

Bab 7. Teori Dasar Counting

Entin Martiana - Yuliana Setiowati
Politeknik Elektronika Negeri Surabaya
2007

Argumen Counting

- Kombinatorial adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan obyek-obyek.
- Solusi yang ingin diperoleh dengan kombinatorial adalah jumlah pengaturan obyek-obyek tertentu di dalam kumpulannya



Contoh Masalah yang Dipecahkan dengan Kombinatorial

- Misalkan nomor plat mobil di negara X terdiri atas 5 digit angka diikuti dengan 2 huruf. Angka pertama tidak boleh 0. Berapa banyak nomor plat mobil yang dapat dibuat?
- Password sistem komputer panjangnya enam sampai delapan karakter. Tiap karakter boleh berupa huruf atau angka: huruf besar dan huruf kecil tidak dibedakan. Berapa banyak password yang dapat dibuat?

Aturan Penjumlahan

Jika suatu pekerjaan dapat dilaksanakan dengan n_1 cara dan pekerjaan kedua dengan n_2 cara; serta jika kedua tugas ini tidak dapat dilakukan dalam waktu yang bersamaan, maka terdapat $n_1 + n_2$ cara untuk melakukan salah satu pekerjaan tersebut.

Contoh:

Departemen Matematika akan menghadiahkan sebuah komputer kepada seorang mahasiswa atau seorang dosen. Ada berapa memberi hadiah, jika terdapat 532 mahasiswa dan 54 dosen?

- Terdapat $532 + 54 = 586$ cara.



Generalisasi Aturan Penjumlahan

Jika terdapat pekerjaan-pekerjaan T_1, T_2, \dots, T_m yang dapat dilakukan dalam n_1, n_2, \dots, n_m cara, dan tidak ada dua di antara pekerjaan-pekerjaan tersebut yang dapat dilakukan dalam waktu yang bersamaan, maka terdapat $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ cara untuk melakukan salah satu dari tugas-tugas tersebut.

Contoh:

Seorang mahasiswa dapat memilih satu tugas proyek Matematika Diskrit dari tiga buah daftar, yang masing-masing berisikan 9, 21, dan 17 proyek. Ada berapa tugas proyek yang dapat dipilih?

Aturan Perkalian

Misalkan suatu prosedur dapat dibagi menjadi dua pekerjaan yang berurutan. Jika terdapat n_1 cara untuk melakukan tugas pertama dan n_2 cara untuk melakukan tugas kedua setelah tugas pertama selesai dilakukan, maka terdapat $n_1 \cdot n_2$ cara untuk melakukan prosedur tersebut.



Generalisasi Aturan Perkalian

Jika suatu prosedur terdiri dari barisan tugas-tugas T_1, T_2, \dots, T_m yang dapat dilakukan dalam n_1, n_2, \dots, n_m cara, secara berurutan, maka terdapat $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ cara untuk melaksanakan prosedur tersebut.



Generalisasi Aturan Perkalian

Contoh:

Berapa banyak plat nomor kendaraan yang berbeda yang memuat tepat satu huruf, tiga digit bilangan desimal, dan dua huruf?

Solusi:

- Terdapat 26 kemungkinan untuk memilih huruf pertama, kemudian 10 kemungkinan untuk menentukan digit pertama, 10 untuk digit kedua, dan juga 10 untuk digit ketiga, kemudian 26 kemungkinan untuk memilih huruf kedua dan 26 untuk huruf ketiga.
- Jadi, terdapat $26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 = 17576000$ plat nomor kendaraan yang berbeda.

Prinsip Inklusi Eksklusi

Contoh penggunaan prinsip inklusi-eksklusi dalam permasalahan kombinatorial adalah sebagai berikut:

Berapa banyak jumlah byte yang dapat dimulai dengan '11' atau berakhir dengan '11'?

Penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

Misalkan

A = himpunan byte yang dimulai dengan '11'

B = himpunan byte yang diakhiri dengan '11'

$A \cap B$ = himpunan byte yang berawal dan berakhir dengan '11'

$A \cup B$ = himpunan byte yang berawal dengan '11' atau berakhir dengan '11'

Prinsip Inklusi Eksklusi

- Jumlah byte yang dimulai dengan '11' adalah $2^6 = 64$ buah, karena 2 posisi pertama sudah diisi dengan '11', sehingga kita cukup mengisi posisi bit sisanya. Jadi $|A| = 64$. Dengan cara yang sama, jumlah byte yang diakhiri dengan '11' adalah $2^6 = 64$ buah. Jadi $|B| = 64$.
- Jumlah byte yang berawal dan berakhir dengan '11' ada $2^4 = 16$ buah, karena 2 posisi pertama dan 2 posisi terakhir sudah diisi dengan '11' sehingga kita tinggal mengisi 4 posisi bit di tengah-tengah saja. Jadi, $|A \cap B| = 16$.

Prinsip Inklusi Eksklusi

- Karena terdapat 64 cara untuk menyelesaikan Pekerjaan 1 dan 64 cara untuk menyelesaikan Pekerjaan 2, dan dalam 16 dari kasus-kasus tersebut Pekerjaan 1 dan 2 diselesaikan pada saat yang bersamaan, maka terdapat $64 + 64 - 16 = 112$ cara untuk melakukan salah satu di antara kedua Tugas tersebut.
- Dalam teori bilangan, ini berkorespondensi dengan himpunan A dan B yang tidak saling lepas. Maka: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Ini disebut prinsip inklusi-eksklusi.
- Untuk tiga himpunan A , B dan C berlaku :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Prinsip Pigeonhole (Sarang Merpati)

Beberapa teori kombinasi didapatkan dari pernyataan-pernyataan seperti Prinsip Pigeonhole (Sarang Merpati). Prinsip tersebut berbunyi : Jika $(k + 1)$ atau lebih merpati ditempatkan ke dalam k sarang, maka terdapat paling sedikit satu sarang yang memuat dua atau lebih merpati.

Contoh

- Jika dalam satu kelas terdapat 13 mahasiswa (merpati), maka sedikitnya terdapat 2 mahasiswa yang lahir pada bulan yang sama (sarang merpati).
- Jika terdapat 11 pemain dalam sebuah tim sepakbola yang menang dengan angka 12-0, maka haruslah terdapat paling sedikit satu pemain dalam tim yang membuat gol paling sedikit dua kali.

Contoh

- Jika anda menghadiri 6 kuliah dalam selang waktu Senin sampai Jumat, maka haruslah terdapat paling sedikit satu hari ketika anda menghadiri paling sedikit dua kelas.
- Jika dalam sebuah tas laundry terdapat kaos kaki dengan warna merah, putih, dan biru. Berapa pasang kaos kaki yang warnanya sama dalam satu tas yang berisi 4 kaos kaki.

Jawab : 1 pasang



Generalisasi Prinsip Sarang Merpati

Perluasan prinsip sarang merpati adalah sebagai berikut : Jika n sarang merpati ditempati oleh $kn + 1$ atau lebih merpati, dimana k adalah bilangan positif integer, maka dalam 1 sarang sedikitnya ditempati oleh $k + 1$ atau lebih merpati.

Contoh :

- Di dalam kelas dengan 60 mahasiswa, terdapat paling sedikit 12 mahasiswa akan mendapat nilai yang sama (A, B, C, D, atau E).
- Di dalam kelas dengan 61 mahasiswa, paling sedikit 13 mahasiswa akan memperoleh nilai yang sama.

Contoh

Misalkan ada laci yang berisi selusin kaus kaki coklat dan selusin kaus kaki hitam yang didistribusikan secara acak. Pada saat listrik padam, berapa kaus kaki yang harus anda ambil untuk memastikan bahwa di antaranya terdapat sepasang kaus yang sewarna?

Solusi:

Terdapat dua tipe kaus kaki, jadi jika anda memilih paling sedikit 3 kaus kaki, haruslah terdapat paling sedikit dua kaus kaki coklat atau paling sedikit dua kaus kaki hitam .

Generalisasi Prinsip Sarang Merpati : $\lceil 3/2 \rceil = 2$.

Latihan Soal

1. Sebuah restoran menyediakan lima jenis makanan, misalnya rawon, soto, mi, nasi campur dan bakso serta tiga jenis minuman misalnya es degan, es jeruk, teh anget. Jika setiap orang boleh memesan satu makanan dan satu minuman, berapa kemungkinan makanan dan minuman yang dapat dipesan?
2. Jabatan ketua himpunan dapat dipegang oleh mahasiswa D4 angkatan 2003 atau mahasiswa D3 angkatan 2004. Jika terdapat 23 mahasiswa D4 angkatan 2003 dan 58 mahasiswa D3 angkatan 2004, berapa cara memilih ketua himpunan?
3. Sekelompok mahasiswa terdiri dari 4 orang pria dan 3 orang wanita. Berapa jumlah cara memilih satu orang wakil pria dan satu orang wakil wanita?
4. Berapa cara memilih satu orang yang mewakili kelompok tersebut (tidak peduli pria atau wanita)?

Latihan Soal

5. Perpustakaan memiliki 6 buah buku berbahasa Inggris, 8 buah buku berbahasa Perancis dan 10 buah buku berbahasa Jerman. Masing-masing buku berbeda judulnya. Berapa jumlah cara memilih (a) 3 buah buku, masing-masing dengan 3 bahasa berbeda, dan (b) 1 buah buku (sembarang bahasa).
6. Huruf ABCDE akan digunakan untuk membuat kata dengan panjang 3 karakter. Untuk itu jawablah berapa kata yang dapat terbentuk jika :
 - Dalam kata diperbolehkan ada pengulangan huruf.
 - Dalam kata tidak diperbolehkan adanya pengulangan huruf.
 - Kata dimulai dari huruf A dan diperbolehkan adanya pengulangan.
 - Kata dimulai dari huruf A dan tidak diperbolehkan adanya pengulangan.
 - Kata tidak mengandung huruf A dan diperbolehkan adanya pengulangan.
 - Kata tidak mengandung huruf A dan tidak diperbolehkan adanya pengulangan.

Latihan Soal

7. Berapa nilai k sesudah pseudocode berikut dijalankan

```
k ← 0
for p1 ← 1 to n1 do
  k ← k + 1
for p2 ← 1 to n2 do
  k ← k + 1
.
.
.
for pm ← 1 to nm do
  k ← k + 1
```

8. Berapa nilai k sesudah pseudocode berikut dijalankan

```
k ← 0
for p1 ← 1 to n1 do
  for p2 ← 1 to n2 do
.
.
.
for pm ← 1 to nm do
  k ← k + 1
```

Latihan Soal

9. Sebuah plat nomer di suatu negara terdiri dari dua huruf dan tiga angka dengan ketentuan angka pertama tidak boleh 0. Hitung berapa cara bisa dilakukan untuk menuliskan plat nomer!
10. Pada tahun 1990, terdapat sebuah virus yang namanya Melissa. Virus ini bekerja melalui sebuah pesan e-mail yang berisi file attach word processor document. Setelah dari satu e-mail ini virus akan menyebar ke komputer yang digunakan untuk mengakses 50 alamat e-mail lain yang berada pada address book sebelumnya. Setelah 4 iterasi berapa jumlah komputer yang terkena virus ini?
11. Berapa string yang dapat dibuat dengan panjang 4 karakter yang terdiri dari huruf ABCDE jika pengulangan tidak diperbolehkan.
12. Berapa string yang dapat dibuat dari soal di atas jika string dimulai dengan huruf B.

Latihan Soal

13. Berapa string yang dapat dibuat dari soal no 10 jika string tidak dimulai dengan huruf B.
14. Untuk soal no 13-15, terdapat 10 jalan untuk perjalanan dari Surabaya ke Yogyakarta dan terdapat 5 jalan untuk perjalanan dari Yogyakarta ke Jakarta. Terdapat berapa jalan untuk melakukan perjalanan dari Surabaya ke Jakarta melalui Yogyakarta.
15. Terdapat berapa jalan yang dapat dipilih untuk melakukan perjalanan dari Surabaya – Yogyakarta – Jakarta –Yogyakarta – Surabaya.
16. Terdapat berapa jalan yang dapat dipilih untuk melakukan perjalanan dari Surabaya – Yogyakarta – Jakarta –Yogyakarta – Surabaya, tidak boleh melalui jalan yang sama untuk perjalanan berangkat dan pulang.

Latihan Soal

17. 19 orang mempunyai first name Ahmad, Arfan, dan Farah; middle name Adibah dan Abdul; dan last name Hakim, Rohman dan Rahmawati. Berapa minimal jumlah orang yang mempunyai first, middle dan last name yang sama. Buktikan jawaban anda!
18. Dalam berapa cara kita dapat memilih pimpinan, wakil pimpinan, sekretaris, bendahara dari sebuah organisasi yang mempunyai calon untuk ke-4 jabatan tsb. sebanyak 10 orang.
19. Berapa banyak string yang dapat dibentuk yang terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?
20. Berapa jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka :1,2,3,4,5 jika:
 - Tidak boleh ada pengulangan angka.
 - Boleh ada pengulangan angka