

Aljabar Linear Elementer

MA1223

3 SKS

Silabus :

Bab I Matriks dan Operasinya

Bab II Determinan Matriks

Bab III Sistem Persamaan Linear

Bab IV Vektor di Bidang dan di Ruang

Bab V Ruang Vektor

Bab VI Ruang Hasil Kali Dalam

Bab VII Transformasi Linear

Bab VIII Ruang Eigen

VEKTOR DI BIDANG DAN DI RUANG



Pokok Bahasan :

1. Notasi dan Operasi Vektor
2. Perkalian titik dan Proyeksi Ortogonal
3. Perkalian silang dan Aplikasinya

Beberapa Aplikasi :

- Proses Grafika Komputer
- Kuantisasi pada proses kompresi
- Least Square pada Optimasi
- Dan lain-lain



Notasi dan Operasi

Vektor → besaran yang mempunyai arah

Notasi vektor

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k} = (c_1, c_2, c_3)$$

Notasi **panjang vektor** $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

adalah

$$\|\bar{c}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

Vektor satuan → Vektor dengan panjang atau norm
sama dengan satu



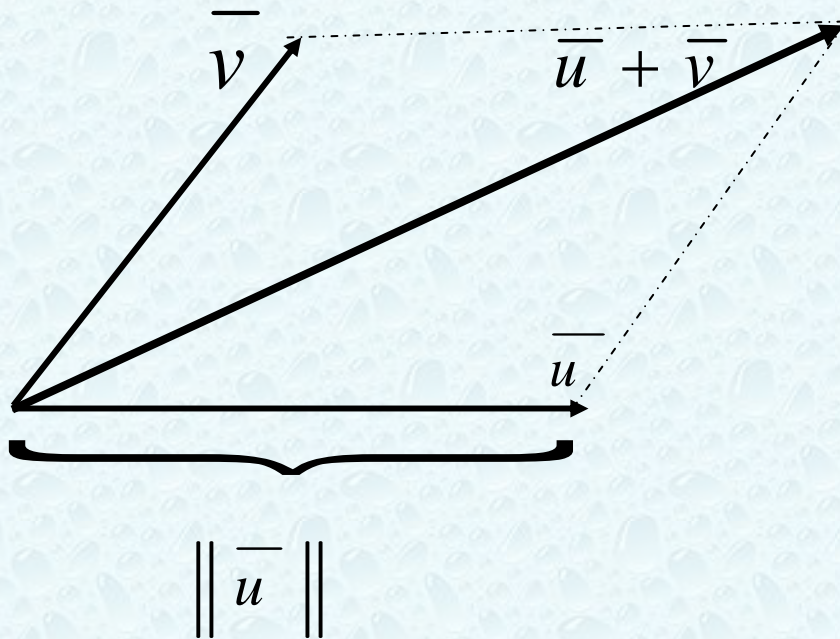
Operasi Vektor meliputi :

1. Penjumlahan antar vektor (pada ruang yang sama)
2. Perkalian vektor
 - (a) dengan skalar
 - (b) dengan vektor lain
 - Hasil kali titik (*Dot Product*)
 - Hasil kali silang (*Cross Product*)

Penjumlahan Vektor



Misalkan \vec{u} dan \vec{v} adalah vektor – vektor yang berada di ruang yang sama, maka vektor $\vec{u} + \vec{v}$ didefinisikan





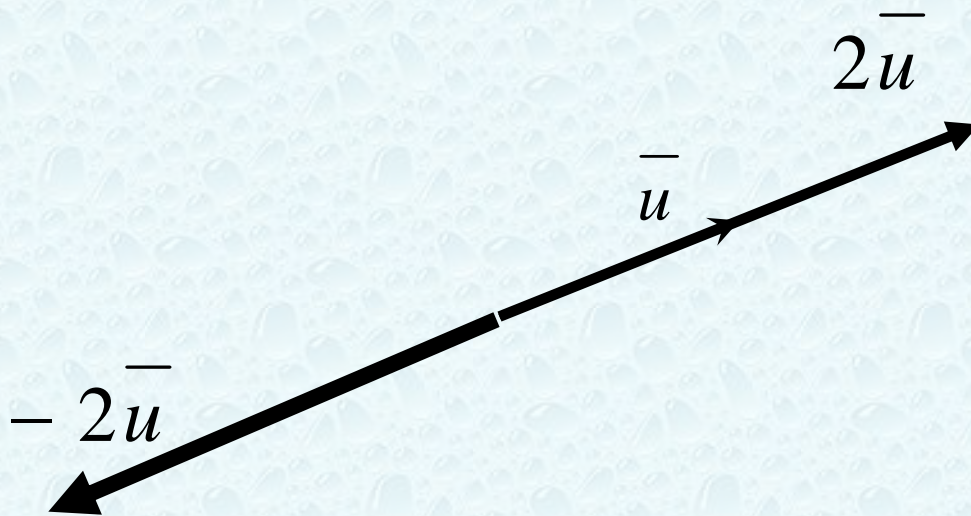
Perkalian vektor dengan skalar

Perkalian vektor \vec{u} dengan skalar k , $(k\vec{u})$

didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya k kali panjang vektor \vec{u} dengan arah

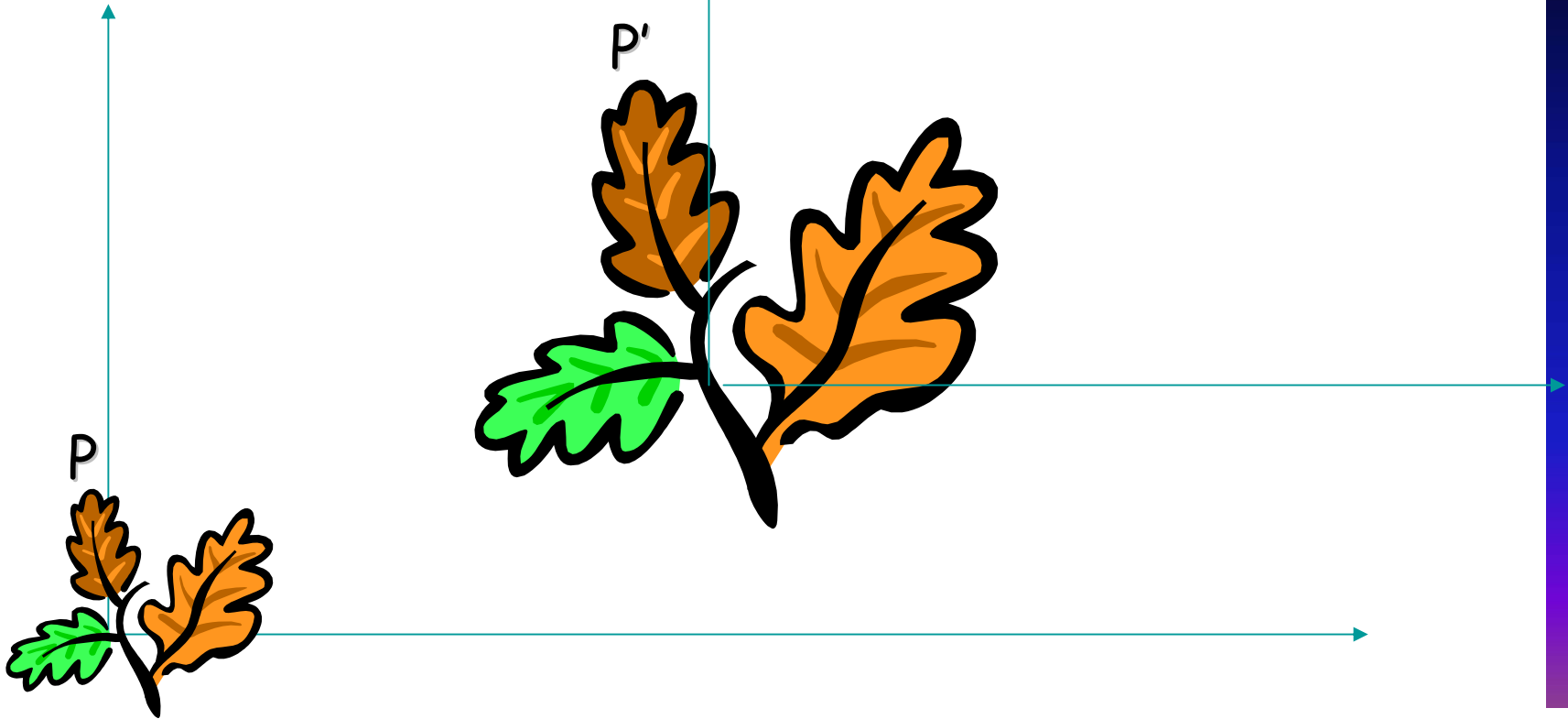
Jika $k > 0 \rightarrow$ searah dengan \vec{u}

Jika $k < 0 \rightarrow$ berlawanan arah dengan \vec{u}





Scaling





Secara analitis, kedua operasi pada vektor diatas dapat dijelaskan sebagai berikut :

Misalkan $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

adalah vektor-vektor di ruang yang sama

maka

$$1. \bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$2. \bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$3. k \bar{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$



Perkalian antara dua vektor

- Hasil kali titik (*dot product*)
- Hasil kali silang (*cross product*)

Hasil kali titik (*dot product*)

- Hasil kali titik merupakan operasi antara dua buah vektor pada **ruang yang sama** yang menghasilkan skalar

Hasil kali silang (*Cross product*)

- Hasil kali silang merupakan operasi antara dua buah vektor pada **ruang \mathbf{R}^3** yang menghasilkan vektor

Dot Product



Misalkan \vec{a} , \vec{b}
adalah vektor pada ruang yang sama
maka hasil kali titik antara dua vektor :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \alpha$$

dimana

$\|\vec{a}\|$: panjang \vec{a}

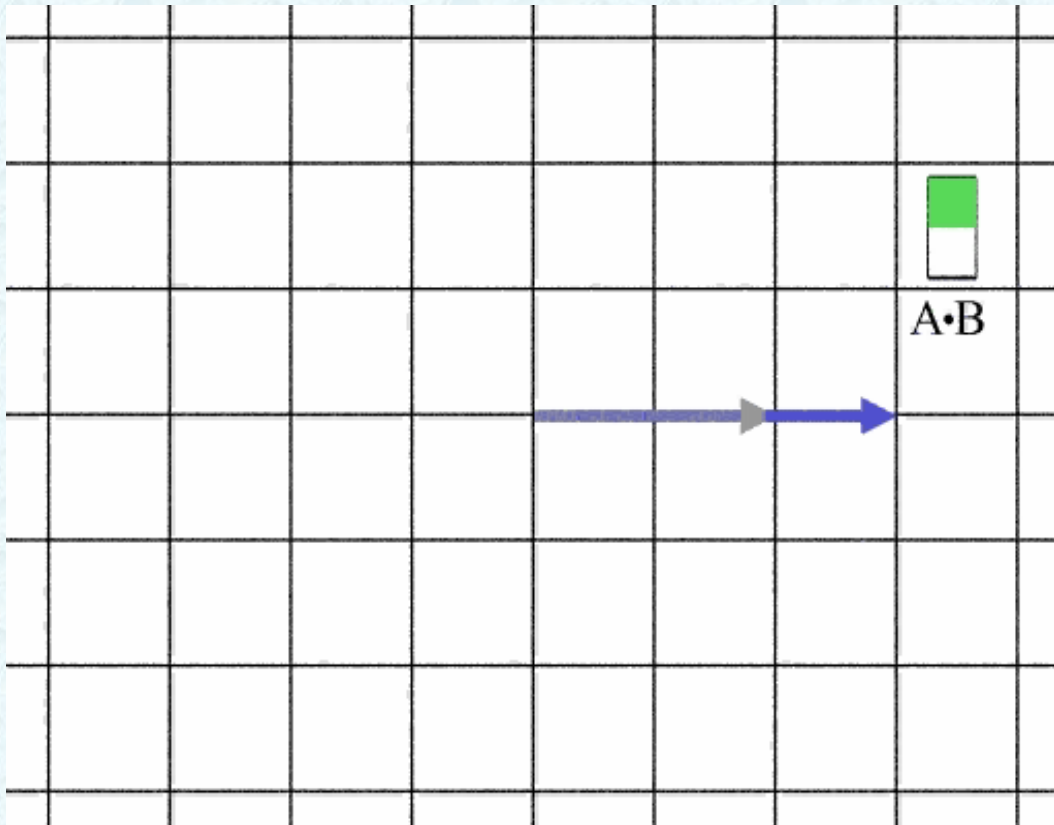
$\|\vec{b}\|$: panjang \vec{b}

α : sudut keduanya



Ilustrasi dot product vektor A dan B

$$A \bullet B = \|A\| \|B\| \cos \alpha$$

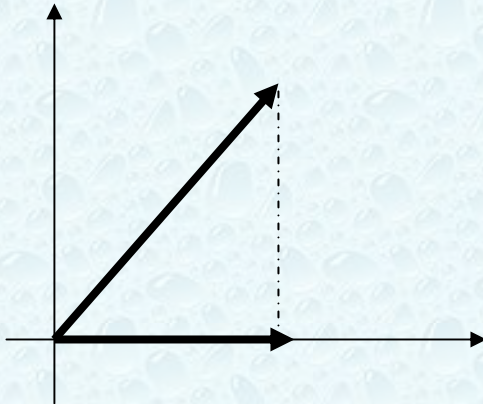


Contoh 2 :

Tentukan hasil kali titik dari dua vektor

$$\bar{a} = 2\hat{i} \quad \text{dan} \quad \bar{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$

Jawab :



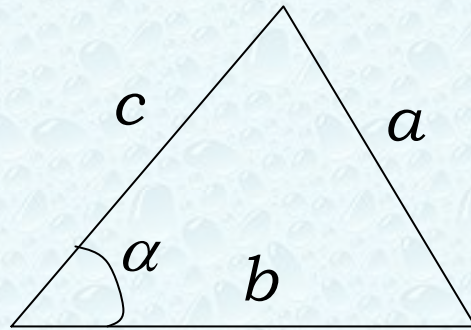
Karena $\tan \alpha = 1$, artinya $\alpha = 45^\circ$

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \alpha$$

$$= 2\sqrt{8} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

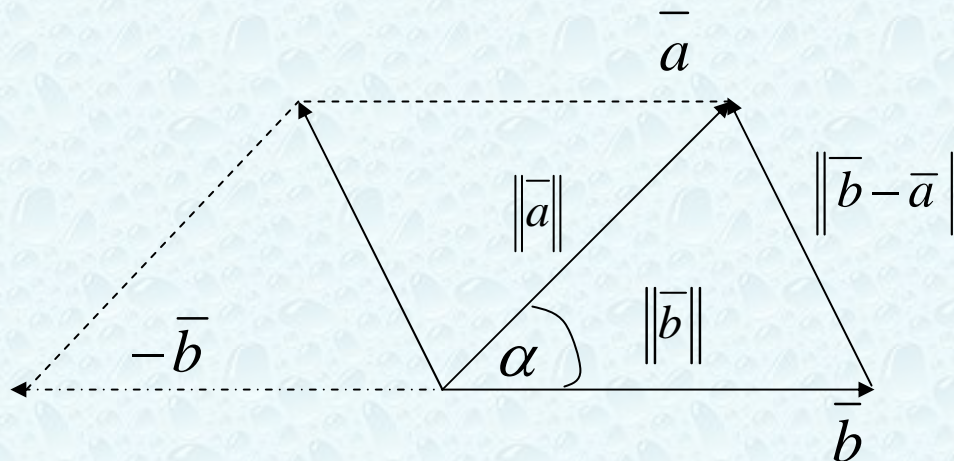
$$= 4$$

Ingat aturan cosinus



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Perhatikan



$$\| \bar{b} - \bar{a} \|^2 = \| \bar{a} \|^2 + \| \bar{b} \|^2 - 2 \| \bar{a} \| \| \bar{b} \| \cos \alpha$$

Selanjutnya dapat ditulis



$$\|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \theta = \frac{1}{2} \left[\|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 - \|\bar{b} - \bar{a}\|^2 \right]$$

Ingat bahwa :

$$1. \bar{a} \bullet \bar{b} = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos \alpha$$

$$2. \|\bar{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

$$3. \|\bar{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2$$

$$\begin{aligned} 4. \|\bar{b} - \bar{a}\|^2 &= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2 \\ &= b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \\ &\quad - 2b_1a_1 - 2b_2a_2 - \dots - 2b_na_n \end{aligned}$$

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

Perhatikan setiap sukunya, diperoleh hubungan :

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

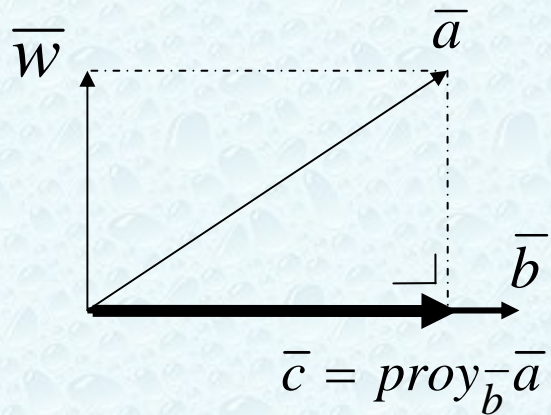
Tentukan kembali hasil kali titik dari dua vektor pada contoh sebelumnya

$$\begin{aligned}\bar{a} \bullet \bar{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= 2(2) + 0(2) \\ &= 4\end{aligned}$$

Beberapa sifat hasil kali titik :

1. $\bar{a} \bullet \bar{b} = \bar{b} \bullet \bar{a}$
2. $\bar{a} \bullet (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \bullet \bar{b}) + (\bar{a} \bullet \bar{c})$
3. $k(\bar{a} \bullet \bar{b}) = k\bar{a} \bullet \bar{b} = \bar{a} \bullet k\bar{b}$, dimana $k \in R$

Proyeksi Ortogonal



terlihat bahwa

$$\bar{c} = k \bar{b} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|^2}$$

Karena

$$\begin{aligned} \bar{a} = \bar{w} + \bar{c} \quad \implies \quad \bar{a} \cdot \bar{b} &= (\bar{w} + \bar{c}) \cdot \bar{b} \\ &= \bar{w} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{b} \\ &= k \bar{b} \cdot \bar{b} \\ &= k \|\bar{b}\|^2 \end{aligned}$$



Jadi,
rumus proyeksi diperoleh :

$$\text{Proy}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\|\bar{b}\|^2} \bar{b}$$

Contoh 4 :

Tentukan proyeksi ortogonal

vektor $\bar{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

terhadap vektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Jawab :

$$\begin{aligned}\text{Pr } oy_{\bar{v}} \bar{w} &= \frac{\bar{w} \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}\|^2} \bar{v} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{1^2 + 3^2 + (-4)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-2 + (-12) + (-12)}{26} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-26}{26} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cross Product (hasilkali silang)

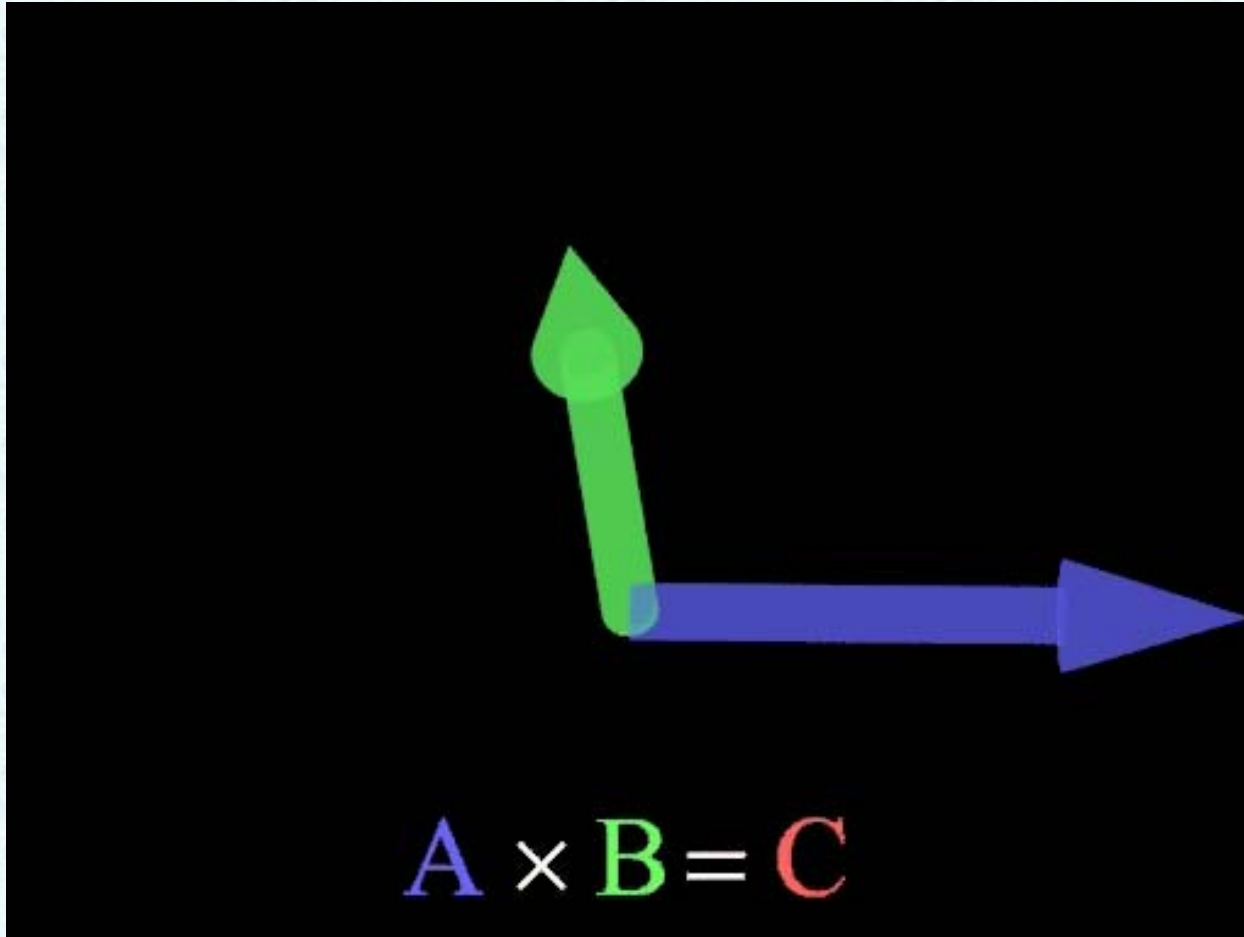
Hasil kali silang merupakan hasil kali antara dua vektor di Ruang (\mathbb{R}^3) yang menghasilkan vektor yang tegak lurus terhadap kedua vektor yang dikalikan tersebut.

$$\begin{aligned}\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & B_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \hat{k}\end{aligned}$$

Ilustrasi *Cross Product* (hasilkali silang)



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$





Contoh :

Tentukan $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$,

dimana $\bar{u} = (1, 2, -2)$ $\bar{v} = (3, 0, 1)$

Jawab :

$$\bar{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2 \cdot 1 - 0(-2)) \hat{i} + (3(-2) - 1 \cdot 1) \hat{j} + (1 \cdot 0 - 3 \cdot 2) \hat{k}$$

$$= 2\hat{i} - 7\hat{j} - 6\hat{k}$$



Beberapa sifat Cross Product :

a. $\bar{u} \bullet (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$

b. $\bar{v} \bullet (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$

c. $\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\bar{u} \bullet \bar{v})^2$

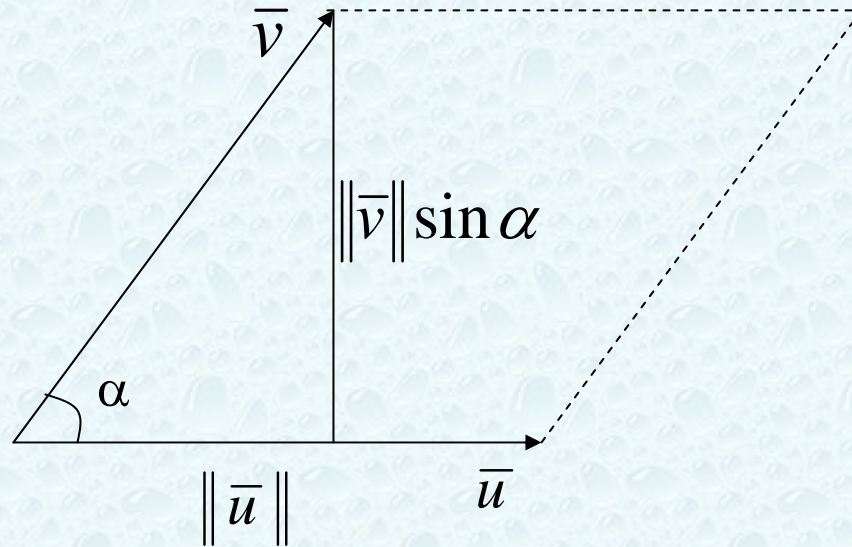


Dari sifat ke-3 diperoleh

$$\begin{aligned}\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 &= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\bar{u} \bullet \bar{v})^2 \\ &= \|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 - \left(\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos \alpha \right)^2 \\ &= \|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 - \left(\|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 \cdot \cos^2 \alpha \right) \\ &= \|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 \left(1 - \cos^2 \alpha \right) \\ &= \|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 \cdot \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

Jadi, $\|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \sin \alpha$

Perhatikan ilustrasi berikut :



$$\text{Luas Jajaran Genjang} = \|\bar{u} \times \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \sin \alpha$$

Luas segitiga yang dibentuk oleh kedua vektor tersebut adalah

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \|\bar{u} \times \bar{v}\|$$

Contoh :

Diketahui titik-titik diruang (di \mathbb{R}^3) adalah :

$$A = (1, -1, -2)$$

$$B = (4, 1, 0)$$

$$C = (2, 3, 3)$$

Dengan menggunakan hasilkali silang, tentukan luas segitiga ABC !

Jawab :

Tulis

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (4, 1, 0) - (1, -1, -2) \\ &= (3, 2, 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= C - A = (2, 3, 3) - (1, -1, -2) \\ &= (1, 4, 5)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2\hat{i} - 13\hat{j} + 10\hat{k}\end{aligned}$$

Luas segitiga ABC yang berimpit di A adalah

$$\begin{aligned}Luas &= \frac{1}{2} \sqrt{4 + 169 + 100} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{273}\end{aligned}$$

Orientasi pada titik B



$$\overrightarrow{BA} = \overline{a} - \overline{b} = (1, -1, -2) - (4, 1, 0) = (-3, -2, -2)$$

$$\overrightarrow{BC} = \overline{c} - \overline{b} = (2, 3, 3) - (4, 1, 0) = (-2, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 13\hat{k} - 10\hat{j}$$

Sehingga luas segitiga ABC yang berimpit di B adalah :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 169 + 100} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{273} \end{aligned}$$

Latihan Bab 4



1. Tentukan \cos sudut yang terbentuk oleh pasangan vektor berikut :

a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

b. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Tentukan proyeksi ortogonal vektor terhadap vektor dan tentukan panjang vektor proyeksi tersebut:

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$



3. Tentukan dua buah vektor satuan yang tegak lurus terhadap

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. Tentukan vektor yang tegak lurus terhadap vektor

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan luas segitiga yang mempunyai titik sudut P (2, 0, -3), Q (1, 4, 5), dan R (7, 2, 9)