. Carilah suhu untuk sebarang titik pada daerah tersebut untuk waktu sebarang.

Jawab:  $u(r, \theta, t) = \sum_m \sum_n A_{nm} J_{2n}(\lambda_{nm} r) \sin 2n\theta \exp(-\lambda_{nm}^2 a^2 t)$ , dengan  $\lambda_{nm}$  merupakan akar positif dari  $J_{2n}(\lambda_{nm} b)$  dan  $A_{nm}$  diberikan oleh

$$\frac{b^2}{2} J_{2n+1}(\lambda_{nm} b) A_{nm} = \frac{400}{n\pi} \int_0^b r J_{2n}(\lambda_{nm} r) dr.$$

12. Sebuah silinder yang sangat panjang dengan jari-jari  $c$  dibagi menjadi dua bagian mengikuti panjangnya. Permukaan setengah silinder dijaga pada suhu  $+u_0$  dan  $-u_0$ . Carilah suhu mantap di setiap titik dalam silinder.

Jawab:  $u(r, \theta) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{r}{c}\right)^{2n-1} \sin(2n-1)\theta$ .

13. Sebuah daerah dua dimensi yang memiliki bentuk setengah lingkaran berjari-jari  $b$  mula-mula memiliki suhu  $100^\circ$ . Pada  $t = 0$ , suhu di sekitar batas diameter direduksi menjadi  $0^\circ$  dan dijaga setelahnya. Batas lengkung dijaga pada  $100^\circ$ . Carilah suhu pada titik sebarang untuk setiap waktu.

Jawab.

$$u(r, \theta, t) = \frac{400}{\pi} \sum_{n(\text{ganjil})} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{b}\right)^n \sin n\theta + \sum_{n(\text{ganjil})} \sum_m B_{nm} J_n(\lambda_{nm} r) \sin n\theta \exp(-\lambda_{nm}^2 a^2 t),$$

dengan  $B_{nm}$  diberikan oleh

$$B_{nm} = \frac{2}{b^2 J_{nm}^2(\lambda_{n+1} b)} \frac{400}{n\pi} \int_0^b \left[1 - \left(\frac{r}{b}\right)^n\right] J_n(\lambda_{nm} r) r dr,$$

dan  $\lambda_{nm}$  adalah akar dari  $J_n(\lambda b) = 0$ .

*Petunjuk:* Misalkan  $u(r, \theta, t) = V(r, \theta) + U(r, \theta, t)$ , dan pilih syarat batas untuk  $V(r, \theta)$  sebagai  $V(r, 0) = V(r, \pi) = 0$  dan  $V(b, \theta) = 100$ . Carilah syarat batas dan kondisi awal untuk  $U(r, \theta, t)$ . Kemudian selesaikan  $V$  dan  $U$ .

14. Carilah suhu mantap pada setiap titik dalam bola berongga dengan jari-jari dalam  $b_1$  dan jari-jari luar  $b_2$  jika distribusi suhu  $u(b_1, \theta) = f_1(\theta)$  dijaga pada permukaan dalam dan  $u(b_2, \theta) = f_2(\theta)$  dan pada permukaan luar.

Jawab:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1} \left( A_n r^n + B_n \frac{1}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta),$$

dengan  $A_n$  dan  $B_n$  diberikan oleh

$$A_n b_1^n + B_n \frac{1}{b_1^{n+1}} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f_1(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

$$A_n b_2^n + B_n \frac{1}{b_2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f_2(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$



15. Distribusi suhu  $u(r, \theta) = f(\theta)$  dijaga pada permukaan lengkung sebuah setengah lingkaran dengan jari-jari  $b$ . Batas bidang setengah lingkaran tersebut dijaga pada suhu nol. Carilah suhu mantap pada titik sebarang dalam setengah lingkaran tersebut.

$$\text{Jawab: } u(r, \theta) = \sum_{n \text{ ganjil}} \frac{2n+1}{b^n} r^n P_n(\cos \theta) \int_0^{\pi/2} f(\theta') P_n(\cos \theta') \sin \theta' d\theta'.$$

16. Jika  $V$  memenuhi persamaan Laplace  $\nabla^2 V = 0$  pada domain  $r < c$  dan  $r > c$ , dan jika  $V \rightarrow 0$  ketika  $r \rightarrow \infty$  dan  $V = 1$  pada permukaan bola  $r = c$ , tunjukkan bahwa  $V = 1$  ketika  $r \leq c$  dan  $V = c/r$  ketika  $r \geq c$ .

17. Tuliskan persamaan untuk suhu mantap  $u(r, \theta)$  dalam bola padat  $r \leq 1$  jika, untuk semua  $\varphi$ ,  $u(1, \theta) = 1$  ketika  $0 < \theta < \pi/2$  dan  $u(1, \theta) = 0$  ketika  $\pi/2 < \theta < \pi$ .

$$\text{Jawab: } u(r, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0)] r^{2n+1} (\cos \theta).$$

18. Misalkan  $u(r, t)$  adalah suhu mantap dalam bola berongga  $a \leq r \leq b$  ketika  $u(a, \theta) = f(\cos \theta)$  dan  $u(b, \theta) = 0$ ,  $0 < \theta < \pi$ . Turunkan rumus

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta)$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d \cos \theta.$$

19. Carilah potensial listrik  $u$  yang memenuhi persamaan Poisson

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = -\varrho(\mathbf{r}),$$

karena distribusi muatan

$$\varrho(\mathbf{r}) = \begin{cases} Ar \cos \theta & \text{untuk } 0 \leq r < R, \\ 0 & \text{untuk } r > R. \end{cases}$$

$$\text{Jawab: } u(r, \theta) = \begin{cases} \frac{A R^5}{15 r^2} \cos \theta & \text{untuk } r > R, \\ A \left( \frac{1}{6} R^2 r - \frac{1}{10} r^3 \right) \cos \theta & \text{untuk } r < R. \end{cases}$$

20. Jika muatan listrik terdistribusi pada permukaan bola berjari-jari  $R$  dengan rapat muatan permukaan

$$\varrho(\mathbf{r}) = C \cos \theta$$

dengan  $\theta$  adalah sudut antara  $\mathbf{r}$  dengan sumbu  $-z$ , dan  $C$  adalah konstanta. Misalkan  $z$  adalah sebuah titik pada sumbu  $-z$  dan  $z > R$ . Gunakan fungsi Green untuk membuktikan bahwa potensial listrik  $u$  diberikan oleh

$$u(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{2\pi \varrho(\theta') R^2 \sin \theta'}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}} d\theta'.$$

Hitunglah integral ini. Carilah potensial  $u(r, \theta)$  untuk  $r > R$ .

*Petunjuk:* Gunakan fungsi pembangkit polinomial Legendre, dan perhatikan bahwa  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ .

Jawab:  $u(z) = \frac{1}{z^2} \left( \frac{1}{3} R^3 C \right)$  dan  $u(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{3} R^3 C \right) \cos \theta$ .

**IV**

# **Metode Variasi**



# Kalkulus Variasi

Persoalan mendasar dalam kalkulus adalah mencari nilai  $x$  yang memaksimalkan atau meminimalkan sebuah fungsi  $y = f(x)$ . Kalkulus variasi memperluas persoalan ini menjadi mencari sebuah fungsi yang memaksimalkan atau meminimalkan sebuah integral tentu.

Perhatikan integral

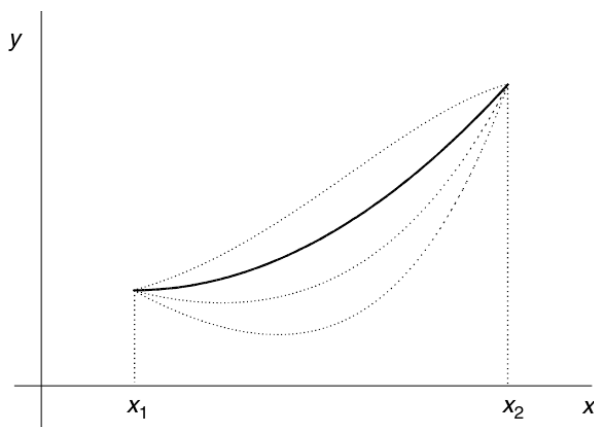
$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx, \quad (7.1)$$

dengan  $F$  tidak hanya bergantung pada  $x$ , tetapi juga bergantung pada  $y$  yang merupakan fungsi dari  $x$ , dan pada  $y'$ , yang merupakan turunan  $y$  terhadap  $x$ . Bentuk  $F$  ditentukan oleh kasus fisis yang ditinjau. Satu-satunya hal yang bisa dirubah untuk membuat  $I$  lebih besar atau lebih kecil adalah bentuk fungsi  $y(x)$ . Dengan pengertian ini, integralnya adalah fungsi dari  $y$ . Terminologi umum adalah  $I$  berupa fungsional dari kurva  $y(x)$ .

Kalkulus variasi memberikan kita sebuah metode untuk mencari sebuah fungsi  $y(x)$  yang membuat integralnya stasioner, dengan kata lain membuat nilai integralnya maksimum atau minimum secara lokal.

Kalkulus variasi merupakan salah satu persoalan paling tua dalam fisika matematik, dipelajari sesaat setelah penemuan kalkulus. Pertama kali kalkulus variasi digunakan untuk menyelesaikan persoalan matematika yang menarik, seperti mencari bentuk tali yang digantungkan. Kemudian ditemukan bahwa banyak prinsip dalam fisika klasik, dari optika ke mekanika, dapat dinyatakan dalam bentuk integral tentu yang memiliki nilai stasioner. Dalam fisika modern, kalkulus variasi juga dapat digunakan dalam mencari nilai eigen dan fungsi eigen dalam sistem kuantum.

Dalam bab ini,  $y'$  digunakan untuk menotasikan  $dy/dx$ , kecuali diberitahukan. Kita juga mengasumsikan bahwa semua fungsi yang kita temui mulus dan terdiferensialkan.



Gambar 7.1: Garis penuh adalah kurva  $y(x)$  sepanjang integralnya stasioner. Garis putus-putus adalah kurva  $y(x) + \alpha\eta(x)$  merepresentasikan variasi kecil dari lintasan penuh. Semuanya melalui dua buah titik ujung.

## 7.1 Persamaan Euler-Lagrange

### 7.1.1 Nilai Stasioner Fungsional

Jika bentuk fungsi yang diberikan  $y = y(x)$  membuat integral pada (7.1) sebuah nilai minimum, fungsi tetangga sebarang harus memberikan sebuah nilai yang sama atau lebih besar dari nilai minimum. Hal ini diilustrasikan pada Gambar 7.1. Garis penuh adalah kurva  $y = y(x)$ , yaitu sepanjang nilai minimum integralnya, garis putus-putus merepresentasikan variasi kecil dari lintasan ini. Kurva ini biasanya dinyatakan dengan

$$Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x), \quad (7.2)$$

dengan  $\alpha$  adalah parameter kecil, dan  $\eta(x)$  sebuah fungsi sebarang dari  $x$  yang terikat, kontinu, dan memiliki turunan pertama yang kontinu. Jika dua buah titik ujung tetap seperti Gambar 7.1, maka  $\eta(x)$  haruslah memenuhi syarat batas  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Dengan menggantikan  $y$  dengan  $Y$  pada (7.1), kita mempunyai

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(Y, Y', x) dx. \quad (7.3)$$

Sekarang kita mempunyai nilai integral pada sebuah kurva yang melalui dua buah titik ujung, tiap kurva diberikan label dengan variabel  $\alpha$ . Kurva yang membuat  $I$  stasioner memiliki label  $\alpha = 0$ .

Syarat perlu, tetapi tidak cukup, agar nilainya minimum adalah hilangnya turunan pertama. Sehingga kita meminta

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \text{untuk semua } \eta(x). \quad (7.4)$$

Karena  $\alpha$  tidak bergantung  $x$ , turunan dapat dilakukan di dalam tanda integral

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \frac{dY'}{d\alpha} \right] dx. \quad (7.5)$$

Jelas dari (7.2)

$$\begin{aligned} Y'(x) &= y'(x) + \alpha \eta'(x), \\ \frac{dY}{d\alpha} &= \eta(x), \quad \frac{dY'}{d\alpha} = \eta'(x). \end{aligned}$$

Dengan memilih  $\alpha = 0$  yang ekuivalen dengan memilih  $Y(x) = y(x)$ ,  $Y'(x) = y'(x)$ . Jadi setelah  $\alpha$  dipilih nol, (7.5) menjadi

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx = 0. \quad (7.6)$$

Suku kedua dapat diintegrasikan parsial

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\eta}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d\eta \\ &= \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta(x) dx. \end{aligned}$$

Suku yang diintegrasikan sama dengan nol karena  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Jadi kita memiliki

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx = 0.$$

Karena  $\eta(x)$  fungsi sebarang, intuisi kita mengatakan

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (7.7)$$

Persamaan ini diturunkan oleh Euler pada 1744. Persamaan ini dikenal sebagai persamaan Euler-Lagrange, karena persamaan ini juga merupakan dasar formulasi Lagrange dalam mekanika klasik.

Jika kita memperluas turunan total terhadap  $x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{dy'}{dx} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \frac{dy'}{dx}, \end{aligned}$$

persamaan Euler-Lagrange menjadi

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0$$

sebuah persamaan diferensial orde dua. Karena bentuk  $F$  diberikan, persamaan ini dapat diselesaikan untuk memperoleh nilai ekstrim fungsi  $y(x)$ .

Syarat (7.4) hanya merupakan syarat perlu untuk sebuah nilai minimum, solusi  $y(x)$  dapat berupa sebuah nilai maksimum atau bahkan sebuah titik belok fungsi  $I(\alpha)$  pada  $\alpha = 0$ . Untuk menentukan nilai ekstrim secara matematik, kita harus melihat tanda turunan yang lebih tinggi dari  $I(\alpha)$ . Hal ini dapat dilakukan, tetapi agak rumit. Untungnya, untuk kebanyakan aplikasi, persamaan Euler-Lagrange dengan sendirinya cukup memberikan sebuah solusi lengkap persoalan yang ditinjau, karena keberadaan dan sifat alami sebuah nilai ekstrim biasanya jelas dari persoalan fisis atau arti geometriknya.

### 7.1.2 Teorema Fundamental Kalkulus Variasi

Persamaan Euler-Lagrange merupakan inti dari kalkulus variasi. Kita bisa memperolehnya dengan matematika ketat melalui teorema berikut yang dikenal sebagai teorema fundamental kalkulus variasi.

**Teorema 7.1.1.** *Jika  $f(x)$  sebuah fungsi kontinu pada selang  $(x_1, x_2)$  dan jika*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \eta(x) dx = 0$$

*untuk setiap fungsi kontinu terdiferensialkan  $\eta(x)$  yang memenuhi syarat batas  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ , maka  $f(x) = 0$  pada selang  $(x_1, x_2)$ .*

*Bukti.* Marilah kita asumsikan pada sebuah titik  $\xi$  pada selang  $(x_1, x_2)$ ,  $f(\xi) = 0$ . Asumsikan  $f(\xi) > 0$ . Karena  $f(x)$  kontinu, haruslah terdapat sebuah daerah di sekitar  $\xi$ , sehingga  $f(x) > 0$ . Daerah ini merupakan sub-selang dalam  $(x_1, x_2)$ . Hal ini berarti kita bisa mencari dua buah bilangan  $a$  dan  $b$  pada  $(x_1, x_2)$  sedemikian rupa sehingga  $a < x < b$ ,  $f(x) > 0$ . Sekarang kita telah membuktikan bahwa fungsi  $\eta(x)$  dinyatakan dengan

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq x \leq a, \\ (x-a)^2(x-b)^2, & a \leq x \leq b, \\ 0, & b \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

adalah kontinu dan terdiferensialkan pada  $(x_1, x_2)$  dan memenuhi syarat batas  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Untuk  $\eta(x)$  khusus ini, kita memiliki

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \eta(x) dx = \int_a^b f(x) (x-a)^2 (x-b)^2 dx > 0$$

yang berkontradiksi dengan fungsi yang diberikan. Hal ini mengeliminasi kemungkinan bahwa  $f(\xi) > 0$  pada  $\xi$  di dalam  $(x_1, x_2)$ . Argumen yang sama menunjukkan bahwa tidak mungkin untuk  $f(\xi) < 0$  pada  $\xi$  di dalam  $(x_1, x_2)$ . Jadi teorema ini terbukti.

Hal ini menunjukkan bahwa agar  $I$  stasioner,  $F$  harus memenuhi persamaan Euler-Lagrange. Karena  $F$  adalah fungsi yang diberikan, persamaan Euler-Lagrange adalah persamaan diferensial untuk  $y(x)$ .



Sebelum kita lanjutkan, marilah kita lihat contoh sederhana berikut untuk mengilustrasikan persamaan Euler-Lagrange.

**Contoh 7.1.1.** Jarak terdekat antara dua buah titik di dalam bidang.

Carilah persamaan  $y = y(x)$  sebuah kurva yang menghubungkan dua buah titik  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  di dalam sebuah bidang sehingga jarak antara keduanya diukur sepanjang kurva minimal.

**Solusi 7.1.1.** Misalkan  $ds$  adalah panjang sebuah busur kecil di dalam bidang, maka

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

atau

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Panjang total kurva sebarang antara dua titik adalah

$$I = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Persamaan ini dalam bentuk (7.1) dengan

$$F = \sqrt{1 + y'^2}$$

Syarat agar kurvanya berupa lintasan terdekat adalah  $I$  minimal. Jadi  $F$  harus memenuhi persamaan Euler-Lagrange. Dengan melakukan substitusi pada (7.7) dengan

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

kita mempunyai

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0,$$

atau

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

dengan  $c$  adalah konstanta integrasi. Kuadratkan persamaannya dan selesaikan  $y'$ , kita peroleh

$$y' = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}.$$

Dengan inspeksi kita bisa menyimpulkan

$$y' = a,$$

dengan  $a$  konstanta lain. Tetapi ini tidak lain adalah persamaan garis lurus

$$y = ax + b$$

dengan  $b$  adalah konstanta integrasi lain. Konstanta  $a$  dan  $b$  ditentukan oleh syarat bahwa kurvanya melalui dua buah titik ujung,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ .

Kita juga bisa mengatakan, garis lurus adalah lintasan ekstim, tetapi untuk persoalan ini, garis lurus juga berupa nilai minimum.

### 7.1.3 Notasi Variasi

Dalam literatur kalkulus variasi, simbol  $\delta$  biasanya ditemukan sebagai operator diferensial yang didefinisikan sebagai berikut.

Ekspansikan (7.3) sebagai deret Taylor dalam  $\alpha$ , kita mempunyai

$$I(\alpha) = I(0) + \left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha + O(\alpha^2).$$

Variasi  $I$  karena adanya variasi  $y(x)$  dinyatakan dalam (7.2) adalah

$$I(\alpha) - I(0) = \left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha + O(\alpha^2)$$

Variasi  $I$  orde pertama dinotasikan dengan  $\delta I$ , yang merupakan suku pertama ruas kanan persamaan ini

$$\delta I = \left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha.$$

Dengan (7.6), kita mempunyai

$$\delta I = \alpha \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx. \quad (7.8)$$

Dengan kurva pada (7.2), variasi  $y(x)$  dan  $y'(x)$  diberikan oleh

$$\begin{aligned} \delta y(x) &= Y(x) - y(x) = \alpha \eta(x), \\ \delta y'(x) &= Y'(x) - y'(x) = \alpha \eta'(x). \end{aligned}$$

Ekspansikan  $F$  dalam deret Taylor

$$F(y + \delta y, y' + \delta y', x) = F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \dots,$$

variasi  $F$  dalam orde pertamanya adalah

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y'.$$

Persamaan ini memungkinkan kita menuliskan  $\delta I$  sebagai

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx \\ &= \alpha \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx,\end{aligned}$$

yang identik dengan (7.8).

Karena  $\alpha$ , sebagai sebuah parameter tidak bisa identik dengan 0, maka syarat

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

dapat dinyatakan sebagai

$$\delta I = 0$$

Meskipun simbol  $\delta$  tidak digunakan secara luas lagi dalam matematika, tetapi simbol ini memungkinkan kita untuk melakukan operasi fungsional secara formal. Jadi simbol ini masih sering muncul dalam aplikasi.

#### 7.1.4 Kasus Khusus

Dalam kasus khusus tertentu, persamaan Euler-Lagrange dapat direduksi menjadi sebuah persamaan diferensial orde satu.

#### Integran Tidak Bergantung Eksplisit pada $y$

Dalam kasus ini

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Persamaan Euler-Lagranganya menjadi

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Sehingga

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c,$$

dengan  $c$  adalah sebuah konstanta. Ini adalah persamaan diferensial orde satu yang tidak bergantung  $y$ . Dengan menyelesaikan  $y'$ , kita memperoleh sebuah persamaan berbentuk

$$y' = f(x, c)$$

sehingga  $y(x)$  dapat dicari.

**Contoh 7.1.2.** Carilah kurva  $y = y(x)$  melalui  $(1, 0)$  dan  $(2, 1)$  yang membuat fungsional berikut stasioner:

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

**Solusi 7.1.2.** Integrannya tidak bergantung  $y$ , jadi

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c,$$

atau

$$\frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{1}{x} \sqrt{1 + y'^2} \right) = \frac{y'}{x \sqrt{1 + y'^2}} = c,$$

jadi

$$y' = cx \sqrt{1 + y'^2}$$

Kuadratkan dan selesaikan  $y'$  kita peroleh

$$y'^2 = c^2 x^2 (1 + y'^2)$$

atau

$$y' = \frac{cx}{\sqrt{1 - c^2 x^2}}$$

sehingga diperoleh

$$y = \int \frac{cx \, dx}{\sqrt{1 - c^2 x^2}} = -\frac{1}{c} \sqrt{1 - c^2 x^2} + c',$$

dengan  $c'$  adalah konstanta integrasi yang lain. Maka

$$(y - c')^2 = \frac{1}{c^2} - x^2.$$

Karena kurvanya melalui  $(1, 0)$  dan  $(2, 1)$ , kita mempunyai

$$c'^2 = \frac{1}{c^2} - 1, \quad (1 - c')^2 = \frac{1}{c^2} - 4.$$

Diperoleh

$$c' = 2, \quad c = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Kurvanya diberikan oleh:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

## Integral Tidak Bergantung Eksplisit pada $x$

Dalam kasus ini

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

dan  $F$  berupa sebuah fungsi dari  $y$  dan  $y'$ . Karena  $yx = xy(x)$ , maka  $F$  tetap bergantung implisit pada  $x$  melalui  $y$  dan  $y'$ , yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right).$$

Jika kita kurangkan satu dengan lainnya diperoleh

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} y' - y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right),$$

atau

$$\frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] y'.$$

Kuantitas pada kurung dalam ruas kanan sama dengan nol persamaan Euler-Lagrange, jadi

$$\frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

Maka

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c, \quad (7.9)$$

dengan  $c$  adalah sebuah konstanta. Ini adalah persamaan diferensial yang dapat diselesaikan untuk  $y(x)$ .

**Contoh 7.1.3.** Carilah  $y(x)$  sehingga integral berikut stasioner

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{1+y} dx.$$

**Solusi 7.1.3.** Integrannya tidak bergantung eksplisit pada  $x$ , jadi

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{1+y} - y' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{1+y} = c$$

atau

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{1+y} - \frac{y'^2}{(1+y)\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{(1+y)\sqrt{1+y'^2}} = c.$$

Maka

$$(1 + y)^2 (1 + y'^2) = \frac{1}{c^2}.$$

Diperoleh

$$y'^2 = \frac{1}{c^2 (1 + y)^2} - 1 = \frac{1 - c^2 (1 + y)^2}{c^2 (1 + y)^2}$$

dan

$$y' = \frac{\sqrt{1 - c^2 (1 + y)^2}}{c (1 + y)}.$$

Sehingga

$$\frac{c (1 + y)}{\sqrt{1 - c^2 (1 + y)^2}} dy = dx.$$

Integralkan kedua ruas, kita peroleh

$$-\frac{1}{c} \sqrt{1 - c^2 (1 + y)^2} = x + c',$$

atau

$$1 - c^2 (1 + y)^2 = c^{2(x+c')^2}.$$

Solusinya berupa sebuah lingkaran

$$(x + c')^2 + (1 + y)^2 = \frac{1}{c^2}$$

dengan  $c$  dan  $c'$  adalah dua buah konstanta.

## 7.2 Variasi dengan Kendala

Kita sering ingin mencari sebuah kurva  $y = y(x)$  yang tidak hanya membuat integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx \quad (7.10)$$

nilainya ekstrimum, tetapi juga membuat integral kedua

$$J = \int_{x_1}^{x_2} G(y, y', x) dx \quad (7.11)$$

sama dengan nilai tertentu. equal to a prescribed value. Kurva diharuskan melalui dua buah titik ujung  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  dan fungsi  $F$  dan  $G$  dapat didiferensialkan dua kali.

Kita mengikuti prosedur yang sama seperti sebelumnya dengan memisalkan  $y(x)$  sebagai fungsi yang membuat fungsi ekstrimum dan memperkenalkan fungsi “tetangga”  $Y(x)$  terhadap yang kita ekstrimumkan. Bagaimanapun kita tidak dapat menyatakan

$Y(x)$  sebagai sebuah fungsi yang hanya bergantung pada satu parameter seperti pada (7.2), karena nilai konstan  $J$  akan menentukan parameter tersebut dan menentukan  $I$ , Hal ini membuat tidak mungkin untuk membuat  $I$  ekstrimum. Untuk alasan ini kita memperkenalkan dua buah parameter

$$Y(x) = y(x) + \alpha_1 \eta_1(x) + \alpha_2 \eta_2(x) \quad (7.12)$$

dengan  $\eta_1(x)$  dan  $\eta_2(x)$  adalah dua buah fungsi sebarang terdiferensialkan yang memenuhi

$$\eta_1(x_1) = \eta_1(x_2) = 0, \quad (7.13)$$

$$\eta_2(x_1) = \eta_2(x_2) = 0. \quad (7.14)$$

Kita gantikan  $y(x)$  dengan  $Y(x)$  dalam (7.10) dan (7.11) sehingga berbentuk

$$I(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(Y, Y', x) dx$$

$$J(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} G(Y, Y', x) dx$$

Jelaslah parameter  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  tidak bebas, karena  $J$  nilainya dijaga konstan.

Dengan mengkombinasikan

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = I(\alpha_1, \alpha_2) + \lambda J(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{x_1}^{x_2} H(Y, Y', x) dx,$$

dengan

$$H = F + \lambda G.$$

Konstanta  $\lambda$  yang belum ditentukan disebut sebagai pengali Lagrange. Sekarang jika  $I$  stasioner, dan  $J$  konstan, maka  $K$  juga harus stasioner. Syarat agar  $K$  stasioner adalah

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \alpha_2} = 0,$$

dengan turunan parsial dihitung pada  $\alpha_1 = 0$  dan  $\alpha_2 = 0$ .

Setelah kita hitung dua buah turunan parsial, maka

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \int_{x_2}^{x_1} \left[ \frac{\partial H}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial H}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \alpha_i} \right] dx, \quad i = 1, 2.$$

Jelas dari (7.12) bahwa

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} = \alpha_i(x), \quad \frac{\partial Y'}{\partial \alpha_i} = \eta'_i(x).$$

Jadi

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial H}{\partial Y} \eta_i + \frac{\partial H}{\partial Y'} \eta'_i \right] dx, \quad i = 1, 2.$$

Setelah kita integralkan parsial suku kedua integran, kita peroleh

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \eta_i(x) \frac{\partial H}{\partial Y'} + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial H}{\partial Y'} \right) \right] \eta_i dx, \quad i = 1, 2.$$

Suku yang diintegrasikan dapat ditinggalkan karena syarat batas (7.13) dan (7.14). Sekarang jika kita pilih  $\alpha_1 = 0$  dan  $\alpha_2 = 0$ , maka  $Y$  dan  $Y'$  digantikan oleh  $y$  dan  $y'$ . Agar dua buah turunan parsial  $K$  hilang, kita harus mempunyai

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial \partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial H}{\partial y'} \right) \right] \eta_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2.$$

Karena  $\eta_1(x)$  dan  $\eta_2(x)$  keduanya sebarang, dua hubungan dalam persamaan ini secara esensial hanya satu. Dengan teorema fundamental kalkulus variasi, kita menyimpulkan bahwa

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial H}{\partial y'} \right) = 0.$$

Persamaan ini sama dengan persamaan Euler-Lagrange kecuali  $F$  digantikan dengan  $H$  yang sama dengan  $F + \lambda G$ . Persamaan ini adalah persamaan diferensial orde dua yang harus dipenuhi  $y(x)$  agar  $J$  nilainya konstan dan membuat  $I$  stasioner.

Solusi dari persamaan ini adalah  $y(x)$  dengan tiga buah konstanta yang belum ditentukan: dua buah konstanta integrasi dan pengali Lagrange  $\lambda$ . Kuantitas ini dapat ditentukan dengan syarat batas pada dua buah ujung dan dengan syarat bahwa  $J$  nilainya tertentu.

**Contoh 7.2.1.** Sebuah kurva panjangnya  $L$  melalui  $x_1$  dan  $x_2$  pada sumbu- $x$ . Carilah bentuk kurva tersebut sehingga luas yang dilingkupi oleh kurva dan sumbu- $x$  paling besar.

**Solusi 7.2.1.** Luas diberikan oleh

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y dx$$

dan panjang kurvanya adalah

$$J = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Kita ingin memaksimalkan  $I$  dengan syarat  $J$  sama dengan konstanta  $L$ . Maka kita menyelesaikan persamaan Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

dengan

$$H = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}.$$



Karena  $H$  tidak bergantung  $x$  maka

$$y' \frac{\partial H}{\partial y'} - H = c_1$$

atau

$$\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - y - \lambda \sqrt{1+y'^2} = c_1.$$

Ini dapat disederhanakan menjadi

$$(c_1 + y) \sqrt{1+y'^2} = -\lambda$$

atau

$$1 + y'^2 = \frac{\lambda^2}{(c_1 + y)^2}$$

sehingga kita mempunyai

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (c_1 + y)^2}}{c_1 + y}.$$

Jadi

$$\frac{(c_1 + y) dy}{\sqrt{\lambda^2 - (c_1 + y)^2}} = dx.$$

Misalkan  $z = \lambda^2 - (c_1 + y)^2$ ,  $dz = -2(c_1 + y) dy$ , maka

$$\int \frac{(c_1 + y) dy}{\sqrt{\lambda^2 - (c_1 + y)^2}} = - \int \frac{1}{2} z^{-1/2} dz = - \int dz^{1/2} = - \int d\sqrt{\lambda^2 - (c_1 + y)^2}.$$

Jadi

$$-\sqrt{\lambda^2 - (c_1 + y)^2} = x + c_2$$

dengan  $c_1$  dan  $c_2$  adalah konstanta integrasi. Kuadratkan kedua ruas, kita peroleh

$$(x + c_2)^2 + (c_1 + y)^2 = \lambda^2.$$

Sehingga kurvanya berupa busur lingkaran yang melalui dua buah titik yang diberikan. Konstanta  $c_1$ ,  $c_2$  dan  $\lambda$  bisa dicari dengan syarat kurva melalui titik ujung yang sesuai dan juga syarat panjang antara dua buah titik ini.

## 7.3 Solusi Persoalan Terkenal

### 7.3.1 Persoalan Brachistochrone

Anggap sebuah benda menggelinding dalam sebuah kawat tanpa gesekan seperti pada Gambar 7.2. Kita telah belajar dalam fisika dasar bahwa pada titik  $(x, y)$ , energi kinetik benda tersebut adalah  $\frac{1}{2}mv^2$  dan energi potensialnya  $-mgy$ , jika kita mengambil

$y = 0$  sebagai titik acuan. Karena hukum kekekalan energi, jumlah keduanya harus sama dengan nol

$$\frac{1}{2}mv^2 - mhy = 0,$$

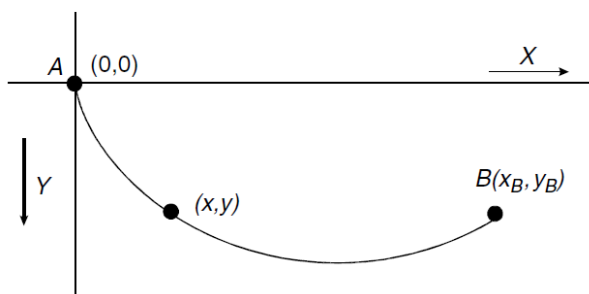
karena mula-mula pada  $(0, 0)$  baik energi kinetik maupun potensialnya sama dengan nol. Sehingga kecepatan pada titik tersebut adalah

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Waktu yang diperlukan dari  $A$  ke  $B$  adalah

$$\begin{aligned} T &= \int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{v} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Pertanyaannya sekarang adalah: bentuk kawat seperti apa agar waktu yang diperlukan dari  $A$  ke  $B$  paling pendek? Persoalan terkenal ini dinamakan persoalan Brachistochrone (dari kata Yunani yang berarti waktu paling pendek).



Gambar 7.2: Persoalan Brachistochrone. Sebuah benda menggelinding dari  $A$  menuju  $B$  tanpa gesekan, persoalannya adalah mencari bentuk kawat sehingga waktu yang diperlukan seminimal mungkin.

Pada 1696, Johann Bernoulli mengusulkan persoalan ini dan mengalamatkan kepada “kepada matematikawan paling cerdas di dunia” dan mengijinkan 6 bulan kepada semua orang untuk memberikan solusinya. Hal ini menandai ketertarikan umum dalam kalkulus variasi. Lima buah solusi yang benar diberikan oleh Newton, Leibniz, L’Hospital, dirinya, dan saudaranya Jakob Bernoulli. Mereka bekerja dengan metode berbeda dan sampai pada hasil yang sama. Bentuk yang diinginkan adalah sikloid, kurva yang dilewati sebuah titik pada pinggiran ban ketika menggelinding pada permukaan mendatar.

Kita dapat menjawab pertanyaan ini dengan meminimalkan integral (7.15). Karena integrannya tidak bergantung eksplisit pada  $x$ , persamaan Euler-Lagrangennya

dapat dituliskan dalam bentuk (7.9)

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c$$

dengan

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}.$$

Jadi

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}} = c$$

atau

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}} = c.$$

Kuadratkan kedua ruas

$$y(1 + y'^2) = \frac{1}{c^2}.$$

Diperoleh

$$y' = \sqrt{\frac{1 - c^2y}{c^2y}}$$

Dengan  $y' = \frac{dy}{dx}$ , persamaan ini dapat dituliskan sebagai

$$\sqrt{\frac{1 - c^2y}{c^2y}} dy = dx.$$

Untuk mencari  $y(x)$ , kita harus mengintegrasikan kedua ruas persamaan. Kita dapat melakukan integrasi dengan perubahan variabel. Misalkan

$$c^2y = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \tag{7.16}$$

jadi

$$1 - c^2y = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$

dan

$$dy = \frac{1}{2c^2} \sin \theta d\theta.$$

Karena

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos 2\frac{\theta}{2} = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta &= \sin 2\frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned}1 - \cos \theta &= 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\1 + \cos \theta &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\dy &= \frac{1}{c^2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta.\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{c^2 y}{1 - c^2 y}} dy &= \frac{1}{c^2} \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta \\&= \frac{1}{2c^2} (1 - \cos \theta) d\theta.\end{aligned}$$

Maka

$$\int \sqrt{\frac{c^2 y}{1 - c^2 y}} dy = \int dx$$

menjadi

$$\frac{1}{2c^2} \iint (1 - \cos \theta) d\theta = \int dx$$

atau

$$\frac{1}{2c^2} (\theta - \sin \theta) = x + c'.$$

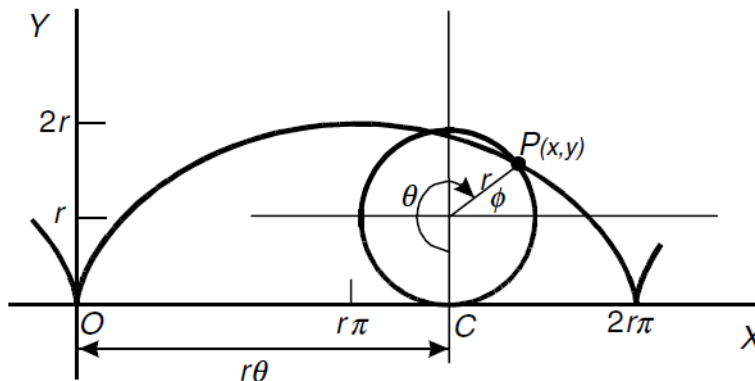
Kurvanya melalui  $(0, 0)$ , yaitu ketika  $x = 0$ ,  $y$  juga harus bernilai nol. Tetapi, dengan (7.16),  $y = (1 - \cos \theta)/2c^2$ , sehingga ketika  $y = 0$ ,  $\theta$  harus sama dengan nol. Jadi  $x = \theta = 0$  haruslah memenuhi persamaan di atas. Sehingga  $c' = 0$ . Konstanta sisanya ditentukan oleh syarat bahwa kurva haruslah melalui titik ujung lainnya.

Sebagai hasilnya, kurva diberikan oleh persamaan parametrik:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2c^2} (\theta - \sin \theta), \\y &= \frac{1}{2c^2} (1 - \cos \theta).\end{aligned}$$

Persamaan ini adalah persamaan sebuah sikloid yang dapat dilihat sebagai berikut. Misalkan sebuah lingkaran berjari-jari  $r$  menggelinding sepanjang sumbu- $x$  seperti Gambar 7.3. Titik asal dipilih sedemikian rupa sehingga titik  $P$  bersinggungan dengan sumbu- $x$  pada titik asal. Ketika lingkaran sudah bergerak sebesar sudut  $\theta$  radian, maka titik  $P$  tersebut telah bergerak sejauh  $OC = r\theta$  dari titik asal seperti Gambar 7.3. Sehingga pusat lingkaran berada pada titik  $(r\theta, r)$ . Jelas dari gambar bahwa koordinat  $x$  dari  $P$  adalah

$$\begin{aligned}x &= r\theta + r \cos \theta = r\theta + r \cos \left( \frac{3\pi}{2} - \theta \right) \\&= r\theta - r \sin \theta = r (\theta - \sin \theta)\end{aligned}$$



Gambar 7.3: Sikloid. Kurva yang dilalui oleh titik  $P$  pada sebuah lingkaran ketika lingkaran menggelinding pada sumbu- $x$ .

dan koordinat  $y$ -nya

$$\begin{aligned} y &= r + r \sin \phi = r + r \sin \left( \frac{3\pi}{2} - \theta \right) \\ &= r - r \cos \theta = r (1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

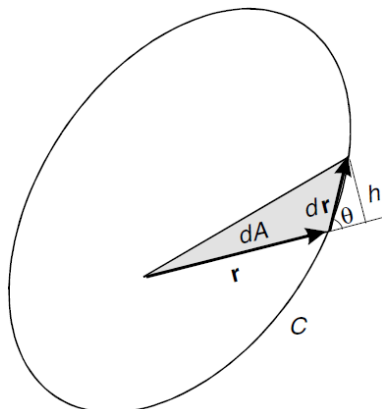
Jadi solusi persoalan Brachistochrone adalah sebuah sikloid, karena persamaan parametrik untuk kurva yang diharapkan identik dengan dua buah persamaan terakhir dengan  $r = 1/2c^2$ . Perhatikan bahwa, karena kita mengambil arah  $y$  ke bawah adalah positif, lingkaran yang membangkitkan sikloid menggelinding sepanjang sumbu- $x$  bagian bawah.

Lintasan minimum yang tepat diberikan oleh Gambar 7.2. Hal ini mengejutkan bahwa berjalan ke dasar kurva kemudian kembali ke  $B$  lebih cepat dibandingkan dengan menuruni garis lurus dari  $A$  ke  $B$ .

### 7.3.2 Persoalan Isoperimetrik

Kata isoperimetrik berarti perimeter yang sama. Persoalan isoperimetrik paling terkenal adalah mencari kurva bidang dari panjang yang diberikan yang melingkupi luas terbesar yang mungkin. Misalkan  $C$  adalah bidang tertutup pada Gambar 7.4. Luas di dalam  $C$  dapat dicari sebagai berikut. Luas infinitesimal yang diarsir diberikan oleh setengah perkalian alas dengan tingginya

$$dA = \frac{1}{2}rh = \frac{1}{2}rdr \sin \theta = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|.$$



Gambar 7.4: Luas di dalam kurva tertutup. Luas infinitesimal terarsir diberikan oleh  $|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|/2 = (x dy - y dx)/2$ .

Misalkan  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ , jadi  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$  dan

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = (x dy - y dx)\mathbf{k}.$$

Jadi

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

Sehingga luas yang dilingkupi oleh  $C$  adalah

$$A = \oint_C dA = \oint_C \frac{1}{2} (x dy - y dx) = \oint_C \frac{1}{2} (xy' - y) dx.$$

Panjang kurvanya

$$L = \oint_C ds = \oint_C (dx^2 + dy^2)^{1/2} = \oint_C (1 + y'^2)^{1/2} dx$$

Sekarang kita ingin memaksimalkan  $A$  dan menjaga  $L$  konstan. Menurut teori variasi terbatas, kita harus menyelesaikan persamaan Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

dengan

$$H = \frac{1}{2} (xy' - y) + \lambda (1 + y'^2)^{1/2}.$$

Karena

$$\frac{\partial H}{\partial y'} = \frac{1}{2} x + \frac{\lambda y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{1}{2},$$

kita mempunyai

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}x + \frac{\lambda y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} \right] + \frac{1}{2} = 0$$

atau

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{\lambda y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} \right] = -1.$$

Integralkan sekali

$$\frac{\lambda y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = -x + c_1.$$

Kuadratkan

$$(xy')^2 = (x - c_1)^2 (1 + y'^2)$$

maka

$$y' = \frac{\pm (x - c_1)}{\left[ \lambda^2 - (x - c_1)^2 \right]^{1/2}}.$$

Karena

$$\frac{d}{dx} \left[ \lambda^2 - (x - c_1)^2 \right]^{1/2} = -\frac{(x - c_1)}{\left[ \lambda^2 - (x - c_1)^2 \right]^{1/2}}$$

kita mempunyai

$$y' = \frac{dy}{dx} \mp \frac{d}{dx} \left[ \lambda^2 - (x - c_1)^2 \right]^{1/2}.$$

Integralkan lagi

$$y = \mp \left[ \lambda^2 - (x - c_1)^2 \right]^{1/2} + c_2$$

atau

$$(y - c_2)^2 = \lambda^2 - (x - c_1)^2.$$

Jelaslah ini adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari  $\lambda$  berpusat pada  $(c_1, c_2)$

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2.$$

Luas yang dilingkupinya

$$A = \pi \lambda^2 = \pi \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$$

pastilah berupa nilai maksimum, karena luas minimalnya adalah nol yaitu ketika kurvanya berupa sebuah garis.

### 7.3.3 Catenary

Catena, dalam bahasa latin, berarti sebuah rantai. Catenary adalah sebuah persoalan menggantungkan rantai. Sejarahnya sejajar dengan Brachistochrone. Pada 1690, Jakob Bernoulli mengusulkan persoalan ini: “untuk mencari sebuah kurva yang dibentuk

oleh sebuah tali kendur yang digantungkan bebas pada kedua ujungnya.” Satu tahun kemudian, terdapat tiga buah solusi benar yang diberikan oleh Christian Huygens, Leibnitz, dan Johann Bernoulli.

Tali ini akan membuat sebuah bentuk sehingga energi potensialnya minimum. Jika  $\rho$  adalah massa tiap satuan panjang tali, maka energi potensial tiap panjang infinitesimal  $ds$  karena gravitasi adalah  $\rho ds g y$ , dengan  $g$  adalah percepatan gravitasi. Misalkan dua buah ujung tetapnya adalah  $A$  dan  $B$ , maka energi potensial keseluruhan tali diberikan oleh fungsional

$$I = \int_A^B \rho g y \, ds = \rho g \int_A^B y \, ds.$$

Dengan menggunakan  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$  dan mengabaikan konstanta  $\rho g$ , kita harus meminimalkan fungsional

$$I = \int_A^B y \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_A^B F(y, y') dx. \quad (7.17)$$

Karena  $F$  tidak bergantung  $x$ , maka persamaan Euler-Lagranganya

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c \quad (7.18)$$

atau

$$y \sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c.$$

Sehingga

$$y(1 + y'^2) - yy'^2 = c \sqrt{1 + y'^2}$$

atau

$$y = c \sqrt{1 + y'^2}$$

Diperoleh

$$y' = \sqrt{y^2/c^2 - 1}$$

maka

$$\frac{dy}{\sqrt{(y/c)^2 - 1}} = dx. \quad (7.19)$$

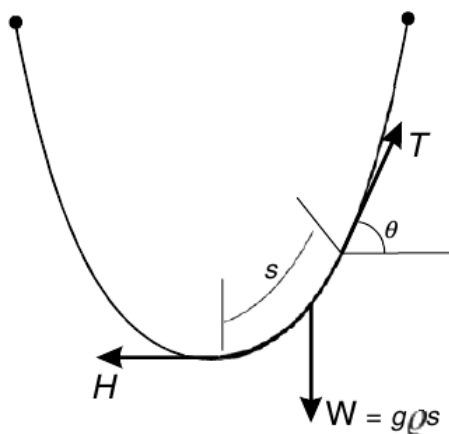
Ingat kembali

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), & \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, & \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x \end{aligned}$$

Dengan substitusi

$$\frac{y}{c} = \cosh z$$





Gambar 7.5: Catenary. Bentuk rantai tergantung adalah  $y = c \cosh(x/c)$  dikenal sebagai catenary.

dan

$$dy = c \sinh z \, dz, \quad \sqrt{(y/c)^2 - 1} = \sqrt{\cosh^2 z - 1} = \sinh z,$$

kita dapat menuliskan (7.19) sebagai

$$c \, dz = dx.$$

Integralkan sekali lagi, kita mempunyai

$$\begin{aligned} cz &= x + b, \\ z &= \frac{x + b}{c}. \end{aligned}$$

Maka

$$y = c \cosh \frac{x + b}{c}. \quad (7.20)$$

Konstanta  $c$  dan  $b$  dapat ditentukan jika koordinat titik yang ditentukan diketahui. Sebagai contoh, jika koordinat  $A$  dan  $B$  berturut-turut adalah  $(-x_0, y_0)$  dan  $(x_0, y_0)$ , maka

$$y_0 = c \cosh \frac{-x_0 - b}{c} = c \cosh \frac{x_0 + b}{c}.$$

Karena  $\cosh(-x) = \cosh(x)$ , diperoleh  $b = 0$ . Dalam kasus ini

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad (7.21)$$

Ini adalah persamaan catenary. Bentuk catenary diberikan Gambar 7.5.

Perhatikan bahwa panjang tali  $L$  diberikan oleh

$$L = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{1 + y'^2} dx$$

dan  $L$  harus dijaga konstan. Menurut teori variasi dengan kendala, kita harus meminimalkan fungsional

$$K = \int_A^B \rho g y \sqrt{1 + y'^2} dx + \lambda \int_A^B \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Dalam kasus ini,  $F$  dalam (7.18) diberikan oleh

$$F = \rho g y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2}.$$

Dengan menggunakan prosedur yang sama seperti sebelumnya, diperoleh

$$y = \frac{c_1}{\rho g} \cosh \frac{\rho g (x + c_2)}{c_1} - \frac{\lambda}{\rho g}.$$

Konstanta  $c_1$ ,  $c_2$ , dan  $\lambda$  ditentukan dengan panjang tali  $L$ , koordinat  $A$  dan  $B$ . Seperti yang kita lihat karakter catenary tidak berubah.

Persoalan ini dapat juga diselesaikan dengan “kalkulus biasa.” Misalkan  $x = 0$  adalah titik terendah tali, dan  $H$  adalah tegangan pada titik tersebut. Jelaslah,  $H$  arahnya horizontal. Misalkan  $T$  adalah tegangan pada ujung lain yang panjangnya  $s$ , seperti pada Gambar 7.5. Berat tali pada bagian tersebut adalah  $w = \rho g s$ . Karena dalam kesetimbangan, gaya haruslah sama dalam arah  $x$  dan  $y$ ,

$$T \sin \theta = \rho g s$$

$$T \cos \theta = H$$

Rasio dua buah persamaan ini

$$\tan \theta = \frac{\rho g}{H} s,$$

yang merupakan kemiringan kurva. Yaitu

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{\rho g}{H} s$$

Diperoleh

$$\frac{d}{dx} y' = \frac{\rho g}{H} \frac{ds}{dx}$$

Karena  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Jadi

$$\frac{d}{dx} y' = \frac{\rho g}{H} \sqrt{1 + y'^2}$$

atau

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\rho g}{H} dx.$$

Misalkan

$$y' = \sinh z,$$

persamaan terakhir menjadi

$$\frac{d \sinh z}{\sqrt{1 + \sinh^2 z}} = \frac{\cosh z dz}{\cosh z} = dz = \frac{\rho g}{H} dx.$$

Integralkan sekali

$$z = \frac{\rho g}{H} x + c'$$

atau

$$y' = \sinh \left( \frac{\rho g}{H} x + c' \right)$$

Pada  $x = 0$ ,  $y = 0$ , jadi  $c = 0$ , karena  $\sinh(0) = 0$ . Maka

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \left( \frac{\rho g}{H} x \right)$$

atau

$$dy = \sinh \left( \frac{\rho g}{H} x \right) dx.$$

Integralkan sekali lagi diperoleh

$$y = \frac{H}{\rho g} \cosh \left( \frac{\rho g}{H} x \right) + b.$$

Jika kita memilih skala sumbu- $y$  sedemikian rupa sehingga  $y(0) = H/\rho g$ , maka  $b = 0$  karena  $\cosh(0) = 1$ . Jadi

$$y(x) = \frac{H}{\rho g} \cosh \left( \frac{\rho g}{H} x \right),$$

yang bentuknya sama dengan (7.21). Sebagai tambahan, kita telah memberikan arti fisik konstanta  $c$  dari (7.21).

Jika kita perhatikan, terdapat hal menarik di sini bahwa bentuk kabel dari suspensi jembatan bukan cenary, meskipun mirip. Anggap kabel tersebut mendukung jalan raya (pada jembatan), dan berat kabel bisa diabaikan dibandingkan dengan berat jembatan. Bagian kabel bisa dilihat pada Gambar 7.6. Kita mengambil  $x = 0$ ,  $y = 0$  pada pusat rentangan. Bagian ini menyokong bagian jalan raya yang beratnya  $W$  sebanding dengan jaraknya  $x$ , karena kita menganggap jalan tersebut seragam, dalam artian

$$W = \lambda x,$$

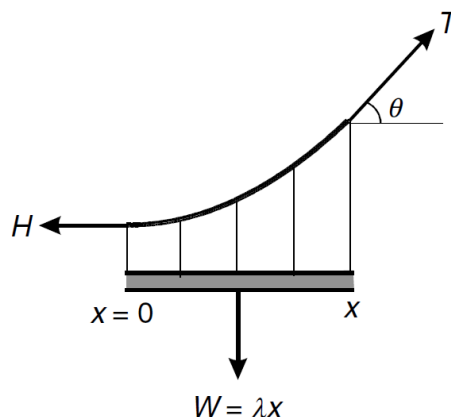
dengan  $\lambda$  adalah berat per satuan panjang. Jelas dari Gambar 7.6 bahwa

$$T \sin \theta = \lambda x,$$

$$T \cos \theta = H.$$

Jadi

$$\tan \theta = \frac{\lambda}{H} x$$



Gambar 7.6: Kabel pada suspensi jembatan. Bentuknya parabola, mirip catenary.

atau

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{\lambda}{H}x.$$

Integralkan, diperoleh

$$y = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{H} x^2 + c.$$

Ini adalah sebuah parabola. Catenary mirip dengan parabola, tetapi kita melihat terdapat perbedaan mendasar. Parabola bentuknya aljabar, sedangkan catenary transenden.

Untuk waktu yang cukup lama, bentuk rantai yang digantungkan dianggap sebagai sebuah parabola. Pada 1646, Huygens (yang saat itu berumur 17) membuktikan bahwa bentuknya mungkin bukanlah parabola. Tetapi baru pada 1691, setelah kalkulus ditemukan, catenary baru dideskripsikan dengan benar sebagai fungsi cosinus hiperbolik.

### 7.3.4 Putaran Permukaan Minimal

Catenary juga merupakan solusi persoalan putaran persoalan minimal yang melalui dua buah titik  $A$  dan  $B$ .

Luas permukaan putaran yang dibangkitkan dengan memutar kurva  $y = y(x)$  melalui sumbu- $x$  adalah

$$I = 2\pi \int_A^B y \, ds = 2\pi \int_A^B y \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Kita mencari sebuah integral untuk diminimalkan sama dengan (7.17). Maka kurvanya berupa sebuah catenary yang diberikan oleh (7.20)

$$y(x) = c \cosh \frac{x+b}{c}.$$

Permukaan yang dibangkitkan oleh rotasi sebuah catenary dinamakan catenoid. Nilai konstanta sebarang  $c$  dan  $b$  ditentukan oleh syarat

$$y(x_A) = y_A, \quad y(x_B) = y_B$$

Sayangnya ini hanyalah solusi tak lengkap, karena dua buah titik  $A$  dan  $B$  harus memenuhi syarat agar bentuk kurva (7.17) melaluinya. Dengan kata lain, jika syarat ini tidak dipenuhi, maka tidak terdapat permukaan yang luasnya minimal.

Kita akan mencari syarat ini untuk persoalan berikut. Misalkan koordinat  $A$  adalah  $(-x_0, y_0)$  dan  $B$  adalah  $(x_0, y_0)$ . Seperti pada (7.21), dalam kasus ini catenarynya dapat dituliskan sebagai

$$y = c \cosh \frac{x}{c}.$$

Konstanta  $c$  ditentukan oleh rasio  $y_0/x_0$ . Sekarang jika kita definisikan

$$u = \frac{x}{c}, \quad v = \frac{y}{c},$$

dan

$$u_0 = \frac{x_0}{c}, \quad v_0 = \frac{y_0}{c},$$

kita dapat menuliskan (7.21) sebagai

$$v = \cosh u. \tag{7.22}$$

Di sisi lain, kita bisa mengambil kurva

$$\frac{v}{u} = \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0}$$

atau

$$v = \frac{y_0}{x_0} u \tag{7.23}$$

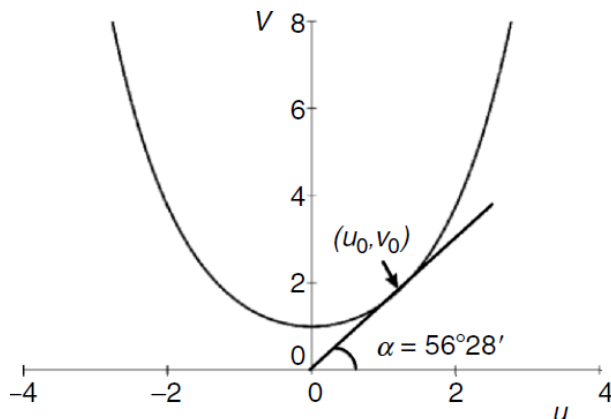
yang merupakan garis lurus. Karena  $(u_0, v_0)$  memenuhi (7.22) dan (7.23), maka ini haruslah merupakan titik potong dua buah kurva yang dinyatakan persamaan ini. Gambar 7.7 menunjukkan kurva  $v = \cosh u$  dan sebuah garis lurus  $v = (\tan \alpha)u$  yang menyinggung kurva ini. Jelaslah bahwa jika  $(y_0/x_0) < \tan \alpha$ , maka dua kurva tersebut tidak akan berpotongan, dan tidak ada catenary yang dapat digambar dari  $A$  ke  $B$ .

Sudut  $\alpha$  juga dapat dicari dengan memperhatikan bahwa titik  $u_0$  ketika garis lurus menyinggung kurva, kita mempunyai hubungan sebagai berikut:

$$\frac{v}{u} = \frac{dv}{du}.$$

Karena  $v = \cosh u$  dan  $dv/du = \sinh u$  maka

$$\frac{\cosh u}{u} - \sinh u = 0.$$



Gambar 7.7: Agar putaran permukaan minimum kurva  $v = \cosh u$  dan  $v = \frac{y_0}{x_0}u$  harus berpotongan.

Persamaan ini dapat diselesaikan secara numerik, diperoleh:

$$u = 1.1997.$$

Ini berarti bahwa  $(u_0, v_0) = (1.1997, \cosh 1.1997)$ . Diperoleh:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\cosh 1.1997}{1.1997} \right) = 0.9885 \text{ radians } (56^\circ 28').$$

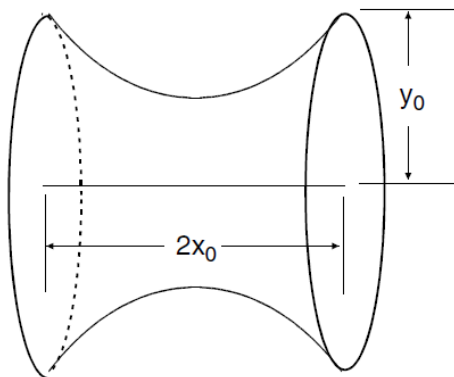
Sehingga jika

$$\frac{y_0}{x_0} < \tan \alpha = 1.5089$$

garis lurus  $v = \frac{y_0}{x_0}u$  dan kurva  $v = \cosh u$  tidak akan bertemu, dan tidak ada kurva yang diturunkan dua kali untuk meminimalkannya.

Batasan ini dapat diilustrasikan dengan percobaan gelembung sabun. Karena adanya tegangan permukaan, gelembung sabun akan membentuk permukaan dengan energi minimum, yaitu sebuah permukaan dengan luas minimum dengan rangkanya sebagai batas.

Sebuah gelembung sabun akan membentuk catenoid di antara dua buah cincin sejajar dengan jari-jari  $y_0$  pusatnya terpisah sejauh  $2x_0$  pada sumbu yang tegak lurus cincin, seperti Gambar 7.8, jika  $y_0/x_0$  lebih besar dari 1.5089. Kita dapat mempebesar  $x_0$ . Ketika  $y_0/x_0$  lebih kecil dari 1.5089, catenoid tidak akan terbentuk, dan gelembung sabun hanya akan menutupi dua buah cincin yang memberikan luas permukaan  $2\pi y_0^2$ . Jelaslah solusinya diskontinu dan bukan merupakan lingkup teori variasi.



Gambar 7.8: Catenoid. Permukaan minimum sebuah putaran dapat terbentuk jika  $y_0$  lebih besar dari  $1.5089x_0$ .

**Contoh 7.3.1.** Carilah luas permukaan minimum sebuah putaran yang ditunjukkan Gambar 7.8 dengan  $x_0 = 1$  dan  $y_0 = 2$ .

**Solusi 7.3.1.** Luas catenoid diberikan oleh

$$A = 2\pi \int_{-1}^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

dengan

$$y = c \cosh \frac{x}{c}.$$

Karena

$$y \sqrt{1 + y'^2} = c \cosh \frac{x}{c} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{c}} = c \cosh^2 \frac{x}{c},$$

luasnya dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} A &= 2\pi c \int_{-1}^1 \cosh^2 \frac{x}{c} dx = \pi c \int_{-1}^1 \left(1 + \cosh \frac{2x}{c}\right) dx \\ &= \pi c^2 \left(\frac{2}{c} + \sinh \frac{2}{c}\right). \end{aligned}$$

Karena

$$\frac{y_0}{x_0} = 2 > 1.5089,$$

terdapat dua buah titik perpotongan dari

$$v = \cosh u \quad \text{dan} \quad v = 2u.$$

Persamaan

$$\cosh u - 2u = 0$$

dapat diselesaikan numerik

$$u_0 = \begin{cases} 0.5894, \\ 2.1268. \end{cases}$$

Ingat kembali  $u_0 = x_0/c$ , jadi

$$c = \frac{x_0}{u_0} = \begin{cases} \frac{1}{0.5894} = 1.6967, \\ \frac{1}{2.1268} = 0.4702. \end{cases}$$

Jadi

$$A = \begin{cases} \pi(1.6967)^2 \left( \frac{2}{1.6967} + \sinh \frac{2}{1.6967} \right) = 23.968, \\ \pi(0.4702)^2 \left( \frac{2}{0.4702} + \sinh \frac{2}{0.4702} \right) = 27.382. \end{cases}$$

Sehingga, memutar

$$y = 1.6967 \cosh \frac{x}{1.6967}$$

terhadap sumbu  $-x$  akan memberikan luas permukaan minimum sebesar 23.968.

### 7.3.5 Prinsip Fermat

Pierre de Fermat pada tahun 1650an mengadopsi cara pandang Aristotelians bahwa alam selalu memilih lintasan paling pendek, dan merumuskan sebuah “prinsip waktu minimal” pada optika geometrik. Prinsip ini mengatakan bahwa sebuah sinar yang bergerak dari satu titik ke titik lainnya melalui sebuah lintasan yang waktunya paling pendek.

Jika kecepatan sinar cahaya dalam sebuah medium adalah  $v$  maka waktu yang dibutuhkan untuk bergerak dari  $A$  ke  $B$  adalah

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{1}{v} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_A^B \frac{1}{v} (1 + y'^2)^{1/2} dx$$

dengan  $y(x)$  adalah lintasan sinar. Dalam optik, sebuah kuantitas yang berguna adalah indeks bias  $n$ , yaitu

$$n = \frac{c}{v},$$

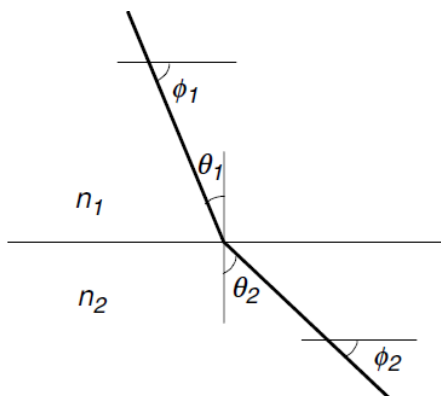
dengan  $c$  adalah kecepatan cahaya dalam vakum, yang merupakan konstanta. Agar waktunya paling pendek, maka integral berikut haruslah stasioner

$$I = \int_A^B n (1 + y'^2)^{1/2} dx.$$

Marilah kita asumsikan  $n$  tidak bergantung  $x$ . Dalam kasus ini, integran

$$F = n (1 + y'^2)^{1/2}$$





Gambar 7.9: Hukum Snell:  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . Jika  $n_1 > n_2$  maka  $\theta_1 < \theta_2$ .

tidak secara eksplisit mengandung variabel bebas  $x$ . Jadi

$$F - y' \frac{\partial}{\partial y'} F = k,$$

dengan  $k$  sebuah konstanta. Setelah kita turunkan, kita memiliki

$$n (1 + y'^2)^{1/2} - y' n \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = k$$

atau

$$n (1 + y'^2) - ny'^2 = k (1 + y'^2)^{1/2}.$$

Jadi

$$n = k (1 + y'^2)^{1/2}.$$

Karena  $y'$  adalah kemiringan dari  $y(x)$ , jadi  $y' = \tan \phi$  dengan  $\phi$  adalah sudut antara arah sesaat sinar dengan sumbu- $x$ . Jadi persamaan terakhir dapat dituliskan sebagai

$$n = k (1 + \tan^2 \phi)^{1/2} = k \left( 1 + \frac{\sin^2 \phi}{\cos^2 \phi} \right)^{1/2} = k \frac{1}{\cos \phi}$$

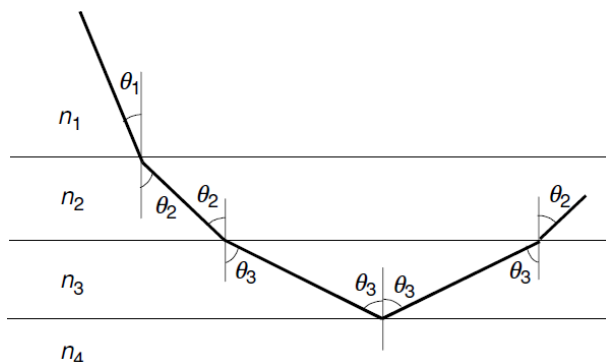
Jadi secara umum

$$n \cos \phi = k.$$

Jika  $n$  tidak berubah, maka  $\phi$  haruslah berupa konstanta karena  $k$  juga konstan. Hal ini berarti sinar bergerak dalam garis lurus.

Anggap sinar bergerak dari satu medium dengan indeks bias  $n_1$  ke medium lain dengan indeks bias  $n_2$ . Bidang antar mukanya ditunjukkan Gambar 7.9. Karena  $k$  konstan sepanjang lintasan, maka

$$n_1 \cos \phi_1 = n_2 \cos \phi_2.$$



Gambar 7.10: Cahaya bergerak dalam medium yang indeks biasnya semakin besar.

Ini adalah hukum Snell yang biasanya dituliskan sebagai

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

dengan  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  adalah sudut sinar dan arah normal permukaan batas seperti Gambar 7.9. Karena  $\theta_1 + \phi_1 = \theta_2 + \phi_2 = \pi/2$ , dua buah persamaan terakhir identik.

Jika sinar datang dari medium 1 ke medium 2,  $\theta_1$  dinamakan sebagai sudut datang  $\theta_i$  dan  $\theta_2$  sebagai sudut pantul  $\theta_r$ . Jika  $\theta_t = \pi/2$ , sudut datang dikenal sebagai sudut kritis  $\theta_c$

$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}.$$

Jika sudut datang lebih besar daripada sudut kritis, sinar dipantulkan sempurna. Sudut antara sinar pantul dengan garis normal disebut sudut pantul  $\theta_r$ . Dalam kasus ini  $n_1 \theta_i = n_1 \theta_r$ . Jadi

$$\theta_i = \theta_r$$

yang merupakan fakta optika geometrik yang sudah kita kenal. Perlu ditekankan di sini bahwa semua prinsip dalam optika geometrik dapat diturunkan dari prinsip Fermat.

Anggap cahaya bergerak melalui medium yang berbeda seperti Gambar 7.10. Jika  $n_1 > n_2 > n_3 > n_4$ , maka  $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ . Jika  $\theta_3$  lebih besar dari sudut kritis, maka sinar akan dipantulkan kembali seperti yang ditunjukkan pada gambar. Jelaslah bahwa jika indeks biasnya semakin kecil (atau kecepatan cahayanya bertambah). Lintasan sinar akan berupa sebuah kurva kontinu. Jika  $v$  sebanding dengan  $\sqrt{y}$  (arah positif  $y$  ke bawah), lintasan sinar akan menjadi kurva Brachistochrone seperti Gambar 7.2. Johann Bernoulli adalah orang pertama yang menyelesaikan persoalan Brachistochrone dengan analogi optik ini.

Ini juga merupakan alasan fatamorgana yang sering kita lihat saat mengemudi di jalan yang panas. Kita melihat “air” di jalan, tetapi ketika kita sampai di sana,

kering. Penjelasannya adalah ini. Udara sangat panas tepat di atas jalan dan lebih dingin ketika semakin tinggi. Cahaya bergerak lebih cepat di daerah panas karena udara lebih renggang dan karena itu lebih tipis. Jadi cahaya dari langit, menuju jalan, akan lebih cepat dan lebih cepat. Sebagai akibatnya, maka jalurnya melengkung, seperti kurva Brachistochrone ditunjukkan pada Gambar 7.2. Ketika cahaya sampai di mata kita, kita berpikir cahaya terpantul dari air di jalan.

## 7.4 Beberapa Perluasan

Kita sering menemui fungsional mengandung turunan yang lebih tinggi, atau beberapa variabel bebas maupun tak bebas. Persamaan Euler-Lagrange untuk persoalan ini dapat diturunkan dengan cara yang serupa.

### 7.4.1 Fungsional dengan Turunan Lebih Tinggi

Perhatikan fungsional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', y'', x) dx, \quad (7.24)$$

dengan nilai  $y$  dan  $y'$  ditentukan pada dua titik ujung

$$\begin{aligned} y(x_1) &= A_0, & y'(x_1) &= A_1, \\ y(x_2) &= B_0, & y'(x_2) &= B_1. \end{aligned}$$

Kita ingin mencari sebuah fungsi  $f(x)$ , dari semua fungsi yang memenuhi syarat batas, sehingga fungsional  $I$  nilainya ekstrimum.

Untuk menyelesaikan persoalan ini, kita mengikuti prosedur sebelumnya. Kita definisikan kurva-kurva yang memenuhi syarat batas

$$Y(x) = y(x) + \alpha\eta(x), \quad Y'(x) = y'(x) + \alpha\eta'(x), \quad Y'' = y'' + \alpha\eta'',$$

dengan  $\eta(x)$  fungsi sebarang yang dapat diturunkan dua kali yang memenuhi syarat batas

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \quad \eta'(x_1) = \eta'(x_2) = 0.$$

Ganti  $y$  dengan  $Y$  pada (7.24), kita mempunyai

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} F(Y, Y', Y'', x) dx.$$

Syarat perlu agar nilainya ekstrimum adalah

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Dengan mengambil turunan di dalam integral, diperoleh

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' + \frac{\partial F}{\partial y''} \eta'' \right] dx.$$

Kita telah membuktikan bahwa

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta dx.$$

Dengan integral parsial

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} \eta'' dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} \frac{d\eta'}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} d\eta' \\ &= \frac{\partial F}{\partial y''} \Big|_{x_1}^{x_2} \eta' - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \eta' dx \end{aligned}$$

Suku yang diintegrasikan juga nol karena syarat batas  $\eta'(x)$ . Dengan integral parsial lagi, suku terakhir menjadi

$$- \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \eta' = - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \eta \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \eta dx$$

Suku yang diintegrasikan hilang lagi karena syarat batas  $\eta(x)$ . Jadi

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \right] \eta dx = 0.$$

Maka fungsi  $y(x)$ , sehingga  $I$  stasioner, haruslah memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0.$$

Perhatikan tanda yang berubah dalam persamaan ini. Jelaslah fungsi  $y(x)$  yang meminimalkan fungsional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', y'', \dots, y^n, x) dx$$

adalah solusi dari

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \dots + (-1)^n \left( \frac{\partial F}{\partial y^n} \right) = 0.$$

### 7.4.2 Kebergantungan Beberapa Variabel

Perhatikan integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y', t) dt,$$

dengan  $x$  dan  $y$  merupakan fungsi yang dapat diturunkan dua kali terhadap variabel bebas  $t$ . Turunannya terhadap  $t$  berturut-turut adalah  $x'$  dan  $y'$ . Nilai dari  $x(t_1), y(t_1)$  dan  $x(t_2), y(t_2)$  ditentukan. Kita ingin mencari persamaan diferensial sehingga  $x$  dan  $y$  harus memenuhi sehingga nilai  $I$  stasioner. Kita dapat mencari solusi persoalan ini dengan prosedur yang sama seperti kasus kebergantungan satu variabel.

Misalkan  $x(t)$  dan  $y(t)$  adalah kurva aktual sepanjang  $I$  stasioner. Kita memisalkan kurva-kurva yang melalui dua buah titik  $t_1$  dan  $t_2$  sebagai

$$X(t) = x(t) + \alpha\epsilon(t), \quad Y(t) = y(t) + \alpha\eta(t)$$

dengan  $\epsilon(t)$  dan  $\eta(t)$  adalah dua buah fungsi terdiferensialkan sehingga

$$\epsilon(t_1) = \epsilon(t_2) = 0, \quad \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0.$$

Syarat batas ini menjamin tiap kurva melalui dua buah titik ujung. Parameter  $\alpha$  menspesifikasi masing-masing kurva dan kurva yang meminimalkan  $I$  diberikan label  $\alpha = 0$ . Sebagai sebuah konsekuensi

$$X' = x' + \alpha\epsilon', \quad Y' = y' + \alpha\eta'.$$

Dengan menggantikan  $x$  dengan  $X$  dan  $y$  dengan  $Y$ , integral  $I$  menjadi fungsi dari  $\alpha$

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} F(X, Y, X', Y', t) dt.$$

Syarat perlu agar  $I$  stasioner adalah

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Karena  $\alpha$  tidak bergantung pada  $t$ , turunan dapat dilakukan di dalam integral

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{dY}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial X'} \frac{dX'}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \frac{dY'}{d\alpha} \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial X} \epsilon + \frac{\partial F}{\partial Y} \eta + \frac{\partial F}{\partial X'} \epsilon' + \frac{\partial F}{\partial Y'} \eta' \right] dt \end{aligned}$$

Dengan memilih  $\alpha = 0$  sama dengan mengganti  $X$  dan  $Y$  dengan  $x$  dan  $y$ . Jadi

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \epsilon + \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial x'} \epsilon' + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dt.$$

Hubungan ini harus berlaku untuk semua pilihan  $\epsilon(t)$  dan  $\eta(t)$ , sepanjang memenuhi syarat batas. Secara khusus, ini berlaku untuk pemilihan khusus sehingga  $\epsilon(t)$  sama dengan nol dan  $\eta(t)$  sebarang. Untuk pilihan ini, persamaan terakhir menjadi

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right] dt.$$

Persamaan ini identik dengan (7.6) dengan variabel bebas  $x$  diganti dengan  $t$ . Dengan mengikuti prosedur yang sama, kita memperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Dengan cara yang sama,

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0.$$

Jadi untuk sistem ini, kita memiliki dua buah persamaan Euler-Lagrange simultan yang terpisah untuk  $x(t)$  dan  $y(t)$ . Jelaslah, jika kita memiliki kebergantungan terhadap  $n$  variabel, analisis yang sama akan memberikan  $n$  buah persamaan simultan yang terpisah.

Metode ini dengan mudah diperumum untuk kasus dengan kendala lebih dari satu. Jika kita menginginkan nilai stasioner integral  $I$ , yang memiliki kebergantungan terhadap  $n$  variabel, dengan beberapa kendala sehingga nilai integral  $J_j$  dijaga konstan untuk  $i = 1, 2, \dots, m$ , maka kita mencari nilai stasioner integral yang baru  $K$ ,

$$K = I + \sum_{j=1}^m \lambda_j J_j.$$

Dengan

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n, t) dt,$$

$$J_j = \int_{t_1}^{t_2} G_j(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n, t) dt, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Dengan prosedur yang sama, kita bisa peroleh persamaan Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

dengan

$$H = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j.$$

Ini adalah  $n$  buah persamaan diferensial terkopel.

### 7.4.3 Beberapa Variabel Bebas

Untuk persoalan lebih dari satu dimensi, kita perlu memperhatikan fungsional yang bergantung pada lebih dari satu variabel bebas. Marilah kita perhatikan integral ganda  $x$  dan  $y$  terhadap daerah  $R$

$$I = \iint_R F(u, u'_x, u'_y, x, y) dx dy, \quad (7.25)$$

dengan  $u$  adalah fungsi  $x$  dan  $y$ , maka

$$u'_x = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad u'_y = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

Misalkan daerah  $R$  dibatasi kurva  $C$ . Nilai  $u(x, y)$  ditentukan pada  $C$ . Kita mengasumsikan  $F$  kontinu dan dapat diturunkan dua kali. Kita akan menentukan fungsi  $u(x, y)$  sehingga  $I$  stasioner terhadap perubahan kecil pada  $u$ .

Analog dengan satu dimensi, prosedurnya dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan ini. Misalkan  $u(x, y)$  adalah fungsi sehingga integral  $I$  stasioner, dan fungsi ujinya berbentuk

$$U(x, y) = u(x, y) + \alpha \eta(x, y),$$

dengan  $\eta(x, y) = 0$  pada  $C$ . Kita akan menggunakan notasi berikut untuk menyatakan turunan parsial

$$\begin{aligned} U'_x &= \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} = U'_x + \alpha \eta'_x \\ U'_y &= \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} = U'_y + \alpha \eta'_y \end{aligned}$$

Diperoleh:

$$\frac{dU}{d\alpha} = \eta, \quad \frac{dU'_x}{d\alpha} = \eta'_x, \quad \frac{dU'_y}{d\alpha} = \eta'_y.$$

Gantikan  $u(x, y)$  dengan  $U(x, y)$  pada (7.25), kita mempunyai

$$I(\alpha) = I = \iint_R F(U, U'_x, U'_y, x, y) \, dx \, dy$$

Syarat perlu agar  $u(x, y)$  merupakan sebuah fungsi sehingga  $I$  ekstrimum adalah turunan  $I$  hilang pada  $\alpha = 0$

$$\left. \frac{d}{d\alpha} I(\alpha) \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Karena  $\alpha$  tidak bergantung pada  $x$  atau  $y$ , kita dapat mengambil turunan di dalam tanda integral

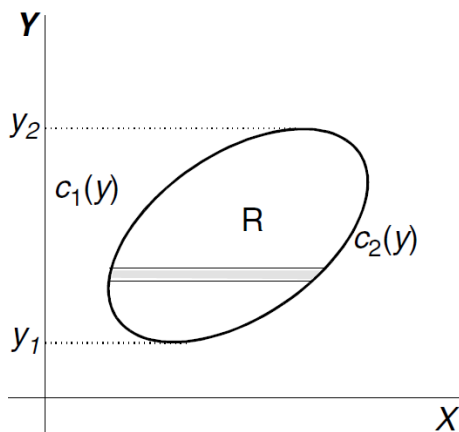
$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} I(\alpha) &= \iint_R \left[ \frac{\partial F}{\partial U} \frac{dU}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial U'_x} \frac{dU'_x}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial U'_y} \frac{dU'_y}{d\alpha} \right] dx \, dy \\ &= \iint_R \left[ \frac{\partial F}{\partial U} \eta + \frac{\partial F}{\partial U'_x} \eta'_x + \frac{\partial F}{\partial U'_y} \eta'_y \right] dx \, dy \end{aligned}$$

Dalam limit  $\alpha \rightarrow 0$ , kita memiliki

$$\left. \frac{d}{d\alpha} I(\alpha) \right|_{\alpha=0} = \iint_R \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \eta + \frac{\partial F}{\partial u'_x} \eta'_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y} \eta'_y \right] dx \, dy.$$

Suku kedua ruas kanan dapat dituliskan

$$\iint_R \frac{\partial F}{\partial u'_x} \eta'_x \, dx \, dy = \int_{y_1}^{y_2} \left[ \int_{x=c_1(y)}^{x=c_2(y)} \frac{\partial F}{\partial u'_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \, dx \right] dy$$



Gambar 7.11: Integral ganda. Sebuah integral ganda terhadap daerah  $R$  dapat dilakukan pertama mengintegrasikan  $x$  dari batas kiri  $x_1 = C_1(y)$  ke batas kanan  $x_2 = C_2(y)$  dengan  $y$  tetap, kemudian mengintegrasikan  $y$  dari  $y_1$  ke  $y_2$ .

dengan  $C_1$  dan  $C_2$  ditunjukkan pada Gambar 7.11.

Dengan  $y$  tertentu, kita dapat melakukan integrasi parsial yaitu

$$\int_{x=c_1(y)}^{x=c_2(y)} \frac{\partial F}{\partial u'_x} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx = \left[ \frac{\partial F}{\partial u'_x} \eta \right]_{x=c_1(y)}^{x=c_2(y)} - \int_{x=c_1(y)}^{x=c_2(y)} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) dx.$$

Suku yang diintegrasikan sama dengan nol karena pada batas  $\eta(x, y) = 0$ . Jadi

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial F}{\partial u'_x} \eta'_x dx dy &= - \int_{y_1}^{y_2} \left[ \int_{x=c_1(y)}^{x=c_2(y)} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) dx \right] dy \\ &= - \iint_R \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama

$$\iint_R \frac{\partial F}{\partial u'_y} \eta'_y dx dy = - \iint_R \eta \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) dx dy.$$

Jadi

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) \Big|_{\alpha=0} = \iint_R \left[ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) \right] \eta(x, y) dx dy = 0.$$

Karena  $\eta(x, y)$  sebarang kecuali pada batas, kita simpulkan suku pada kurung sama dengan nol,

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) = 0.$$

Ini adalah persamaan Euler-Lagrange dalam dua dimensi, perluasan dalam tiga dimensi sama persis.



## 7.5 Persoalan Sturm-Liouville dan Prinsip Variasi

### 7.5.1 Formulasi

Anggap kita mencari sebuah fungsi  $y = y(x)$  dalam selang  $x_1 \leq x \leq x_2$  yang memenuhi syarat batas

$$y(x_1) = 0, \quad y(x_2) = 0$$

dan membuat nilai integral berikut stasioner:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} [p(x) y'^2 - q(x) y^2] dx \quad (7.26)$$

dengan  $p(x)$  dan  $q(x)$  fungsi  $x$  yang kontinu terdiferensialkan. Sebagai tambahan, kita mensyaratkan integral

$$J = \int_{x_1}^{x_2} w(x) y^2 dx \quad (7.27)$$

nilainya tertentu dengan fungsi  $w(x)$  yang diberikan.

Menurut teori variasi dengan kendala, jawaban pertanyaan ini diberikan oleh persamaan Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

dengan

$$H = [p(x) y'^2 - q(x) y^2] - \lambda w(x) y^2$$

(Tanda  $\lambda$  tidak penting, karena hanyalah pengali yang belum ditentukan. Kita menggunakan  $-\lambda$  bukan yang positif untuk menyesuaikan dengan konvensi tanda persoalan Sturm-Liouville). Karena

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial y'} &= 2 \frac{d}{dx} (p(x) y') \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= -2q(x) y - 2\lambda w(x) y \end{aligned}$$

persamaan Euler-Lagrange menjadi

$$\frac{d}{dx} (p(x) y') + q(x) y + \lambda w(x) y = 0 \quad (7.28)$$

yang merupakan persamaan Sturm-Liouville dengan nilai eigen  $\lambda$ . Hal ini membuka hubungan antara kalkulus variasi dengan persoalan nilai eigen.

Perhatikan bahwa  $J$  dari (7.27) hanyalah berupa integral normalisasi. Jika kita menginginkan  $y(x)$  ternormalisasi terhadap fungsi bobot  $w(x)$ , maka  $y(x)$  haruslah diganti dengan  $y(x)J^{-1/2}$ . Gantikan  $y(x)$  dengan  $y(x)J^{-1/2}$ , menjadi

$$K = [y(x)] = \frac{\int_{x_1}^{x_2} [p(x) y'^2 - q(x) y^2] dx}{\int_{x_1}^{x_2} w(x) y^2 dx} = \frac{I}{J}. \quad (7.29)$$

Karena penyebut  $J$  konstan, nilai stasioner dari  $I$  berkaitan dengan nilai stasioner dari  $K$ . Solusi persamaan Sturm-Liouville (7.28) tetap berupa fungsi yang meminimalkan fungsional  $K[y(x)]$ .

Integralkan parsial suku pertama pada pembilang  $Ky(x)$ , kita memperoleh

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} p(x) y'^2 dx &= \int_{x_1}^{x_2} p(x) y' \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x) y' dy \\ &= p(x) y'(x) y(x) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \int_{x_1}^{x_2} y d[p(x) y'] \end{aligned}$$

Suku yang diintegrasikan sama dengan nol karena syarat batas  $y(x)$ . Jadi

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) y'^2 dx = - \int_{x_1}^{x_2} y \frac{d}{dx} [p(x) y'] dx.$$

Kita peroleh

$$K[y(x)] = \frac{- \int_{x_1}^{x_2} y \left\{ \frac{d}{dx} [p(x) y'] + q(x) y \right\} dx}{\int_{x_1}^{x_2} w(x) y^2 dx}. \quad (7.30)$$

Jika  $y(x)$  adalah nilai eigen ke- $i$  dari (7.28), maka

$$\frac{d}{dx} [p(x) y'_i] + q(x) y_i = -\lambda w(x) y_i \quad (7.31)$$

Substitusikan kembali pada (7.30), kita peroleh

$$K[y_i(x)] = \frac{I}{J} = \frac{\lambda_i \int_{x_1}^{x_2} y_i w(x) y_i dx}{\int_{x_1}^{x_2} w(x) y_i^2 dx} = \lambda_i. \quad (7.32)$$

Sehingga, nilai eigen  $\lambda$ , yang awalnya sebagai pengali yang belum ditentukan, merupakan nilai stasioner dari fungsional  $K[y(x)]$ . Fungsi  $y(x)$  yang meminimalkan  $K[y(x)]$  adalah fungsi eigen yang bersesuaian.

## 7.5.2 Perhitungan Nilai Eigen dan Fungsi Eigen

Keuntungan formulasi variasional persamaan Sturm-Liouville adalah kita dapat menggunakan (7.29) atau (7.30) untuk membuat estimasi sistematis nilai eigen dan fungsi eigen persamaan tersebut.

Nilai fungsional  $K[y(x)]$  dapat dihitung untuk fungsi sebarang dari  $y(x)$ . Terdapat sebuah teorema yang mengatakan fungsional  $K[\phi(x)]$  dari (7.29) dihitung dengan fungsi sebarang  $\phi(x)$  yang memenuhi syarat batas yang sama seperti yang diberikan pada persoalan nilai eigen akan lebih besar atau sama dengan nilai eigen paling kecil.

Misalkan  $y_i(x)$  adalah himpunan fungsi eigen persoalan Sturm-Liouville. Kita mungkin tidak tahu apapun tentang ini, selain ortogonal dan dapat dibuat ortonormal

$$\int_{x_1}^{x_2} y_i(x) y_j(x) w(x) dx = \delta_{ij}, \quad (7.33)$$

dan membentuk himpunan lengkap. Sehingga  $\phi(x)$  dapat dinyatakan sebagai

$$\phi(x) = \sum_i c_i y_i(x).$$

Substitusi ekspresi ini dalam (7.30)

$$K[\Phi(x)] = \frac{-\int_{x_1}^{x_2} \phi \left\{ \frac{d}{dx} [p(x) \phi'] + q(x) \phi \right\} dx}{\int_{x_1}^{x_2} w(x) \phi^2 dx},$$

dengan menggunakan (7.31) dan (7.33), kita mempunyai

$$K[\phi(x)] = \frac{\sum_i c_i^2 \lambda_i}{\sum_i c_i^2}.$$

Misalkan  $\lambda_1$  adalah nilai eigen paling kecil, maka

$$K[\phi(x)] - \lambda_1 = \frac{\sum_i c_i^2 \lambda_i}{\sum_i c_i^2} - \lambda_1 = \frac{\sum_i c_i^2 (\lambda_i - \lambda_1)}{\sum_i c_i^2}.$$

Karena setiap  $\lambda_i$ ,  $i \neq 1$ , lebih besar dari  $\lambda_1$ , maka  $K[\phi(x)] - \lambda_1 > 0$  dan

$$K[\phi(x)] > \lambda_1.$$

Tanda sama dengan hanya berlaku jika  $\phi(x) = y_1(x)$ , keadaan dasar fungsi eigen. (Keadaan dasar adalah keadaan dengan nilai eigen paling kecil.) Hal ini sering dinamakan sebagai prinsip variasi Rayleigh-Ritz.

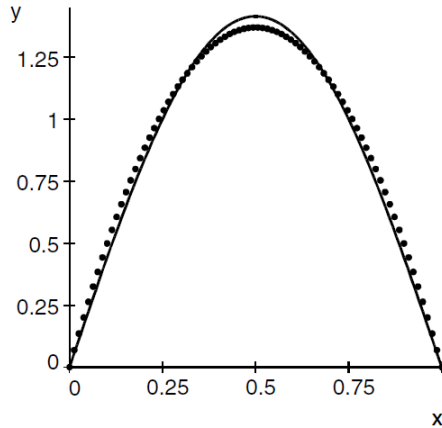
Sekarang kita dapat mengaproksimasi  $y_1(x)$  dengan fungsi uji  $\phi(x)$  yang memenuhi syarat batas. Nilai eigen dari (7.29)

$$\lambda_u = K[\phi(x)] = \frac{\int_{x_1}^{x_2} [p(x) \phi'^2 - q(x) \phi^2] dx}{\int_{x_1}^{x_2} w(x) \phi^2 dx} \quad (7.34)$$

selalu lebih besar atau sama dengan  $\lambda_1$ . Kita dapat memasukkan parameter  $\phi(x)$ , parameter-parameter ini dapat divariasikan untuk meminimalkan  $K[\phi(x)]$  dan meningkatkan estimasi nilai eigen keadaan dasar.

Sebagai sebuah ilustrasi, marilah kita perhatikan persamaan

$$y'' + \lambda y = 0$$



Gambar 7.12: Perbandingan fungsi eigen ternormalisasi  $\sqrt{2} \sin \pi x$  (garis penuh) dengan fungsi uji ternormalisasi  $\sqrt{30}x(1-x)$  (garis putus-putus).

dengan syarat batas

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Ini adalah persoalan Sturm-Liouville dengan  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$  dan  $w(x) = 1$ . Persoalan ini cukup sederhana dan kita semua tahu solusi eksaknya adalah

$$y = \sin \sqrt{\lambda x},$$

$$\lambda = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Sehingga nilai eigen paling rendahnya adalah

$$\lambda_1 = \pi^2 = 9.8696.$$

Marilah sekarang kita gunakan metode Rayleigh-Ritz untuk mengaproksimasi  $\lambda_1$ . Kita gunakan fungsi sederhana

$$\phi(x) = x(1-x)$$

sebagai fungsi uji, karena memenuhi syarat batas  $\phi(0) = \phi(1) = 0$ . Substitusikan fungsi ini ke dalam (7.34), dengan  $\phi'(x) = 1 - 2x$ ,  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ , dan  $w(x) = 1$ , kita mempunyai

$$\lambda_u = K[\phi(x)] = \frac{\int_{x_1}^{x_2} (1-2x)^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} x^2 (1-x)^2 dx} = \frac{1/3}{1/30} = 10,$$

yang kesalahannya hanya 1.3% dari nilai eksak  $\pi^2$ .

Untuk menghitung nilai eigen, kita tidak harus menggunakan fungsi uji ternormalisasi, karena penyebut pada  $K[\phi(x)]$ . Tetapi, kita perlu mengingat bahwa fungsi uji merupakan pendekatan dari fungsi eigen hanya dengan konstanta pengali. Perbandingan antara fungsi uji ternormalisasi  $\sqrt{30}x(1-x)$  dengan fungsi eigen eksak  $\sqrt{2}\sin \pi x$  ditunjukkan Gambar 7.12.

Hasil ini dapat diperbaiki dengan menambahkan suku dengan parameter. Parameter ini dapat dipilih untuk meminimalkan  $K[\phi(x)]$ , karena tidak penting bagaimana parameter ini, hasilnya adalah batas atas untuk  $\lambda_1$ . Sebagai contoh, kita dapat menggunakan

$$\phi_1(x) = x(1-x) + cx^2(1-x)^2$$

sebagai fungsi uji. Sebagai konsekuensi,  $K[\phi_1(x)]$  menjadi fungsi dari  $c$ . Ambil turunan  $K[\phi_1(x)]$  terhadap  $c$  kemudian jadikan nol, kita peroleh  $c = 1.1353$ . Gunakan nilai  $c$  ini, kita peroleh

$$\lambda_u = K[\phi(x)] = 9.8697$$

yang sangat dekat dengan nilai fungsi eigen eksak dari  $\pi^2 = 9.8696$ . Ketika dinormalisasikan, fungsi ini menjadi  $4.404x(1-x) + 4.990x^2(1-x)^2$ . Jika kita plot terhadap  $x$  fungsi ini tidak dapat dibedakan dengan fungsi eigen eksak dalam skala pada Gambar 7.12. Dari sini, jika nilai eigen dihitung dari fungsi uji sangat bagus, maka fungsi uji mungkin juga merupakan pendekatan yang baik untuk fungsi eigen.

Metode ini dapat diperluas untuk nilai eigen orde dua atau lebih tinggi dengan menambahkan syarat tambahan pada fungsi uji yang hanya ortogonal terhadap fungsi eigen berkaitan dengan nilai eigen yang lebih rendah. Sebagai contoh, kita bisa menggunakan fungsi uji dalam bentuk

$$\phi(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x),$$

dengan  $f_1(x)$  dan  $f_2(x)$  dikenal sebagai basis. Kita akan membuktikan dalam meminimalkan fungsional

$$K[\phi(x)] = \frac{I[\phi(x)]}{J[\phi(x)]}$$

kita akan memperoleh dua buah “nilai eigen.” Jika  $f_2(x)$  ortogonal terhadap  $f_1(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x) f_2(x) w(x) dx = 0,$$

maka keduanya merupakan pendekatan pada dua buah nilai eigen eksak pada persamaan Sturm-Liouville.

Untuk meminimalkan  $K[\phi(x)]$ , kita perlu memilih  $\partial K/\partial c_1$  dan  $\partial K/\partial c_2$  nol. Karena

$$\frac{\partial K}{\partial c_i} = \frac{\partial I/\partial c_i}{J} = I \frac{\partial J/\partial c_i}{J^2} = \frac{I}{J} \left[ \frac{\partial I}{\partial c_i} - \frac{I}{J} \frac{\partial J}{\partial c_i} \right] = 0$$

dan  $J > 0$ , hal ini berarti

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} - \frac{I}{J} \frac{\partial J}{\partial c_i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.35)$$

Jika kita turunkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c_i} &= \frac{\partial}{\partial c_1} I [c_1 f_1 + c_2 f_2] = \frac{\partial}{\partial c_1} \int_{x_1}^{x_2} [p (c_1 f_1' + c_2 f_2')^2 - q (c_1 f_1 + c_2 f_2)^2] dx \\ &= 2 \int_{x_1}^{x_2} [p (c_1 f_1' + c_2 f_2') f_1' - q (c_1 f_1 + c_2 f_2) f_1] dx \\ &= 2c_1 \int_{x_1}^{x_2} [p f_1' f_1 - q f_1 f_1] dx + 2c_2 \int_{x_1}^{x_2} [p f_2' f_1' + q f_2 f_1] dx. \end{aligned}$$

Jelaslah kita dapat meuliskan kedua turunan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c_i} &= 2 \sum_{j=1}^2 c_j a_{ji}, \quad i = 1, 2. \\ a_{ji} &= \int_{x_1}^{x_2} [p f_j' f_i' - q f_j f_i] dx. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c_i} &= 2 \sum_{j=1}^2 c_j b_{ji}, \quad k = 1, 2. \\ b_{ji} &= \int_{x_1}^{x_2} f_j f_i w dx. \end{aligned}$$

Menurut (7.32) pendekatan nilai eigen kita diberikan oleh

$$K = \frac{I}{J} = \lambda.$$

Jadi (7.35) dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{j=1}^2 c_j (a_{ji} - \lambda b_{ji}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Karena  $f_1$  dan  $f_2$  ortogonal, maka  $b_{ij} = 0$  untuk  $i \neq j$ . Jadi kita memiliki

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda b_{11}) c_1 + a_{21} c_2 &= 0 \\ a_{12} c_1 + (a_{22} - \lambda b_{22}) c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Untuk solusi tak nol,  $\lambda$  haruslah memenuhi persamaan sekular

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda b_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Ini adalah persamaan kuadratik,  $\lambda$  memiliki dua buah akar. Keduanya mungkin mendekati dua buah nilai eigen dari persoalan yang ditinjau.

Untuk mengilustrasikan prosedur, marilah kita aproksimasi dua buah nilai eigen dari persoalan sebelumnya

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Kita memilih fungsi uji berikut:

$$\phi(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

dengan

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x(1-x) \\ f_2(x) &= x(1-x)(1+ax). \end{aligned}$$

Baik  $f_1$  maupun  $f_2$  memenuhi syarat batas. Konstanta  $a$  ditentukan oleh syarat ortogonal

$$\int_0^1 f_1(x)f_2(x) dx = 0$$

yaitu  $-2$ . Dengan  $f_1' = 1 - 2x$ ,  $f_2' = 16x + 6x^2$ , kita bisa memperoleh

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 f_1'^2 dx = \frac{1}{3}, & a_{22} &= \int_0^1 f_2'^2 dx = \frac{1}{5} \\ a_{12} &= a_{21} = \int_0^1 f_1' f_2' dx = 0, \\ b_{11} &= \int_0^1 f_1^2 dx = \frac{1}{30}, & b_{22} &= \int_0^1 f_2^2 dx = \frac{1}{210}. \end{aligned}$$

Maka persamaan sekularnya adalah

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{30}\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} - \frac{1}{210}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

yang memiliki dua buah akar

$$\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 42.$$

Dua buah akar ini bisa dibandingkan dengan dua buah nilai eigen eksak

$$\lambda_1 = \pi^2 = 9.8696, \quad \lambda_2 = 4\pi^2 = 39.48.$$

## 7.6 Metode Rayleigh-Ritz untuk Persamaan Diferensial

Persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional dengan lebih dari satu variabel bebas adalah persamaan diferensial parsial. Fungsi yang meminimalkan fungsional adalah solusi dari persamaan diferensial tersebut.

Perhatikan fungsional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} F(u, u'_x, u''_x, u'_y, u''_y, x, y) \, dx \, dy$$

dengan  $x$  dan  $y$  adalah dua buah variabel bebas dan

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ u'_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u''_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u'_y &= \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u''_y = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Dengan metode yang dibangun untuk fungsional dengan dua buah variabel bebas dan turunan lebih tinggi, kita dapat dengan mudah membuktikan persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u''_x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u''_y} \right). \end{aligned}$$

Beberapa persamaan diferensial parsial dalam fisika matematika dapat dinyatakan dalam bentuk ini. Apa yang akan kita lihat, kita akan menginterpretasikan persamaan diferensial berikut sebagai persamaan Euler-Lagrange dari beberapa fungsional, kemudian menggunakan metode Rayleigh-Ritz untuk mengaproksimasi fungsi yang meminimalkan fungsional tersebut. Fungsi yang meminimalkan akan menjadi solusi persamaan diferensial parsial.

### 7.6.1 Persamaan Laplace

Untuk mencari persamaan Euler-Lagrange fungsional dua dimensi berikut

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy,$$

kita dapat menuliskan integrannya sebagai

$$F = u'^2_x + u'^2_y.$$



Jadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u'_x} = 2u'_x = 2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial u'_y} = 2u'_y = 2\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Sehingga persamaan Euler-Lagrange fungsional ini

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) = 0$$

adalah persamaan Laplacian

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Kita telah membentuk hubungan ini dalam dua dimensi, perluasan dalam tiga dimensinya jelas. Kita akan menggunakan notasi

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ |\nabla u|^2 &= \nabla u \cdot \nabla u = \left( i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \left( i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2\end{aligned}$$

sehingga semua hasil berlaku secara otomatis dalam tiga dimensi.

Apa yang sudah kita tunjukkan adalah fungsi  $u$  yang meminimalkan fungsional

$$I = \iint |\nabla u|^2 dx dy$$

juga merupakan solusi persamaan Laplace

$$\nabla^2 u = 0$$

Sekarang kita balik, mengatakan bahwa menyelesaikan persamaan Laplace dengan syarat batas tertentu adalah mencari fungsi yang memenuhi syarat batas yang sama yang meminimalkan fungsional.

Salah satu cara untuk meminimalkan fungsi adalah pertama mendekatinya dengan sebuah fungsi uji dengan banyak suku

$$u(x, y) = f_0(x, y) + c_1 f_1(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y) \quad (7.36)$$

Kemudian sesuaikan koefisien  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sehingga fungsionalnya sekecil mungkin. Perhatikan bahwa, sepanjang fungsi uji memenuhi syarat batas, satu suku tambahan akan membuatnya lebih dekat dengan fungsi yang meminimalkan sebenarnya. Hal ini disebabkan karena fungsi uji yang mempunyai suku  $c_{n+1} f_{n+1}(x, y)$  secara otomatis memasukkan semua suku sebelumnya. Jika proses meminimalkan tidak mampu membuat fungsionalnya lebih kecil dari nilai minimal sebelumnya, kita memilih  $c_{n+1} = 0$

dan mengambil nilai minimal sebelumnya. Sehingga dengan memasukkan suku tak nol lebih dan lebih banyak, fungsi uji akan semakin mendekati solusi sebenarnya

Untuk mengilustrasikan proses, marilah kita ambil tiga buah suku

$$u(x, y) = f_0(x, y) + c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)$$

Masukkan dalam fungsional, kita mempunyai

$$\begin{aligned} I &= \iint F dx dy \\ F &= \nabla(f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2) \cdot \nabla(f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2) \\ &= |\nabla f_0|^2 + c_1^2 |\nabla f_1|^2 + c_2^2 |\nabla f_2|^2 + 2c_1 \nabla f_0 \cdot \nabla f_1 + 2c_2 \nabla f_0 \cdot \nabla f_2 \\ &\quad + 2c_1 c_2 \nabla f_1 \cdot \nabla f_2. \end{aligned}$$

Untuk meminimalkannya, kita harus memilih turunan berikut sama dengan nol

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c_1} &= \iint \left\{ 2c_1 |\nabla f_1|^2 + 2\nabla f_0 \cdot \nabla f_1 + 2c_2 \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 \right\} dx dy = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial c_2} &= \iint \left\{ 2c_2 |\nabla f_2|^2 + 2\nabla f_0 \cdot \nabla f_2 + 2c_1 \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 \right\} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Dua persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 &= b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 &= b_2. \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_{11} &= \iint |\nabla f_1|^2 dx dy, & a_{12} &= \iint \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 dx dy, \\ a_{21} &= \iint \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 dx dy, & a_{22} &= \iint |\nabla f_2|^2 dx dy, \\ b_1 &= - \iint \nabla f_1 \cdot \nabla f_0 dx dy, & b_2 &= - \iint \nabla f_2 \cdot \nabla f_0 dx dy. \end{aligned}$$

Jadi

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Jelaslah bahwa fungsi uji yang diberikan (7.36), koefisien  $c_i$  ditentukan oleh sistem  $n$  buah persamaan linier

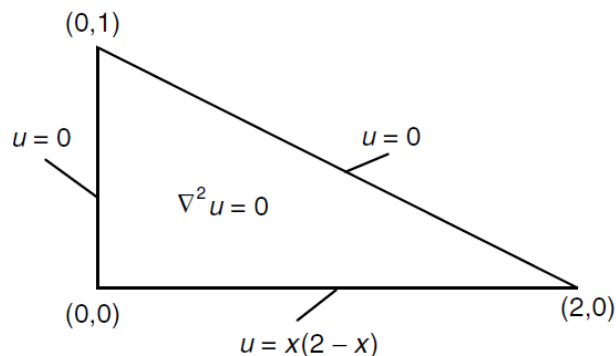
$$\sum_{j=1}^n a_{ij}c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dengan

$$a_{ij} = \iint \nabla f_i \cdot \nabla f_j \, dx \, dy, \quad b_i = - \iint \nabla f_0 \cdot \nabla f_i \, dx \, dy.$$

Solusi sebenarnya bisa diperoleh dengan  $n$  yang lebih besar. Perhitungan ini mudah dilakukan dengan menggunakan komputer.

**Contoh 7.6.1.** Carilah pendekatan tiga suku untuk solusi persamaan Laplace dengan syarat batas di dalam daerah pada gambar berikut.



**Solusi 7.6.1.** Persamaan garis lurus yang melalui  $(0, 1)$  dan  $(2, 0)$  adalah  $x = 2 - 2y$ . Jadi daerahnya dibatasi oleh garis  $x = 0$ ,  $y = 0$  dan  $x = 2 - 2y$ . Syarat batasnya adalah

$$u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = x(2 - x), \quad u(2 - 2y, y) = 0.$$

Fungsi sederhana berikut memenuhi syarat batas tersebut:

$$f_0(x, y) = x(2 - x - 2y).$$

Jelas bahwa fungsi dengan bentuk

$$u(x, y) = x(2 - x - 2y)(1 + c_1y + c_2y^2)$$

juga memenuhi syarat batas. Menuliskannya dalam bentuk

$$u(x, y) = f_0(x, y) + c_1f_1(x, y) + c_2f_2(x, y),$$

kita mempunyai

$$f_1(x, y) = yx(2 - x - 2y), \quad f_2(x, y) = y^2x(2 - x - 2y).$$

Jika kita integralkan

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 \int_0^{2-2y} |\nabla f_1|^2 dx dy = \frac{2}{9}, \\ a_{12} &= a_{21} = \int_0^1 \int_0^{2-2y} \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 dx dy = \frac{22}{315}, \\ a_{22} &= \int_0^1 \int_0^{2-2y} |\nabla f_2|^2 dx dy = \frac{11}{315}, \\ b_1 &= - \int_0^1 \int_0^{2-2y} \nabla f_0 \cdot \nabla f_1 dx dy = -\frac{2}{15}, \\ b_2 &= - \int_0^1 \int_0^{2-2y} \nabla f_0 \cdot \nabla f_2 dx dy = -\frac{28}{143}. \end{aligned}$$

Jadi

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{22}{315} \\ -\frac{28}{143} & \frac{11}{315} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{9} & \frac{22}{315} \\ \frac{22}{315} & \frac{11}{315} \end{vmatrix}} = -\frac{7}{13}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{2}{15} \\ \frac{22}{315} & -\frac{28}{143} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{2}{9} & \frac{22}{315} \\ \frac{22}{315} & \frac{11}{315} \end{vmatrix}} = -\frac{28}{143}.$$

Maka pendekatan tiga suku solusi persamaan Laplace adalah

$$u(x, y) = x(2 - x - 2y) \left( 1 - \frac{7}{13}y - \frac{28}{143}y^2 \right).$$

## 7.6.2 Persamaan Poisson

Mudah untuk membuktikan bahwa persamaan Poisson

$$\nabla^2 u = \rho$$

merupakan persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional

$$I = \iint \left[ |\nabla u|^2 + 2u\rho \right] dx dy. \quad (7.37)$$

Karena integran fungsional ini adalah

$$F = u'_x{}^2 + u'_y{}^2 + 2u\rho,$$

persamaan Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) = 0$$

jelaslah

$$2\rho - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

yang identik dengan persamaan Poisson  $\nabla^2 u = \rho$ .

Jadi menyelesaikan persamaan Poisson dengan syarat batas tertentu ekuivalen dengan mencari sebuah fungsi yang memenuhi syarat batas yang sama dan meminimalkan fungsional (7.37).

Kita dapat mendekati lagi dengan fungsi uji

$$u(x, y) = c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) + \dots + c_n f_n(x, y) \quad (7.38)$$

Metode yang sama seperti yang kita gunakan untuk menyelesaikan persamaan Laplace bisa digunakan untuk menentukan koefisien  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Tetapi terdapat satu perbedaan. Perhatikan dalam (7.38) tidak terdapat suku  $f_0(x, y)$  dengan  $c_0 = 1$ . Hal ini karena konstanta sebarang dikalikan solusi persamaan Laplace tetaplah merupakan solusi. Dengan kata lain, koefisien dalam (7.36) ditentukan dalam konstanta pengali. Jadi kita dapat memilih satu sebagai koefisien sebarang  $f_0(x, y)$ . Kita tidak memiliki kebebasan dalam menyelesaikan persamaan Poisson karena adanya suku tak homogen  $\rho(x, y)$ . Jadi fungsi uji persamaan Poisson harus dimulai dengan suku  $c_1 f_1(x, y)$ .

Anggap kita ingin menyelesaikan persoalan berikut:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \rho(x, y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u &= 0 \quad \text{pada batas persegi.} \end{aligned}$$

Kita dapat memilih fungsi uji

$$u(x, y) = xy(1-x)(1-y)(c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + \dots)$$

yang memenuhi syarat batas. Fungsi ini dapat dituliskan dalam bentuk (7.38) dengan

$$f_1 = xy(1-x)(1-y), \quad f_2 = xf_1, \quad f_3 = yf_1, \quad f_4 = x^2f_1, \dots$$

Masukkan dalam fungsional

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left| \nabla \sum_{j=1}^n c_j f_j \right|^2 + 2 \left( \sum_{j=1}^n c_j f_j \right) \rho \right] dx dy.$$

Untuk meminimalkan, kita pilih turunan terhadap  $c_j$  nol

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial I}{\partial c_n} = 0.$$

Hasilnya adalah  $n$  sistem persamaan linier

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dengan

$$a_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \nabla f_i \cdot \nabla f_j \, dx \, dy, \quad b_i = - \int_0^1 \int_0^1 f_i(x, y) \rho(x, y) \, dx \, dy$$

Persamaan matriks ini dapat diselesaikan untuk koefisien  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Salah satu strateginya adalah menghitung fungsional dengan  $n$  yang semakin besar sampai stabil. Dengan cara ini, kita bisa memperoleh aproksimasi yang mendekati solusi sebenarnya seperti yang kita inginkan. Perhitungan seperti ini harus dilakukan dengan komputer.

### 7.6.3 Persamaan Helmholtz

Persamaan Helmholtz dengan syarat batas adalah persoalan nilai eigen. Metode Rayleigh-Ritz untuk persoalan Sturm-Liouville dapat digunakan untuk memperoleh solusinya. Perhatikan persoalan dua dimensi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u. \quad (7.39)$$

Kalikan kedua ruas dengan  $u$  dari kiri dan integralkan, kita mempunyai

$$\iint u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx \, dy = \iint \lambda u^2 dx \, dy.$$

Jika  $u$  bukan merupakan fungsi eigen, kita dapat membuktikan bahwa

$$\lambda = \frac{\iint u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx \, dy}{\iint u^2 dx \, dy} = \frac{\iint u \nabla^2 u \, dx \, dy}{\iint u^2 \, dx \, dy} \quad (7.40)$$

merupakan batas atas nilai eigen paling rendah dengan mengekspansikan  $u$  dalam suku fungsi eigen, seperti yang kita lakukan dalam kasus satu dimensi.

Dalam pembahasan prinsip variasi,  $\lambda[u]$  merupakan fungsional. Kita dapat membuktikan bahwa meminimalkan  $\lambda[u]$  ekuivalen dengan meminimalkan fungsional berikut (lihat Latihan 11):

$$K[u] = \iint \left[ u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \lambda u^2 \right] dx \, dy.$$

Integran fungsional ini adalah

$$F = u (u''_x + u''_y) - \lambda u^2$$

jadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= (u''_x + u''_y) - 2\lambda u, \\ \frac{\partial F}{\partial u'_x} &= \frac{\partial F}{\partial u'_y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u''_x} = \frac{\partial F}{\partial u''_y} = u. \end{aligned}$$

Jadi persamaan Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u''_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u''_y} \right) = 0$$

untuk fungsional ini menjadi

$$(u''_x + u''_y) - 2\lambda u + u''_x + u''_y = 0,$$

yang identik dengan persamaan asalnya

$$\nabla^2 u = \lambda u.$$

Perhatikan juga bahwa persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional yang lain

$$K[u] = \iint \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \lambda u^2 \right] dx dy \quad (7.41)$$

juga merupakan persamaan Helmholtz (7.39). Integran fungsional ini adalah

$$F = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + \lambda u^2.$$

Karena

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2\lambda u, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_x} \right) = 2u''_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u'_y} \right) = 2u''_y,$$

persamaan Euler-Lagrangennya menjadi

$$2\lambda u - 2\lambda u''_x - 2u''_y = 0$$

yang identik dengan (7.39).

Karena meminimalkan fungsional (7.41) ekuivalen dengan meminimalkan

$$\lambda = \frac{-\iint \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}{\iint u^2 dx dy} = \frac{-\iint |\nabla u|^2 dx dy}{\iint u^2 dx dy} \quad (7.42)$$

kita dapat mengaproksimasi nilai eigen paling rendahnya dengan (7.40) maupun (7.42).

Hal ini tidak mengejutkan. Ketika nilai batas ditentukan, kita bisa menggunakan teorema divergensi untuk membuktikan bahwa  $\iint u \nabla^2 u dx dy$  dan  $-\iint |\nabla u|^2 dx dy$  hanya berbeda konstanta. Karena

$$\iint \nabla \cdot (u \nabla u) dx dy = \oint u \nabla u \cdot \mathbf{n} dl = \text{konstan},$$

dengan integral garis sepanjang batas tersebut. Tetapi

$$\nabla \cdot (u \nabla u) = \nabla \nabla \cdot \nabla u + u \nabla^2 u.$$

Jadi

$$\iint u \nabla^2 u \, dx \, dy = - \iint |\nabla u|^2 \, dx \, dy + \text{konstanta}.$$

Jadi jika  $u$  meminimalkan (7.40), maka juga meminimalkan (7.42). Biasanya (7.42) lebih sering digunakan.

**Contoh 7.6.2.** Gunakan metode variasi untuk mengestimasi frekuensi paling rendah membran sirkuler dengan jari-jari  $c$ .

**Solusi 7.6.2.** Getaran ini dibangkitkan oleh persamaan gelombang

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi.$$

Suku bergantung waktu dapat dipisahkan sehingga  $T(t) = \cos \omega t$ , dengan  $\omega = 2\pi\nu$  dan  $\nu$  adalah frekuensi. Suku ruangnya diperoleh dari persamaan Helmholtz

$$\nabla^2 u(x, y) = -\frac{\omega^2}{a^2} u(x, y).$$

Jadi frekuensi getaran moda normal sebarang ditentukan oleh nilai eigen persamaan ini. Syarat batas  $u$  adalah nilainya nol pada bingkai membran sirkular. Menurut (7.42)

$$\frac{\omega^2}{a^2} = \frac{\iint |\nabla u|^2 \, dx \, dy}{\iint u^2 \, dx \, dy}.$$

Sebarang  $u$ , sepanjang memenuhi syarat batas akan memberikan batas atas frekuensi paling rendah. Untuk membran lingkaran, jelaslah integrasi lebih baik dilakukan dalam koordinat polar. Syarat batasnya  $u(r, \theta)$  jika dituliskan dalam koordinat polar adalah

$$u(c, \theta) = 0.$$

Fungsi uji paling sederhananya adalah

$$u(r, \theta) = r - c.$$

Dalam koordinat polar

$$|\nabla u|^2 = \left( \frac{\partial}{\partial r} (r - c) \right)^2 = 1.$$

Jadi

$$\begin{aligned} \iint |\nabla u|^2 \, dx \, dy &= \int_0^c \int_0^{2\pi} 1 \cdot r \, d\theta \, dr = \pi c^2, \\ \iint u^2 \, dx \, dy &= \int_0^c \int_0^{2\pi} (r - c)^2 r \, d\theta \, dr = \frac{1}{6} \pi c^4. \end{aligned}$$



Jadi

$$\frac{w^2}{a^2} = \frac{6}{c^2}, \quad w = 2.449 \frac{a}{c}.$$

Seperti yang sudah kita buktikan sebelumnya, nilai numerik eksaknya adalah 2.405. Dengan fungsi uji sederhanapun, kita bisa memperoleh estimasi yang masuk akal.

## 7.7 Prinsip Hamilton

Persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(y, y', t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (py'^2 - qy^2) dt \quad (7.43)$$

adalah

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 2py'' + 2qy = 0. \quad (7.44)$$

Misalkan

$$p = \frac{1}{2}m, \quad q = \frac{1}{2}k$$

maka (7.44) menjadi

$$my'' + ky = 0$$

yang tidak lain adalah persamaan osilator harmonik dengan massa  $m$  dan konstanta pegas  $k$ . Masukkan nilai  $p$  dan  $q$  yang sama ke dalam (7.43) diperoleh

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2}my'^2 + \frac{1}{2}ky^2 \right) dt.$$

Kita bisa lihat bahwa suku pertama adalah energi kinetik,  $T$ , dan suku keduanya adalah energi potensial,  $V$ , osilator harmonik

$$T = \frac{1}{2}my'^2, \quad V = \frac{1}{2}ky^2.$$

Sehingga fungsionalnya dapat dituliskan

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt. \quad (7.45)$$

Oleh karena itu untuk sebuah osilator harmonik, kita menemukan bahwa persamaan gerak Newton identik dengan persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional dari (7.45). Ini hanyalah kasus khusus dari suatu prinsip umum dikenal sebagai prinsip Hamilton. Hal ini pertama kali diumumkan pada tahun 1834 oleh matematikawan Irlandia brilian William Rowan Hamilton.

Perbedaan antara energi kinetik dan energi potensial  $T - V$  dilambangkan dengan  $L$  dan disebut Lagrangian tersebut. Prinsip Hamilton menyatakan bahwa gerak dari suatu sistem dari  $t_1$  ke  $t_2$  adalah seperti yang integral waktu Lagrangian  $L$ , (7.45), yang dikenal sebagai “aksi,” yang memiliki nilai stasioner. Lagrangian ini ditentukan oleh koordinat umum  $q_1, q_2, \dots, q_n$  dan turunan terhadap waktunya  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ . Dari sekarang dan seterusnya, kita akan menggunakan notasi dalam mekanika klasik, dot di atas berarti turunan terhadap waktu (notasi Newton). Persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional aksi (7.45) biasanya disebut persamaan Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Persamaan ini merupakan himpunan  $n$  buah persamaan diferensial orde dua. Persamaan ini ditemukan secara independen oleh Joseph L. Lagrange (1736 – 1816). Persamaan ini ekuivalen dengan persamaan gerak Newton. Persamaan Lagrange cukup dengan kuantitas skalar sedangkan persamaan Newton menggunakan vektor. Dalam berbagai kasus, lebih mudah untuk mencari persamaan diferensial yang sesuai dengan menggunakan persamaan Lagrange dibandingkan dengan persamaan Newton.

Sebagai contoh, anggap sebuah partikel bergerak dalam sebuah medan potensial. Maka

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2), \quad V = V(x_1 + x_2 + x_3)$$

dan

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(x_1 + x_2 + x_3).$$

Persamaan Lagrangian memberikan

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

atau

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Karena  $-\partial V/\partial x_i$  adalah gaya partikel dalam arah  $x_i$ , ini adalah hukum kedua Newton yang dalam notasi vektor

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}.$$

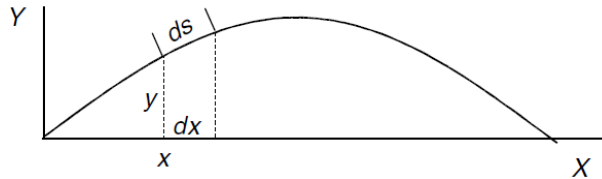
Dari contoh berikut, kita akan melihat prinsip Hamilton berlaku untuk sistem kontinum dan koordinat umum tidak harus merupakan koordinat standar yang biasa kita jumpai, dan bisa saja disesuaikan dengan persoalan fisis yang ditinjau.

**Contoh 7.7.1.** Gunakan prinsip Hamilton untuk menurunkan persamaan gelombang dalam senar yang tegang.

**Solusi 7.7.1.** Misalkan  $\rho$  adalah kerapatan linier dan  $\tau$  merupakan tegangan pada senar seperti Gambar 7.13

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx.$$

Energi potensial  $V$  dapat dicari dengan memperhatikan pertambahan elemen panjang



Gambar 7.13: Osilasi kecil dalam senar yang tegang.

$dx$ . Elemen panjang ini bertambah dari  $dx$  ke  $ds$ . Jadi kita mempunyai usaha sebesar  $\tau(ds - dx)$ . Karena energi potensial sama dengan usaha yang dilakukan, dengan menjumlahkan semua usaha yang dilakukan pada garis, kita mempunyai

$$V = \int_0^L \tau (ds - dx).$$

Tetapi

$$ds - dx = \left[ (dx)^2 + (dy)^2 \right]^{1/2} - dx = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx - dx$$

dan

$$\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \dots$$

Kita cukup mengambil dua buah suku pertama karena ini merupakan osilasi kecil

$$ds - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

dan

$$V = \int_0^L \frac{1}{2} \tau \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Maka Lagrangiannya adalah

$$L = T - V = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx$$

dan integral aksinya menjadi

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx dt$$

Ini merupakan fungsional dua dimensi dengan variabel bebas  $x$  dan  $t$ . Integrannya dapat dituliskan

$$L = \frac{1}{2}\rho y_t'^2 - \frac{1}{2}\tau y_x'^2$$

Persamaan Lagrangiannya

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial y_t'} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial y_x'} \right) = 0$$

yang menjadi

$$-\rho \frac{\partial}{\partial t} y_t' + \tau \frac{\partial}{\partial x} y_x' = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + \tau \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Ini adalah persamaan gelombang persis seperti yang kita turunkan sebelumnya

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

**Contoh 7.7.2.** (a) Carilah percepatan sudut sebuah bandul dengan panjang  $l$ . (b) Sebuah benda bermassa  $m$  menggelinding bebas dalam kawat lingkaran licin berjari-jari  $r$  yang berotasi dalam bidang horizontal terhadap satu titik pada kawat lingkaran dengan kecepatan sudut konstan  $\omega$ . Buktikan bahwa benda tersebut berosilasi seperti sebuah pendulum dengan panjang  $l = g/\omega^2$  pada garis yang menghubungkan pusat rotasi dengan pusat lingkaran.

**Solusi 7.7.2.** (a) Dari Gambar 7.14. (a) koordinat  $m$  adalah

$$x = L \sin \theta, \quad y = L \cos \theta.$$

Energi kinetiknya

$$T = \frac{1}{2}m(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}mL^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

Dengan memilih  $l$  di bawah suspensi sebagai titik nol untuk energi potensial, kita mempunyai

$$V = mgL(1 - \cos \theta).$$

Jadi Lagrangian  $L$  adalah

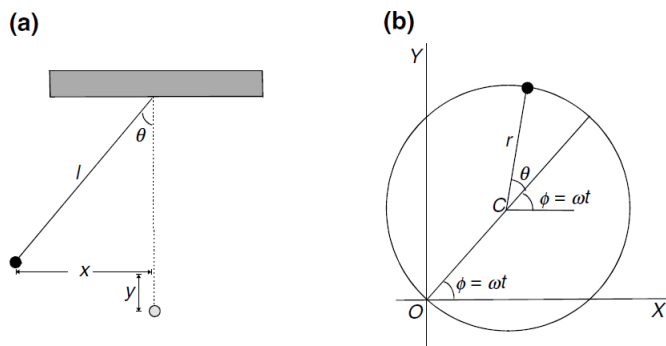
$$L = T - V = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL(1 - \cos \theta).$$

Jadi kita hanya memiliki satu variabel bebas  $\theta$  yang merupakan koordinat umum di sini. Maka Lagrangiannya

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$$

atau

$$-mgL \sin \theta - \frac{d}{dt} (mL^2\dot{\theta}) = 0.$$



Gambar 7.14: Gerak pendulum.

Jadi

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta.$$

(b) Misalkan  $C$  adalah pusat kawat lingkaran, dan sudut  $\theta$  dan  $\phi$  dinyatakan dalam Gambar 7.14. (b). Ketika kawat berotasi berlawanan arah jarum jam dengan kecepatan sudut  $\omega$ , maka  $\phi = \omega t$ . Koordinat benda  $x$  dan  $y$  adalah

$$\begin{aligned} x &= r \cos \omega t + r \cos (\theta + \omega t) \\ y &= r \sin \omega t + r \sin (\theta + \omega t) \end{aligned}$$

Karena gerakanya hanya dalam arah horizontal, energi potensialnya dapat diambil nol. Energi kinetiknya adalah

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{1}{2} m r^2 \left[ \omega^2 + (\dot{\theta} + \omega)^2 + 2\omega (\dot{\theta} + \omega) \cos \theta \right], \end{aligned}$$

yang juga merupakan sebuah Lagrangian, karena  $V = 0$ . Sehingga

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0$$

menjadi

$$m r^2 \left[ -\omega (\dot{\theta} + \omega) \sin \theta - \ddot{\theta} + \omega \sin \theta \right] = 0,$$

atau

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta.$$

Sehingga osilasi benda tersebut terhadap garis yang menghubungkan pusat rotasi dengan pusat lingkaran seperti sebuah pendulum dengan panjang  $l = g/\omega^2$ .

Prinsip Hamilton dan prinsip Fermat hanyalah contoh yang menunjukkan bahwa alam semesta mengikuti lintasan melalui ruang dan waktu berdasarkan prinsip ekstrem. Hampir di semua cabang fisika, kita dapat menemukan prinsip seperti ini. Mengapa alam berkelakuan sesuai dengan prinsip ekonomi adalah pertanyaan untuk para filsuf dan teolog. Sebagai ilmuwan, kita hanya bisa menikmati keanggunan teori. Namun hal ini tidak untuk mengatakan prinsip variasi hanyalah perangkat untuk memberikan hasil alternatif dari hasil yang dikenal. Bahkan dampaknya terhadap perkembangan ilmu pengetahuan tidak bisa diabaikan. Ketika dasar fisika belum diketahui, prinsip variasi dapat menjadi sangat berguna. Sebuah contoh adalah formulasi Richard Feynman dalam elektrodinamika kuantum yang didasarkan pada prinsip aksi paling sedikit. Untuk prestasinya, ia dianugerahi hadiah Nobel 1965 dalam fisika.

Prinsip variasi sebagai alat perhitungan juga sangat penting. Dengan metode variasional, tingkat energi dari semua jenis molekul sekarang bisa dihitung dengan tingkat akurasi yang tinggi. John Pople membuat kode perhitungan tersebut dalam program komputer yang dikenal sebagai Gaussian. Ia dianugerahi hadiah Nobel tahun 1998 dalam kimia.

## 7.8 Latihan

1. Carilah persamaan Euler-Lagrange untuk

$$(a) F = x^2 + y^2 = y'^2, \quad (b) F = \sqrt{xy} + y'^2.$$

$$\text{Jawab: (a) } y'' + x^2y = 0, \quad (b) \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x}{y}} - y'' = 0.$$

2. Carilah kurva  $y(x)$  yang membuat fungsional berikut stasioner

$$(a) I = \int_a^b (y^2 + y'^2 + 2ye^x) dx$$

$$(b) I = \int_a^b \frac{y'^2}{x^3} dx.$$

$$\text{Jawab: (a) } y = \frac{1}{2}xe^x + c_1e^x + c_2e^{-x}, \quad (b) y = c_1x^4 + c_2.$$

3. Carilah fungsi  $y(x)$  yang melalui dua titik  $(0,0)$  dan  $(1,1)$  yang meminimalkan

$$I = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx.$$

$$\text{Jawab: } y(x) = 0.42e^x - 0.42e^{-x}.$$

4. Carilah fungsi  $y(x)$  yang melalui dua titik  $(0,0)$  dan  $(\pi/2, 1)$  yang meminimalkan

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2) dx.$$

$$\text{Jawab: } y = \sin x.$$

5. Carilah fungsional untuk persoalan berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 > y < 1,$$

$$u = 0, \quad \text{pada batas.}$$

Jawab:  $I(u) = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2u \right] dx dy.$

6. Tunjukkan integran dari integral berikut

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y') dt$$

tidak bergantung eksplisit pada variabel bebas  $t$ , persamaan Euler-Lagrangenyanya:

$$F - x' \frac{\partial F}{\partial x'} - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C,$$

dengan  $C$  adalah konstanta.

7. Carilah persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional

$$I = \int_0^1 (yy'' + 4y) dx.$$

Jawab:  $y'' + 2 = 0.$

8. Carilah persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional

$$I = \int_0^1 (-y'^2 + 4y) dx.$$

Jawab:  $y'' + 2 = 0.$

9. Buktikan persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional tiga dimensi

$$I = \iiint \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

diberikan oleh persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

10. Estimasi frekuensi vibrasi terendah sebuah kulit gendang lingkaran berjari-jari  $a$ , dengan fungsional

$$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{- \iint u \nabla^2 u dx dy}{\iint u^2 dx dy}$$

dan fungsi uji

$$u(r) = r - a.$$

Jawab:  $\omega = 2.449v/a.$

11. Jika  $I[u]$  dan  $J[u]$  adalah fungsional dua dimensi dan

$$\lambda [u] = I [u] - \lambda J [u],$$

tunjukkan bahwa meminimalkan  $\lambda [u]$  ekuivalen dengan meminimalkan fungsional  $K[u]$

$$K[u] = I[u] - \lambda J[u].$$

Petunjuk: Gantikan  $u(x, y)$  dengan  $U(x, y) + \alpha \eta(x, y)$  dan buktikan  $\left. \frac{d\lambda}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$

memberikan  $\left[ \frac{dI}{d\alpha} - \lambda \frac{dJ}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = 0$ .

12. Carilah persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional

$$I = \int_0^1 xy'^2 dx$$

dengan kendala

$$\int_0^1 xy^2 dx = 1.$$

Jawab:  $xy'' + y' - \lambda xy = 0$ .

13. Carilah persamaan Euler-Lagrange untuk fungsional

$$I = \int_0^1 (py'^2 - qy^2) dx$$

dengan kendala

$$\int_0^1 \tau y^2 dx = 1.$$

Jawab:  $\frac{d}{dx}(py') + (q - \lambda r)y = 0$ .

14. Buktikan dua buah bentuk persamaan Euler-Lagrange berikut ekuivalen

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left( F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0.$$

15. Aproksimasi solusi persoalan berikut

$$y'' + \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 y = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

dengan fungsi uji

$$y = 1 - x^2.$$

Dengan fungsi uji ini carilah nilai eigen dan bandingkan dengan nilai eigen eksaknya.

Jawab:  $\lambda = 2.5$ ,  $\lambda/\lambda_{\text{eksak}} = 1.013$ .



16. Untuk soal sebelumnya, gunakan fungsi uji

$$y = 1 - x^n.$$

Carilah nilai optimum  $n$ . Dengan  $n$  tersebut, berapakah  $\lambda/\lambda_{\text{eksak}}$ ?

Jawab:  $n = 1.7247$ ,  $\lambda/\lambda_{\text{eksak}} = 1.003$ .

17. Carilah fungsi  $y(x)$  yang mengekstrimkan integral

$$I = \int_0^a y'^2 dx$$

dengan kendala

$$\int_0^a y^2 dx = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = 0.$$

Jawab:  $y(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/2} \sin \frac{n\pi}{a}x$ .

18. Gunakan prinsip Fermat untuk mencari lintasan cahaya jika indeks biasanya sebanding dengan

$$(a) y^{-1}, \quad (b) y.$$

Jawab: (a)  $(x - c_1)^2 + y^2 = c_2^2$ , (b)  $y = c \cosh \frac{x - c_2}{c_1}$ .

19. Gunakan fungsi uji dalam bentuk

$$u = (r - c) + b(r - c)^2$$

untuk menghitung frekuensi terendah getaran pada membran lingkaran berjari-jari  $c$ .

Jawab:  $\omega = 2.4203 a/c$ .

20. **Kekekalan energi.** Jika

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_j \dot{q}_j^2, \quad V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

gunakan prinsip Hamilton untuk membuktikan

$$T + V = \text{konstan.}$$

Petunjuk: Dari kenyataan variabel bebas  $t$  tidak muncul dalam integran, buktikan bahwa

$$L - \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{konstan.}$$

21. Turunkan persamaan Lagrangian untuk gerak sebuah partikel dalam medan gravitasi dengan kendala lingkaran berjari-jari  $c$  dalam bidang vertikal tetap.

Jawab:  $\frac{d}{dt} (mc^2\dot{\theta}) + mgc \cos \theta = 0$ .