

**Aljabar Linear Elementer**  
**MA1223**  
**3 SKS**

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 1

---

---

---

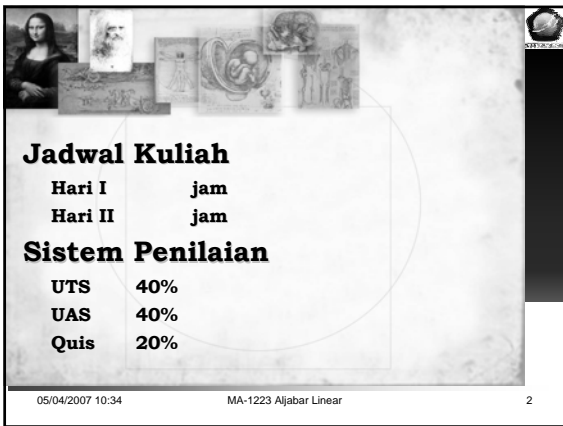
---

---

---

---

---



**Jadwal Kuliah**  
 Hari I jam  
 Hari II jam

**Sistem Penilaian**  
 UTS 40%  
 UAS 40%  
 Quis 20%

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 2

---

---

---

---

---

---

---

---



**Silabus :**

- Bab I Matriks dan Operasinya
- Bab II Determinan Matriks
- Bab III Sistem Persamaan Linear
- Bab IV Vektor di Bidang dan di Ruang
- Bab V Ruang Vektor
- Bab VI Ruang Hasil Kali Dalam
- Bab VII Transformasi Linear
- Bab VIII Ruang Eigen

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 3

---

---

---

---

---

---

---

---

REFERENSI :

- Anton H., Rorres, C., 1995, *Elementary Linear Algebra : Applications Version*, 6th edition, John Willey and Sons, New York
- Arifin, A., 2001, *Aljabar Linear*, edisi kedua, Penerbit ITB, Bandung
- Durbin, J. R., 1992, *Modern Algebra : An Introduction*, 3rd edition, John Willey and Sons, Singapore
- Kreyszig E., , 1993, *Advanced Enginereeng Mathematics*, 8th edition, John Willey & Sons, Toronto
- Leon, S. J., 2001, *Aljabar Linear dan Aplikasinya*, terjemahan Penerbit Erlangga, Jakarta

---

---

---

---

---

---

---

---

## 1. Matriks dan Operasinya

### Sub Pokok Bahasan

- Matriks dan Jenisnya
- Operasi Matriks
- Operasi Baris Elementer
- Matriks Invers (Balikan)

### Beberapa Aplikasi Matriks

- Representasi image (citra)
- Chanel/Frequency assignment
- Operation Research
- dan lain-lain.

---

---

---

---

---

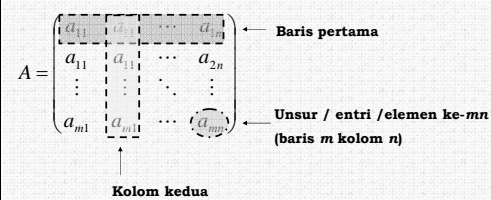
---

---

---

## 1. Matriks dan Jenisnya

### Notasi Matriks



### Matriks A berukuran (Ordo) $m \times n$

---

---

---

---

---

---

---

---

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah matriks berukuran sama  
 $A$  dan  $B$  dikatakan sama (notasi  $A = B$ )  
**jika**

$a_{ij} = b_{ij}$  untuk setiap  $i$  dan  $j$

**Jenis-jenis Matriks**

- **Matriks bujur sangkar (persegi)**  
 → Matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya adalah sama ( $n \times n$ )  
**Contoh :**

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Unsur diagonal

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 7

---

---

---

---

---

---

---

---

**Matriks segi tiga**  
 Ada dua jenis, yaitu matriks segitiga atas dan bawah.

- **Matriks segi tiga atas**  
 → Matriks yang semua unsur dibawah unsur diagonal pada kolom yang bersesuaian adalah nol.

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- **Matriks segi tiga bawah**  
 → Matriks yang semua unsur diatas unsur diagonal pada kolom yang bersesuaian adalah nol.

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 8

---

---

---

---

---

---

---

---

- **Matriks Diagonal**  
 → Matriks bujur sangkar dimana setiap unsur yang bukan merupakan unsur diagonal adalah nol.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriks satuan (Identitas)**  
 → Matriks diagonal dimana setiap unsur diagonalnya adalah satu.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 9

---

---

---

---

---

---

---

---

• **Transpos Matriks**

Matriks transpos diperoleh dengan menukar baris matriks menjadi kolom seletak, atau sebaliknya. Notasi  $A^t$  (hasil transpos matriks A)

**Contoh :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ maka } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Jika matriks  $A = A^t$  maka matriks A dinamakan matriks Simetri.

**Contoh :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

10

---

---

---

---

---

---

---

---

**2. Operasi Matriks**

Beberapa Operasi Matriks yang perlu diketahui :

1. Penjumlahan Matriks
2. Perkalian Matriks
  - Perkalian skalar dengan matriks
  - Perkalian matriks dengan matriks
3. Operasi Baris Elementer (OBE)

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

11

---

---

---

---

---

---

---

---

• **Penjumlahan Matriks**

Syarat : Dua matriks berordo sama dapat dijumlahkan

**Contoh**

a. 
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

b. 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

12

---

---

---

---

---

---

---

---

**Perkalian Matriks**

- **Perkalian Skalar dengan Matriks**  
**Contoh :**  

$$k \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kp & kq \\ kr & ks \end{bmatrix}$$
- **Perkalian Matriks dengan Matriks**  
**Misalkan A berordo  $p \times q$  dan B berordo  $m \times n$**   
**Syarat :  $A \times B \rightarrow$  haruslah  $q = m$**   
**hasil perkalian AB berordo  $p \times n$**   
  
 **$B \times A \rightarrow$  haruslah  $n = p$**   
**hasil perkalian BA berordo  $m \times q$**   
  
**Contoh :**  
**Diketahui**  

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 13

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Maka hasil kali A dan B adalah :**

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} p & s \\ q & t \\ r & u \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} ap+bq+cr & as+bt+cu \\ dp+eq+fr & ds+et+fu \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

**Misalkan A, B, C adalah matriks berukuran sama dan  $\alpha, \beta$  merupakan unsur bilangan Riil, Maka operasi matriks memenuhi sifat berikut :**

1.  $A + B = B + A$
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3.  $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
4.  $(\alpha + \beta) (A) = \alpha A + \beta A$

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 14

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Contoh :**  
Diketahui matriks :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan

- a.  $A A^t$
- b.  $A^t A$

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 15

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Jawab :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

maka

$$AA' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 13 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

sedangkan

$$A'A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

16

---

---

---

---

---

---

---

---

### • Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi baris elementer meliputi :

1. Pertukaran Baris
2. Perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol
3. Penjumlahan hasil perkalian suatu baris dengan konstanta tak nol (seperti butir 2) dengan baris yang lain.

Contoh : OBE 1

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad b_1 \leftrightarrow b_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Baris pertama ( $b_1$ ) ditukar dengan baris ke-2 ( $b_2$ )

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

17

---

---

---

---

---

---

---

---

OBE ke-2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{4} b_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Perkalian Baris pertama ( $b_1$ ) dengan bilangan  $\frac{1}{4}$

OBE ke-3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad -2b_1 + b_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Perkalian (-2) dengan  $b_1$  lalu tambahkan pada baris ke-3 ( $b_3$ )

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

18

---

---

---

---

---

---

---

---

- Beberapa definisi yang perlu diketahui :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Baris pertama dan ke-2 dinamakan **baris tak nol**, karena pada kedua baris tersebut memuat unsur tak nol.
- Bilangan 1 pada baris pertama dan bilangan 3 pada baris ke-2 dinamakan **unsur pertama tak nol** pada baris masing-masing.
- Bilangan 1 (pada baris baris pertama kolom pertama) dinamakan **satu utama**.
- Baris ke-3 dinamakan **baris nol**, karena setiap unsur pada baris ke-3 adalah nol.

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

19

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Sifat matriks hasil OBE :

1. Pada baris tak nol maka unsur tak nol pertama adalah 1 (dinamakan satu utama).
2. Pada baris yang berturutan, baris yang lebih rendah memuat 1 utama yang lebih ke kanan.
3. Jika ada baris nol (baris yang semua unsurnya nol), maka ia diletakkan pada baris paling bawah.
4. Pada kolom yang memuat unsur 1 utama, maka unsur yang lainnya adalah nol.

Matriks dinamakan esilon baris jika dipenuhi sifat 1, 2, dan 3 (Proses Eliminasi Gauss)

Matriks dinamakan esilon baris tereduksi jika dipenuhi semua sifat (Proses Eliminasi Gauss-Jordan)

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

20

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Contoh :**

Tentukan matriks esilon baris tereduksi dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$A \sim -2b_1 + b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim b_2 \leftrightarrow b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

21

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

$$A \sim -2b_2 + b_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-b_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-b_3 + b_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b_2 + b_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 22

---

---

---

---

---

---

---

---

Perhatikan hasil OBE tadi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Setiap baris mempunyai satu utama.  
 Tidak setiap kolom memiliki satu utama, karena jumlah baris lebih sedikit dari jumlah kolom (kolom 4 tidak mempunyai satu utama)

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 23

---

---

---

---

---

---

---

---

**Invers Matriks**

Misalkan A adalah matriks bujur sangkar.  
 B dinamakan invers dari A jika dipenuhi  
 $AB = I$  dan  $BA = I$   
 Sebaliknya, A juga dinamakan invers dari B.  
 Notasi  $A = B^{-1}$   
 Cara menentukan invers suatu matriks A adalah

$$\begin{matrix} \text{OBE} \\ (A|I) \quad - \quad (I|A^{-1}) \end{matrix}$$

Jika OBE dari A tidak dapat menghasilkan matriks identitas maka A dikatakan **tidak punya invers**

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 24

---

---

---

---

---

---

---

---



**Contoh :**

Tentukan matriks invers ( jika ada ) dari :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{b_1 \leftrightarrow b_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{\substack{-3b_1 + b_2 \\ 2b_1 + b_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

25

---

---

---

---

---

---

---

---

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-b_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{-b_3 + b_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \\ \xrightarrow{-b_2 + b_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Jadi Invers Matriks A adalah

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 26

---

---

---

---

---

---

---

---

• Perhatikan bahwa :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

maka

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

05/04/2007 10:34 MA-1223 Aljabar Linear 27

---

---

---

---

---

---

---

---

Berikut ini adalah sifat-sifat matriks invers :

- i.  $(A^{-1})^{-1} = A$
- ii. Jika  $A, B$  dapat dibalik atau memiliki invers maka  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- iii. Misal  $k \in \mathbb{R}$  maka  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
- iv. Akibat dari (ii) maka  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

28

---

---

---

---

---

---

---

---

### Latihan

Diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan (untuk no 1 – 5) matriks hasil operasi berikut ini :

1.  $AB$
2.  $3CA$
3.  $(AB)C$
4.  $(4B)C + 2C$

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

29

---

---

---

---

---

---

---

---

Untuk Soal no. 5 – 7, Diketahui :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan :  $D + E2$  (dimana  $E2 = EE$ )
6. Tentukan matriks bentuk eselon baris tereduksi dari  $A, B, C, D,$  dan  $E$
7. Tentukan matriks invers dari  $D$  dan  $E$  (jika ada)

05/04/2007 10:34

MA-1223 Aljabar Linear

30

---

---

---

---

---

---

---

---